APPUNTI DI ANALISI MATEMATICA 3

Teoria della misura e analisi reale

Pietro Celada

Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche
Università degli Studi di Parma

A.A. 2021–2022

Indice

CAPITOLO 1

Misure positive

Esaminiamo in questo capitolo la nozione di misura positiva di un insieme astratto come generalizzazione delle familiari nozioni elementari di area e volume che sono definite in geometria in maniera operativa per particolari tipi di insiemi elementari del piano e dello spazio. Che cosa dovrebbe dunque essere una misura positiva su un insieme astratto X? Una prima risposta potrebbe essere che una misura positiva debba essere una funzione μ non identicamente nulla che ad ogni insieme A contenuto in X associa un numero non negativo $\mu(A) \geq 0$ o eventualmente $\mu(A) = +\infty$ in maniera che sia $\mu(\varnothing) = 0$ e che per ogni coppia di insiemi A e B di X valgano le seguenti proprietà:

- se $A \cap B = \varnothing$, deve essere $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;
- se $A \subset B$, deve essere $\mu(A) \leq \mu(B)$;

oltre ad eventuali proprietà aggiuntive collegate alla specifica natura dell'insieme X. Queste proprietà prendono il nome di *finita additività* e *monotonia* rispettivamente. Queste richieste nella forma delineata sopra risultano però contemporaneamente troppo deboli e troppo forti: troppo deboli poiché la finita additività della misura determina una nozione di integrale insoddisfacente nel senso che la classe delle funzioni integrabili risulta limitata e l'integrale risultante privo di proprietà importanti e troppo forti perché l'ipotesi di associare la misura a ogni sottoinsieme di X risulta incompatibile per $X = \mathbb{R}^N$ con l'esigenza di ottenere una misura che generalizzi le nozioni di area e volume (Sezione 5.3).
L'idea di Lebesgue (ma non solo) per uscire da questa apparente impasse consiste nell'indebolire le richieste precedenti chiedendo da una parte che la nozione di misura si associ soltanto agli elementi di una classe selezionata di insiemi "buoni" di X che chiameremo *misurabili* e al contempo nel rinforzarle chiedendo che la proprietà di additività che si estende in modo ovvio da due a un numero finito qualunque di insiemi misurabili disgiunti valga per tutte le successioni numerabili di insiemi misurabili disgiunti di X. Come vedremo in questo capitolo questa nozione di misura e la conseguente nozione di integrale ad essa associata realizza un felice punto di equilibrio tra generalità della definizione e proprietà dell'integrale che ne risulta.

1.1. Classi di insiemi

In questa sezione esaminiamo alcune classi di sottoinsiemi di un insieme ambiente dotate di vari gradi di stabilità rispetto alle operazioni insiemistiche di unione, intersezione e passaggio al complementare.

Anelli e algebre di insiemi. Sia X un insieme astratto non vuoto. Una collezione non vuota $\mathcal{R}$ di sottoinsiemi di X con le seguenti proprietà:

(R1) $E, F \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad E \cup F \in \mathcal{R}$;

(R2) $E, F \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad E \setminus F \in \mathcal{R}$;

si dice *anello di insiemi di* X e gli elementi di $\mathcal{R}$ si dicono insiemi $\mathcal{R}$ – *misurabili.* Analogamente, una collezione non vuota $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X con le seguenti proprietà:

(A1) $E\,, F \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad E \cup F \in \mathcal{A}$;

(A2) $E \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad E^{c} \in \mathcal{A}$;

si dice *algebra di insiemi di* X e gli elementi di $\mathcal{A}$ si dicono insiemi $\mathcal{A}$ – *misurabili.* Elenchiamo nelle due proposizioni seguenti alcune proprietà elementari di anelli ed algebre di insiemi.

Proposizione 1.1. *Sia* $\mathcal{R}$ *un anello di insiemi di* X*. Allora,*

(a) $\varnothing \in \mathcal{R}$*;*

(b) $E\,, F \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad E \cap F \in \mathcal{R}$*;*

(c) $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} E_1 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{R} \\ E_1 \cap \cdots \cap E_n \in \mathcal{R}. \end{cases}$

Infatti, per (b) si ha $E \cap F = (E \cup F) \setminus \big[(E \setminus F) \cup (F \setminus E)\big]$.

Proposizione 1.2. *Sia* $\mathcal{A}$ *un'algebra di insiemi di* X*. Allora,*

(a) $\varnothing\,, X \in \mathcal{A}$*;*

(b) $E\,, F \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad E \cap F \in \mathcal{A}$*;*

(c) $E\,, F \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad E \setminus F \in \mathcal{A}$*;*

(d) $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} E_1 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{A} \\ E_1 \cap \cdots \cap E_n \in \mathcal{A}. \end{cases}$

Pertanto, ogni algebra di insiemi di X è un anello di insiemi di X e un anello $\mathcal{R}$ è un'algebra se e solo se $X \in \mathcal{R}$.

Esempio 1.3. (a) Sia X un insieme infinito. La collezione dei sottoinsiemi finiti di X è un anello di insiemi di X ma non è un'algebra.

(b) La collezione di tutti i sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$ è un anello di insiemi di $\mathbb{R}$ ma non è un'algebra.

(c) La collezione $\mathcal{R}$ costituita dall'insieme vuoto e dalle unioni finite di intervalli limitati e semiaperti inferiormente $I = (a\,, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ di $\mathbb{R}$ è un anello di insiemi di $\mathbb{R}$ ma non è un'algebra.

(d) Sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di un insieme qualunque X. Le collezioni di sottoinsiemi di X definite da $\mathcal{A} = \{\varnothing\,, X\}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ sono algebre di insiemi di X che chiameremo *algebra banale* e *algebra delle parti di* X rispettivamente.

(e) Se X è un insieme infinito, la collezione di sottoinsiemi di X definita da

$$\mathcal{A} = \big\{E : \; E \text{ finito o } E^{c} \text{ finito}\big\}$$

è un'algebra di insiemi di X detta *algebra degli insiemi finiti o cofiniti di* X. □

Gli esempi precedenti sono evidentemente poco significativi e ci limitiamo per ora ad osservare che in linea di principio esistono anelli ed algebre di insiemi in grande quantità.

Proposizione 1.4. *Sia* $\mathcal{G}$ *una famiglia non vuota di insiemi di* X *e sia*

$$\mathcal{A} = \bigcap \big\{\mathcal{A}' : \; \mathcal{A}' \text{ è un'algebra di insiemi di } X \text{ e } \mathcal{G} \subset \mathcal{A}'\big\}\,.$$

Allora, $\mathcal{A}$ *è un'algebra di insiemi di* X*.*

La dimostrazione di questa proposizione è una semplice verifica e lo stesso risultato vale per gli anelli di insiemi. L'algebra (ovvero l'anello) definita nella proposizione precedente si dice – con poca fantasia – *generata da* $\mathcal{G}$. Essa è la più piccola algebra $\mathcal{A}$ di X per la quale ogni insieme di $\mathcal{G}$ è $\mathcal{A}-$misurabile. In genere non è semplice stabilire da quali insiemi oltre a quelli appartenenti a $\mathcal{G}$ stesso sia formata l'algebra generata da $\mathcal{G}$. Se però la classe che genera l'algebra è a sua volta un anello di insiemi, la risposta è fornita dalla proposizione seguente.

PROPOSIZIONE 1.5. *Sia* $\mathcal{R}$ *un anello di insiemi di* X*. Allora,*

$$\mathcal{A} = \left\{E :\ E \in \mathcal{R} \text{ o } E^c \in \mathcal{R}\right\}.$$

è l'algebra generata da $\mathcal{R}$*.*

L'algebra di insiemi di Esempio 1.3 – (e) è quindi l'algebra generata dall'anello di Esempio 1.3 – (a).

DIMOSTRAZIONE. È chiaro che $E \in \mathcal{A}$ se e solo se $E^c \in \mathcal{A}$. Per le leggi di De Morgan, basta quindi provare che $E \cap F \in \mathcal{A}$ per ogni coppia di insiemi $E, F \in \mathcal{A}$. Siano quindi $E, F \in \mathcal{A}$ e consideriamo i tre casi possibili. Se $E, F \in \mathcal{R}$, si ha $E \cap F \in \mathcal{R} \subset \mathcal{A}$. Se $E \in \mathcal{R}$ e $F^c \in \mathcal{R}$, si ha $E \cap F = E \setminus (F^c) \in \mathcal{R} \subset \mathcal{A}$. Infine, se $E^c, F^c \in \mathcal{R}$, si ha $E \cap F = (E^c \cup F^c)^c \in \mathcal{A}$ e questo completa la dimostrazione. □

Un altro caso in cui è possibile descrivere l'algebra di insiemi generata da una famiglia di insiemi è descritta nella proposizione seguente.

PROPOSIZIONE 1.6. *Sia* $\mathcal{E}$ *una collezione di insiemi di* X *con le seguenti proprietà*

- $\varnothing \in \mathcal{E}$*;*
- $E_1, E_2 \in \mathcal{E} \quad \Longrightarrow \quad E_1 \cap E_2 \in \mathcal{E}$*;*
- $E \in \mathcal{E} \quad \Longrightarrow \quad E^c = E_1 \cup \cdots \cup E_n$ *con* $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}$ *disgiunti.*

Allora,

$$\mathcal{A} = \left\{E :\ E = E_1 \cup \cdots \cup E_n \text{ con } E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E} \text{ disgiunti}\right\}.$$

è l'algebra generata da $\mathcal{E}$*.*

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente provare che $\mathcal{A}$ è un'algebra di insiemi di X.
A tal fine, consideriamo un insieme $E \in \mathcal{A}$ e proviamo che risulta $E^c \in \mathcal{A}$. Sia dunque $E \in \mathcal{A}$ cosicché E è della forma $E = E_1 \cup \cdots \cup E_n$ per opportuni insiemi $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}$ disgiunti. Risulta allora $E^c = E_1^c \cap \cdots \cap E_n^c$ e ogni insieme E_m^c è della forma $E_m^c = E_{m,1} \cup \cdots \cup E_{m,j_m}$ con $E_{m,j} \in \mathcal{E}$ $(j = 1, \ldots, j_m)$ disgiunti per ogni m. Risulta allora

$$E^c = \bigcup_{i_1,\ldots,i_n} E_{1,i_1} \cap \cdots E_{n,i_n}$$

con sommatoria estesa a tutte le $n-$uple $(i_1, \ldots, i_n)$ di indici $1 \leq i_m \leq j_m$ per ogni m. Poiché gli insiemi $E_{1,i_1} \cap \cdots E_{n,i_n}$ sono disgiunti e appartengono a $\mathcal{E}$ per ipotesi, risulta $E^c \in \mathcal{A}$.
Consideriamo quindi due insiemi $E, F \in \mathcal{A}$. Risulta allora

$$F \setminus E = F \cap E^c = (F_1 \cup \cdots \cup F_k) \cap (E_1 \cup \cdots \cup E_k) = \bigcup_{h,m} F_h \cap E_m$$

con $\{F_1, \ldots, F_k\}$ e $\{E_1, \ldots, E_n\}$ famiglie di insiemi disgiunti di $\mathcal{E}$ cosicché anche gli insiemi $F_h \cap E_m$ appartengono a $\mathcal{E}$ e risultano a maggior ragione disgiunti. Risulta dunque $F \setminus E \in \mathcal{A}$ e da ciò segue $E \cup F = E \cup (F \setminus E) \in \mathcal{A}$.
Abbiamo così provato che $\mathcal{A}$ è un'algebra di insiemi di X e questo prova la tesi. □

Esempio 1.7. La collezione $\mathcal{I}$ formata dall'insieme vuoto e dagli intervalli I semiaperti inferiormente $I = (a, b]$ $(-\infty \le a < b < +\infty)$ e dagli intervalli aperti e illimitati superiormente $I = (a, +\infty)$ $(-\infty \le a < +\infty)$ verifica le ipotesi di Proposizione 1.6 e quindi la famiglia

$$\mathcal{A} = \left\{ A : \; A = I_1 \cup \cdots \cup I_n \text{ con } I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{I} \text{ disgiunti} \right\}.$$

degli insiemi che sono unione finita di intervalli disgiunti di $\mathcal{I}$ è un'algebra di insiemi di $\mathbb{R}$. □

Concludiamo questa parte provando che gli anelli di insiemi sono effetivamente anelli in senso algebrico.

Proposizione 1.8. *Sia $\mathcal{R}$ un anello di insiemi di X. Allora, $(\mathcal{R}, \triangle, \cap)$ è un anello commutativo.*

In particolare, ogni algebra di insiemi di X è un anello commutativo con unità.

Dimostrazione. Per la differenza simmetrica si ha

- $E \triangle F = F \triangle E$;
- $(E \triangle F) \triangle G = E \triangle (F \triangle G)$;
- $E \triangle \varnothing = E$;
- $E \triangle E = \varnothing$;

per ogni insieme $E, F, G \in \mathcal{R}$ e analogamente per l'intersezione risulta

- $E \cap F = F \cap E$;
- $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$;
- $(E \triangle F) \cap G = (E \cap G) \triangle (F \cap G)$;

per tutti gli insiemi di $\mathcal{R}$. □

$\sigma-$anelli e $\sigma-$algebre di insiemi. Come evidenziato nelle considerazioni iniziali, siamo interessati ad anelli ed algebre di insiemi per le quali le proprietà di stabilità rispetto alle operazioni insiemistiche di unione e di intersezione espresse da Proposizione 1.1 – (c) e Proposizione 1.2 – (d) valgano in una forma più forte cioè per famiglie numerabili anziché finite di insiemi. Con questa motivazione introduciamo le definizioni seguenti.
Sia X un insieme astratto (non vuoto). Un anello $\mathcal{R}$ di insiemi di X tale che

$$(\sigma\text{R}) \;\; E_n \in \mathcal{R} \; (n \ge 1) \text{ e } E = \bigcup_n E_n \qquad \Longrightarrow \qquad E \in \mathcal{R};$$

si dice σ – *anello di insiemi di* X e gli elementi di $\mathcal{R}$ si dicono ancora insiemi $\mathcal{R}$ – *misurabili*. Analogamente, un'algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X tale che

$$(\sigma\text{A}) \;\; E_n \in \mathcal{S} \; (n \ge 1) \text{ e } E = \bigcup_n E_n \qquad \Longrightarrow \qquad E \in \mathcal{S};$$

si dice σ – *algebra di insiemi di* X e gli insiemi di $\mathcal{S}$ si dicono insiemi $\mathcal{S}$ – *misurabili*.
È facile vedere che, se $\mathcal{R}$ è un $\sigma-$anello, esso è stabile anche rispetto all'intersezione numerabile cioè si ha

$$\{E_n\}_n \in \mathcal{R} \text{ e } E = \bigcap_n E_n \qquad \Longrightarrow \qquad E \in \mathcal{R}.$$

Infatti, si ha $E = E_1 \setminus (E_1 \setminus E)$ e, per le leggi di De Morgan, si ha

$$E_1 \setminus E = E_1 \cap \left(\bigcap_n E_n \right)^{\mathrm{c}} = \bigcup_n (E_1 \setminus E_n).$$

La stessa proprietà vale anche per le $\sigma-$algebre poiché ogni $\sigma-$algebra è evidentemente un $\sigma-$anello. Inoltre, la relazione tra $\sigma-$anelli e $\sigma-$algebre è la stessa che sussiste tra anelli ed algebre: un $\sigma-$anello $\mathcal{R}$ di insiemi di X è una $\sigma-$algebra di insiemi di X se e solo se $X \in \mathcal{R}$.

Esempio 1.9. (a) L'algebra banale e l'algebra delle parti di un insieme X sono altrettanti esempi di $\sigma-$algebre di insiemi.

(b) Sia X un insieme non numerabile. Le famiglie di insiemi

$$\mathcal{R} = \{E \subset X : E \text{ al più numerabile}\}$$
$$\mathcal{S} = \{E : E \text{ o } E^{c} \text{ al più numerabile}\}$$

sono un $\sigma-$anello e una $\sigma-$algebra rispettivamente di X. □

Come nel caso di anelli ed algebre, è possibile in astratto generare $\sigma-$anelli e $\sigma-$algebre a partire da qualunque famiglia non vuota di insiemi.

Proposizione 1.10. *Sia $\mathcal{C}$ una famiglia non vuota di insiemi di X e sia*

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{\mathcal{S}' : \mathcal{S}' \text{ è una } \sigma-\text{algebra di insiemi di } X \text{ e } \mathcal{C} \subset \mathcal{S}'\}.$$

Allora, $\sigma(\mathcal{C})$ è una $\sigma-$algebra di insiemi di X.

Anche in questo caso la dimostrazione non è altro che una semplice verifica e lo stesso risultato vale per i $\sigma-$anelli. La $\sigma-$algebra definita nella proposizione precedente si dice ancora *generata da $\mathcal{C}$* ed ha la proprietà di esssere la più piccola $\sigma-$algebra di insiemi di X per la quale ogni insieme di $\mathcal{C}$ è $\mathcal{S}-$misurabile. Inoltre, la Proposizione 1.5 vale con $\sigma-$anelli e $\sigma-$algebre al posto di anelli ed algebre.
Nel caso particolare in cui $(X, \mathcal{T})$ sia uno spazio topologico, vi è una $\sigma-$algebra particolarmente significativa perché generata da una classe di insiemi rilevanti di X: gli insiemi aperti. La $\sigma-$algebra $\sigma(\mathcal{T})$ generata dalla topologia $\mathcal{T}$ si chiama *$\sigma-$algebra di Borel di X* e si denota con

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{T}).$$

Gli elementi di $\mathcal{B}(X)$ si dicono *insiemi di Borel di X*.
Il teorema seguente fornisce una stima sulla cardinalità della $\sigma-$algebra generata da una famiglia di insiemi.

Teorema 1.11. *Sia $\mathcal{C}$ una famiglia non vuota di insiemi di X tale che*

- $\varnothing \in \mathcal{C}$;
- $\mathrm{card}(\mathcal{C}) = \mathfrak{k}$ *con* $\mathfrak{k} \geq 2$.

Allora, $\mathrm{card}(\sigma(\mathcal{C})) \leq \mathfrak{k}^{\aleph_0}$.

Dimostrazione. Per ogni collezione $\mathcal{F}$ (non vuota) di insiemi di X poniamo

$$\mathcal{F}^{*} = \left\{ \bigcup_{n} F_n : F_n \in \mathcal{F} \text{ o } F_n^{c} \in \mathcal{F} \text{ per ogni } n \right\}.$$

Sia Ω il più piccolo ordinale non numerabile e sia

$$P_\Omega = \{\alpha : \alpha \text{ ordinale tale che } 0 \leq \alpha < \Omega\}$$

l'insieme ben ordinato degli ordinali minori di Ω (Teorema I–1.18). Posto $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$, sia $\mathcal{C}_\alpha$ definito per induzione transfinita da

$$\mathcal{C}_\alpha = \left(\bigcup_{0 \leq \beta < \alpha} \mathcal{C}_\beta \right)^{*}$$

per ogni ordinale $0 < \alpha < \Omega$. Poniamo

$$\mathcal{A} = \bigcup_{0 \leq \alpha < \Omega} \mathcal{C}_\alpha$$

e proviamo che risulta $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$.

Si ha $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$. Supponiamo quindi che per $0 < \alpha < \Omega$ risulti $\mathcal{C}_\beta \subset \sigma(\mathcal{C})$ per ogni $\beta < \alpha$ e sia $\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}_\alpha$. Allora, per ogni n risulta

$$A_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{C}_\beta \qquad \text{o} \qquad A_n^{\mathrm{c}} \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{C}_\beta$$

e dunque si ha $A_n, A_n^{\mathrm{c}} \in \sigma(\mathcal{C})$ per ogni n cosicché risulta $\bigcup_n A_n \in \sigma(\mathcal{C})$.
Abbiamo così provato che risulta

- $\mathcal{C}_0 \subset \sigma(\mathcal{C})$
- $\alpha > 0$ e $\mathcal{C}_\beta \subset \sigma(\mathcal{C})$ per $\beta < \alpha \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{C}_\alpha \subset \sigma(\mathcal{C})$.

da cui segue

$$\big\{\alpha \in P_\Omega : \mathcal{C}_\alpha \subset \sigma(\mathcal{C})\big\} = P_\Omega$$

per il principio di induzione transfinita (Teorema I–1.6). Pertanto si ha

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathcal{C}_\alpha \subset \sigma(\mathcal{C})$$

e quindi, avendosi $\mathcal{C}_0 \subset \sigma(\mathcal{C})$, per completare la dimostrazione di questa parte resta solo da provare che $\mathcal{A}$ sia una σ−algebra di insiemi di X. Si ha

$$X = \varnothing^{\mathrm{c}} \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots \in \mathcal{C}_1$$

e quindi $X \in \mathcal{A}$. Sia poi $A \in \mathcal{A}$ e sia $\alpha < \Omega$ tale che $A \in \mathcal{C}_\alpha$. Allora si ha

$$A^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup A^{\mathrm{c}} \cup A^{\mathrm{c}} \cup \cdots \in \mathcal{C}_\alpha^*$$

e quindi per ogni $\alpha < \beta$ risulta

$$\mathcal{C}_\alpha^* \subset \bigcup_{\gamma<\beta} \mathcal{C}_\gamma^* \subset \left(\bigcup_{\gamma<\beta} \mathcal{C}_\gamma \right)^* = \mathcal{C}_\beta.$$

Pertanto $A \in \mathcal{A}$ implica $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$. Infine, siano $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \geq 1)$. Per ogni n esiste $\alpha_n < \Omega$ tale che $A_n \in \mathcal{C}_{\alpha_n}$ e quindi esiste $\beta < \Omega$ tale che risulti $\alpha_n < \beta$ per ogni n (Teorema I–1.18 − (c)). Allora si ha

$$\bigcup_n A_n \in \left(\bigcup_n \mathcal{C}_{\alpha_n} \right)^* \subset \mathcal{C}_\beta \subset \mathcal{A}$$

e questo completa la dimostrazione del fatto che $\mathcal{A}$ sia una σ−algebra. Risulta quindi

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcup_{0\leq\alpha<\Omega} \mathcal{C}_\alpha.$$

Si ha per ipotesi $\mathrm{card}(\mathcal{C}) = \mathfrak{k} \geq 2$ e da

$$\mathcal{C}_1 = \left\{ \bigcup_n A_n : A_n \in \mathcal{C} \text{ o } A_n^{\mathrm{c}} \in \mathcal{C} \right\}$$

segue che risulta $\mathrm{card}(\mathcal{C}_1) \leq (2\mathfrak{k})^{\aleph_0} = \mathfrak{k}^{\aleph_0}$ per Teorema I–1.11 − (g), I–1.13 e I–1.15 se $\mathfrak{k}$ è finito o per Teorema I–1.11 − (g) e I–1.15 se $\mathfrak{k}$ è infinito. Supponiamo ora che risulti $\mathrm{card}(\mathcal{C}_\beta) \leq \mathfrak{k}^{\aleph_0}$ per $1 \leq \beta < \alpha$ con $1 < \alpha < \Omega$. Si ha allora

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{1\leq\beta<\alpha} \mathcal{C}_\beta \right) \leq \mathfrak{k}^{\aleph_0}\aleph_0 = \mathfrak{k}^{\aleph_0}$$

per Teorema I–1.15 − (b) poiché $0 < \aleph_0 < \mathfrak{k}^{\aleph_0}$. Per definizione si ha

$$\mathcal{C}_\alpha = \left(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{C}_\beta \right)^* = \left(\mathcal{C}_0 \cup \bigcup_{1\leq\beta<\alpha} \mathcal{C}_\beta \right)^*$$

e quindi, ragionando come per $\mathcal{C}_1$, risulta

$$\operatorname{card}(\mathcal{C}_\alpha) \leq \left(\mathfrak{k}^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = \mathfrak{k}^{\aleph_0\aleph_0} = \mathfrak{k}^{\aleph_0}$$

per Teorema I–1.11 – (h) e Teorema I–1.15 – (b). Abbiamo così provato che risulta

- $\operatorname{card}(\mathcal{C}_0) = \mathfrak{k}$;
- $\operatorname{card}(\mathcal{C}_\beta) \leq \mathfrak{k}^{\aleph_0}$ per $\beta < \alpha \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{card}(\mathcal{C}_\alpha) \leq \mathfrak{k}^{\aleph_0}$;

e per induzione transfinita risulta allora $\operatorname{card}(\mathcal{C}_\beta) \leq \mathfrak{k}^{\aleph_0}$ per ogni ordinale $0 \leq \alpha < \Omega$ e da ciò segue infine

$$\operatorname{card}(\mathcal{A}) = \operatorname{card}\left(\bigcup_{\alpha<\Omega} \mathcal{C}_\alpha\right) \leq \mathfrak{k}^{\aleph_0} \cdot \aleph_1 = \mathfrak{k}^{\aleph_0}.$$

Infatti si ha $\mathfrak{k}^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ e $\aleph_1 \leq \mathfrak{c}$ (= se vale l'ipotesi del continuo) e quindi risulta $\mathfrak{k}^{\aleph_0} \cdot \aleph_1 = \mathfrak{k}^{\aleph_0}$ (Teorema I–1.15 – (b)). $\square$

Corollario 1.12. *Si ha* $\operatorname{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)) = \mathfrak{c}$ $(N \geq 1)$.

Dimostrazione. Poiché $\mathbb{R}^N$ ha una base numerabile di aperti risulta

$$\operatorname{card}\big((\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\big) \leq \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

per il teorema precedente. D'altra parte in $\mathbb{R}^N$ vi sono almeno $\mathfrak{c}$ aperti distinti e questo prova l'asserto (Corollario I–1.8). $\square$

Concludiamo questa parte introducendo la seguente terminologia per la relativizzazione di σ – algebre di insiemi. Sia $\mathcal{S}$ una σ – algebra di insiemi di X e sia Y un sottoinsieme di X. Allora, la collezione di insiemi $\mathcal{S}(Y)$ definita da

$$\mathcal{S}(Y) = \big\{E \cap Y : \ E \in \mathcal{S}\big\}$$

è una σ – algebra di sottoinsiemi di Y che si chiama *σ – algebra restrizione di $\mathcal{S}$ ad X*.
Evidentemente, si ha $\mathcal{S} = \mathcal{S}(X)$ e $\mathcal{S}(Y) = \{E : \ E \subset Y,\, E \in \mathcal{S}\}$ quando Y stesso è $\mathcal{S}$ – misurabile.

Classi di Dynkin e classi monotòne. Esaminiamo in questa parte due ulteriori classi di insiemi dotati di proprietà di stabilità rispetto alle operazioni insiemistiche con particolare riguardo alle loro relazioni con le σ –algebre. Consideriamo a tal fine un insieme X (non vuoto) che supponiamo fissato in tutta questa parte.
Una collezione di insiemi $\mathcal{D}$ di X con le seguenti proprietà:

(D1) $X \in \mathcal{D}$;
(D2) $E \in \mathcal{D} \quad \Longrightarrow \quad E^{\mathrm{c}} \in \mathcal{D}$;
(D3) $E_n \in \mathcal{D}$ $(n \geq 1)$ e $E_m \cap E_n = \varnothing$ per $m \neq n \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_n E_n \in \mathcal{D}$;

si dice *classe di Dynkin di insiemi di X*.
L'intersezione di una famiglia arbitraria di classi di Dynkin di insiemi di X è ancora una classe di Dynkin di insiemi di X e quindi per ogni collezione non vuota $\mathcal{C}$ di insiemi di X esiste una classe di Dynkin definita come in Proposizione 1.4 e Proposizione 1.10 da

$$\delta(\mathcal{C}) = \bigcap \big\{\mathcal{D} : \ \mathcal{C} \subset \mathcal{D} \text{ e } \mathcal{D} \text{ classe di Dynkin}\big\}$$

che è minima rispetto all'inclusione tra le classi di Dynkin contenenti $\mathcal{C}$ e che si dice generata da $\mathcal{C}$. Questo assicura che in linea di principio esistano classi di Dynkin in abbondanza le quali in genere non risultano essere σ – algebre (Esercizio 1.6).
Relativamente alle relazioni tra classi di Dynkin e σ – algebre valgono i risultati seguenti.

Teorema 1.13. *Sia $\mathcal{D}$ una classe di Dynkin di insiemi di X tale che*

$$E\,, F \in \mathcal{D} \qquad \Longrightarrow \qquad E \cap F \in \mathcal{D}.$$

Allora, $\mathcal{D}$ è una σ – algebra di insiemi di X;

Dimostrazione. Da (D1) e (D2) segue $\varnothing \in \mathcal{D}$ cosicché risulta $E \cup F \in \mathcal{D}$ per ogni coppia di insiemi $E\,, F \in \mathcal{D}$ con $E \cap F = \varnothing$ per (D3). Dati due insiemi di insiemi $E\,, F \in \mathcal{D}$ risulta allora $E \setminus F = E \cap F^{\mathrm{c}} \in \mathcal{D}$ e quindi anche $E \cup F = F \cup (E \setminus F) \in \mathcal{D}$ poiché F e $E \setminus F$ sono disgiunti. Quindi $\mathcal{D}$ è un'algebra di insiemi di X e da (D3) segue facilmente la tesi. □

Teorema 1.14 (E. Dynkin). *Sia $\mathcal{P}$ una collezione di insiemi di X tale che*

$$E\,, F \in \mathcal{P} \qquad \Longrightarrow \qquad E \cap F \in \mathcal{P}.$$

Allora,

$$\delta(\mathcal{P}) = \sigma(\mathcal{P}).$$

In particolare, la classe di Dynkin generata da una famiglia di insiemi stabile per intersezione finita è una σ – algebra di insiemi. Questo risultato prende il nome di *teorema $\pi - \lambda$ di Dynkin*[1].

Dimostrazione. È sufficiente provare che risulta

$$(*) \qquad E\,, F \in \delta(\mathcal{P}) \qquad \Longrightarrow \qquad E \cap F \in \delta(\mathcal{P}).$$

Ciò implica infatti che $\delta(\mathcal{P})$ sia una σ – algebra di insiemi di X (Teorema 1.13) cosicché risulta $\sigma(\mathcal{P}) \subset \delta(\mathcal{P})$ e l'inclusione opposta vale per definizione per qualunque collezione di insiemi.
Consideriamo a tal fine la collezione di insiemi

$$\delta_E = \left\{ A : \; E \cap A \in \delta(\mathcal{P}) \right\}, \qquad E \subset X,$$

e supponiamo di aver provato che risulti

- $E \in \delta(\mathcal{P}) \quad \Longrightarrow \quad \delta_E$ è una classe di Dynkin di insiemi di X;
- $E \in \mathcal{P}$ e $F \in \delta(\mathcal{P}) \quad \Longrightarrow \quad E \cap F \in \delta(\mathcal{P})$.

In tal caso, per ogni insieme $F \in \delta(\mathcal{P})$ fissato, δ_F risulta essere una classe di Dynkin contenente $\mathcal{P}$. Si ha allora $\delta(\mathcal{P}) \subset \delta_F$ per ogni $F \in \delta(\mathcal{P})$ e questo prova $(*)$.
Per completare la dimostrazione restano solo da provare le due affermazioni precedenti.
Relativamente alla prima di esse, sia $E \in \delta(\mathcal{P})$ un insieme fissato. Si ha allora $E \cap X = E \in \delta(\mathcal{P})$ da cui segue $X \in \delta_E$ e quindi per δ_E vale (D1). Per $A \in \delta_E$, entrambi gli insiemi E e $A \cap E$ appartengono a $\delta(\mathcal{P})$ cosicché da $E \cap A \subset A$ segue $E \setminus A = E \setminus (E \cap A) \in \delta(\mathcal{P})$ (Esercizio 1.7) e quindi risulta $A^{\mathrm{c}} \in \delta_E$. Quindi per δ_E vale anche (D2) e la validità di (D3) è ovvia: se $A_n \in \delta_E$ $(n \geq 1)$ sono insiemi disgiunti, gli insiemi $E \cap A_n$ appartengono a $\delta(\mathcal{P})$ per ogni n e sono disgiunti cosicché, posto $A = \bigcup_n A_n$, risulta $E \cap A = \bigcup_n (E \cap A_n) \in \delta(\mathcal{P})$ poiché (D3) vale per $\delta(\mathcal{P})$. Pertanto δ_E risulta essere una classe di Dynkin di insiemi di X.
Per provare la seconda affermazione, osserviamo che per ogni coppia di insiemi $E\,, F \in \mathcal{P}$ risulta $E \cap F \in \mathcal{P} \subset \delta(\mathcal{P})$ per ipotesi da cui segue $F \in \delta_E$ ovvero $\mathcal{P} \subset \delta_E$ per ogni insieme $E \in \mathcal{P}$. Essendo δ_E una classe di Dynkin di insiemi di X, risulta allora $\delta(\mathcal{P}) \subset \delta_E$ per ogni $E \in \mathcal{P}$. Abbiamo cosí provato che risulta $E \cap F \in \delta(\mathcal{P})$ per ogni $E \in \mathcal{P}$ e $F \in \delta(\mathcal{P})$ e questo prova l'asserto e conclude la dimostrazione. □

[1] Nel linguaggio dei probabilisti, una classe di Dynkin è un λ – sistema di insiemi e una famiglia di insiemi stabile per intersezione finita è un π – sistema di insiemi. In questa terminologia dunque, il teorema di Dynkin stabilisce che il λ – sistema di insiemi generato da un π – sistema di insiemi è in effetti una σ – algebra di insiemi.

Corollario 1.15. *Sia $\mathcal{D}$ una classe di Dynkin di insiemi di X e sia $\mathcal{P}$ una collezione di insiemi di X tale che*

- $E, F \in \mathcal{P} \quad \Longrightarrow \quad E \cap F \in \mathcal{P}$;
- $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$.

Allora,

$$\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}.$$

Una collezione non vuota $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di X con le seguenti proprietà:

(M1) $E_n \in \mathcal{M}$ e $E_n \subset E_{n+1}$ per ogni $n \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_n E_n \in \mathcal{M}$;

(M1) $E_n \in \mathcal{M}$ e $E_{n+1} \subset E_n$ per ogni $n \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_n E_n \in \mathcal{M}$

si dice *classe monotòna di insiemi di X*.
Possiamo ripetere per le classi monotòne quanto già osservato per le classi di Dynkin: l'intersezione di una qualunque famiglia di classi monotòne di insiemi di X è ancora una classe monotòna e conseguentemente ogni famiglia non vuota $\mathcal{C}$ di insiemi di X genera una classe monòtona $m(\mathcal{C})$ avente la proprietà di essere minima tra le classi monotòne contenenti la collezione di insiemi $\mathcal{C}$. Inoltre, vi sono classi monotòne che non sono $\sigma-$algebre (Esercizio 1.6).
La proprietà delle classi monotòne che è utile evidenziare è la seguente.

Teorema 1.16 (P. Halmos). *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di insiemi di X. Allora,*

$$m(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}).$$

In particolare, la classe monotòna generata da un'algebra $\mathcal{A}$ di insiemi di X è una $\sigma-$algebra di insiemi di X.

Dimostrazione. È sufficiente provare che risulta $\sigma(\mathcal{A}) \subset m(\mathcal{A})$ poiché l'inclusione opposta vale per definizione per qualunque collezione di insiemi.
La collezione di insiemi

$$\mathcal{M} = \{M : \ M^c \in m(\mathcal{A})\}$$

è una classe monotòna che contiene $\mathcal{A}$ poiché $\mathcal{A}$ è un'algebra. Risulta quindi $m(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$ e questo prova che

$$(**) \qquad E \in m(\mathcal{A}) \quad \Longrightarrow \quad E^c \in m(\mathcal{A}).$$

Analogamente la classe di insiemi

$$\mathcal{M}' = \{E : \ E \cup A \in m(\mathcal{A}) \text{ per ogni } A \in \mathcal{A}\}$$

è anch'essa una classe monotòna che contiene $\mathcal{A}$ e quindi risulta $m(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}'$. Infine, la classe di insiemi

$$\mathcal{M}'' = \{A : \ A \cup E \in m(\mathcal{A}) \text{ per ogni } E \in m(\mathcal{A})\}$$

è a sua volta una classe monotòna di insiemi di X. Poiché $m(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}'$, si ha

$$E \in m(\mathcal{A}) \text{ e } A \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad E \cup A \in m(\mathcal{A})$$

e quindi risulta $A \in \mathcal{M}''$ per ogni $A \in \mathcal{A}$. Abbiamo così provato che risulta $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}''$ da cui segue $m(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}''$. Si ha pertanto

$$(***) \qquad E, F \in m(\mathcal{A}) \quad \Longrightarrow \quad E \cup F \in m(\mathcal{A})$$

e quindi da $(**)$ e $(***)$ si conclude che $m(\mathcal{A})$ è un'algebra di insiemi di X. Infine, data una famiglia numerabile di insiemi $E_n \in m(\mathcal{A})$ $(n \geq 1)$, posto $E = \bigcup_n E_n$, si ha

$$E_1 \cup \cdots \cup E_n \in m(\mathcal{A}) \qquad \text{e} \qquad E_1 \cup \cdots \cup E_n \subset E_1 \cup \cdots \cup E_{n+1}$$

per ogni n da cui segue $E \in m(\mathcal{A})$. Abbiamo così provato che $m(\mathcal{A})$ è una σ −algebra di insiemi di X contente $\mathcal{A}$ e questo implica che sia $\sigma(\mathcal{A}) \subset m(\mathcal{A})$. □

1.2. Misure positive

Introduciamo in questa sezione una nozione di misura positiva sulla linea di quanto illustrato all'inizio del capitolo e ne esaminiamo le principali proprietà.

Misure positive. Sia X un insieme astratto (non vuoto) che supponiamo fissato salvo specificarne ulteriori proprietà ove necessario.

DEFINIZIONE 1.17. Sia $\mathcal{R}$ un anello di insiemi di X. Una funzione $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,+\infty]$ con le seguenti proprietà:

- $\mu(\varnothing) = 0$;
- $E, F \in \mathcal{R}$ e $E \cap F = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$;

si dice *misura positiva finitamente additiva su* $\mathcal{R}$. □

Come anticipato, la proprietà della funzione μ espressa al secondo punto della definizione precedente prende il nome di *finita additività* e la somma che in essa compare a secondo membro si intende ovviamente estesa ai numeri reali estesi di $[0,+\infty]$ ponendo $x+(+\infty) = (+\infty)+x = +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$. Queste convenzioni sono compatibili con la proprietà associativa e commutativa. Elenchiamo nella proposizione seguente alcune proprietà elementari delle misure finitamente additive su anelli di insiemi.

PROPOSIZIONE 1.18. *Sia $\mathcal{R}$ un anello di insiemi di X e sia $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,+\infty]$ una misura positiva finitamente additiva su $\mathcal{R}$. Allora,*

(a) $E, F \in \mathcal{R}$ *e* $E \subset F \quad \Longrightarrow \quad \mu(E) \leq \mu(F)$;

(b) $E, F \in \mathcal{R}$ *con* $E \subset F$ *e* $\mu(E) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$;

(c) $E, F \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad \mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$;

(d) $\begin{cases} E_1, \dots, E_n \in \mathcal{R} \\ E_{m'} \cap E_{m''} = \varnothing \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mu(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_n)$;

(e) $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad \mu(E_1 \cup \cdots \cup E_n) \leq \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_n)$.

Le proprietà di μ espresse da (a) e da (c) o (e) prendono il nome di proprietà di *monotònia* e di proprietà di *finita subadditività* rispettivamente. La proprietà (d) vale anche per insiemi $E_1, \dots, E_n$ che, pur non essendo disgiunti, siano tali che risulti

$$\mu(E_{m'} \cap E_{m''}) = 0, \qquad m' \neq m''.$$

In tal caso, gli insiemi $E_1, \dots, E_n$ si dicono *non μ – sovrapposti* o brevemente *non sosvrapposti* quando il riferimento alla misura μ sia evidente dal contesto.

DIMOSTRAZIONE. Dati $E, F \in \mathcal{R}$, risulta $F \setminus E \in \mathcal{R}$. Se $E \subset F$, si ha allora

$$\mu(E) \leq \mu(E) + \mu(F \setminus E) = \mu(F)$$

e questo prova (a). Se risulta anche $\mu(E) < +\infty$, dalla seconda uguaglianza segue (b). Da (a) segue poi

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \leq \mu(E) + \mu(F).$$

e questo prova (c). Le restanti due affermazioni seguono dalle precedenti in maniera ovvia. □

Una misura positiva finitamente additiva $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,+\infty]$ su un anello $\mathcal{R}$ di insiemi di X si dice

- *finita* se $\mu(E) < +\infty$ per ogni $E \in \mathcal{R}$;
- *limitata* se $\sup\{\mu(E) :\ E \in \mathcal{R}\} < +\infty$.

Se μ è definita su un'algebra $\mathcal{A}$ di insiemi di X le due nozioni precedenti coincidono ed equivalgono all'ipotesi che sia $\mu(X) < +\infty$.

Esempio 1.19. (a) Sia X un insieme infinito. La funzione d'insiemi

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & A \subset X \text{ finito} \\ +\infty & A \subset X \text{ infinito} \end{cases}$$

è una misura positiva finitamente additiva sulla $\sigma-$algebra $\mathcal{P}(X)$ delle parti di X.
(b) Sia $\mathcal{R}$ l'anello di insiemi di $\mathbb{R}$ costituito dalle unioni finite di intervalli limitati e semiaperti a sinistra (Esempio 1.3−(c)) e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

- $f(x) \geq 0$ per ogni x e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$;
- f è crescente.

Poniamo $\mu(\varnothing) = 0$ e

$$\mu((a,b]) = f(b) - f(a), \qquad -\infty < a < b < +\infty,$$

ed estendiamo μ a tutto l'anello $\mathcal{R}$ ponendo

$$\mu(E) = \mu((a_1,b_1]) + \cdots + \mu((a_n,b_n])$$

per ogni altro insieme $E \in \mathcal{R}$ della forma

$$E = (a_1,b_1] \cup \cdots \cup (a_n,b_n]$$

$(-\infty < a_1 < b_1 \leq a_2 < \cdots < b_{n-1} \leq a_n < b_n < +\infty$ se $n \geq 2)$. La funzione $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,+\infty)$ risulta ben definita, pur non essendo unica la rappresentazione di $E \in \mathcal{R}$ come unione finita di intervalli elementari della forma $[a,b)$. Allora, μ è una misura positiva finitamente additiva su $\mathcal{R}$. Inoltre, μ è finita e risulta anche limitata se e solo se f è limitata. □

Come già accennato in precedenza, siamo interessati a considerare funzioni d'insiemi che verifichino proprietà di additività più forti della sola finita additività. A tal fine, introduciamo la definizione seguente.

Definizione 1.20. Sia $\mathcal{R}$ un $\sigma-$anello di sottoinsiemi di X. Una funzione d'insiemi $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,+\infty]$ con le seguenti proprietà:

- $\mu(\varnothing) = 0$;
- per ogni collezione di insiemi $E_n \in \mathcal{R}$ $(n \geq 1)$ tali che $E_m \cap E_n = \varnothing$ per $m \neq n$ si ha

$$(*) \qquad \mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n);$$

si dice *misura positiva numerabilmente additiva su* $\mathcal{R}$. □

Un insieme X munito di una misura positiva numerabilmente additiva μ definita su un $\sigma-$anello $\mathcal{R}$ di insiemi di X si dice *spazio con misura numerabilmente additiva* o brevemente *spazio con misura.*
La proprietà della funzione μ espressa da $(*)$ prende il nome di *numerabile additività* e, nel caso in cui risulti

$$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) < +\infty,$$

la convergenza della serie a destra in $(*)$ è parte della definizione. In ogni caso, la convergenza o la divergenza a $+\infty$ di tale serie è incondizionata essendo la serie a termini non negativi (Teorema 2.47 in [4] o Teorema 3.55 in [14]). È chiaro altresì che ogni misura positiva numerabilmente additiva μ su un $\sigma-$anello è anche una misura positiva finitamente additiva poiché risulta $\mu(\varnothing) = 0$.
La terminologia già introdotta per le misure positive finitamente additive su anelli di insiemi si applica anche alle misure positive numerabilmente additive su $\sigma-$anelli. Parleremo quindi di misure positive numerabilmente additive finite e limitate con lo stesso significato già visto. Come nel caso precedente, le due nozioni coincidono qualora μ sia una misura positiva numerabilmente additiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X e si riducono all'ipotesi che sia $\mu(X) < +\infty$. In particolare, una misura positiva numerabilmente additiva e limitata μ su una $\sigma-$algebra di insiemi $\mathcal{S}$ di un insieme X con $\mu(X) = 1$ si dice *misura di probabilità* o brevemente *probabilità.*
Nel seguito considereremo (quasi) esclusivamente misure positive numerabilmente additive definite su $\sigma-$algebre di insiemi. Per questo motivo, con l'intento di semplificare la terminologia, utilizzeremo sempre l'espressione *misura positiva* per riferirci esclusivamente a misure positive numerabilmente additive su $\sigma-$algebre di insiemi e parleremo invece esplicitamente di misura positiva finitivamente additiva su un anello o un'algebra di insiemi o di misura positiva numerabilmente additiva su un $\sigma-$anello negli altri casi. Analogamente, parleremo di spazio con misura per riferirci esclusivamente a spazi con misure numerabilmente additive su $\sigma-$algebre di insiemi.
Esaminiamo alcuni semplici esempi di misure positive numerabilmente additive.

Esempio 1.21. (a) Siano X un insieme astratto (non vuoto) e $f\colon X \to [0, +\infty]$ una funzione non negativa. La funzione d'insiemi

$$\mu(A) = \sum_{x\in A} f(x), \qquad A \subset X,$$

ove la somma a destra è intesa come somma (non ordinata) di f su X (Sezione I–2.4) è una misura positiva sulla $\sigma-$algebra $\mathcal{P}(X)$ delle parti di X (Esercizio 1.8).
Scegliendo la funzione f definita da $f(x) = 1$ per ogni $x \in X$, la misura positiva risultante si denota con $\#$ e diviene

$$\#(A) = \begin{cases} \mathrm{card}(A) & \text{se } A \text{ è finito} \\ +\infty & \text{se } A \text{ è infinito} \end{cases} \qquad A \subset X,$$

ove $\mathrm{card}(A)$ denota la cardinalità dell' insieme A. Tale misura prende il nome di *misura del conteggio su* X e risulta limitata se e solo se l'insieme X è finito.
Scegliendo invece la funzione f definita da $f(x) = 1$ per $x = x_0$ e $f(x) = 0$ per $x \neq x_0$ ($x_0 \in X$ fissato), la misura positiva risultante si denota con δ_{x_0} e diviene

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases} \qquad A \subset X.$$

Tale misura prende il nome di *delta di Dirac in* x_0.

Infine, se $X = \mathbb{N}_+$ e la funzione f è definita da $f(n) = 1/2^n$ per ogni $n \geq 1$, la misura positiva risultante è la misura p definita da

$$p(A) = \sum_{n\in A} 1/2^n, \qquad A \subset \mathbb{N}_+.$$

che risulta essere una misura di probabilità su $\mathcal{P}(\mathbb{N}_+)$.

(b) Siano X un insieme non numerabile e $\mathcal{S}$ la σ − algebra degli insiemi numerabili o con complementare numerabile (Esempio 1.9 − (a)). La funzione d'insiemi

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ è numerabile} \\ 1 & \text{se } A^c \text{ è numerabile} \end{cases}$$

è una misura positiva numerabilmente additiva e finita su $\mathcal{S}$. □

Oltre alle proprietà già elencate in Proposizione 1.18, riassumiamo nella proposizione seguente le principali proprietà delle misure positive numerabilmente additive su σ − anelli di insiemi. Lo stesso risultato vale in particolare per una misura positiva $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ su una σ − algebra di insiemi $\mathcal{S}$ di X.

Proposizione 1.22. *Siano $\mathcal{R}$ un σ − anello di insiemi di X e $\mu\colon \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ una misura positiva numerabilmente additiva su $\mathcal{R}$. Allora, per ogni famiglia numerabile di insiemi $E_n \in \mathcal{R}$ $(n \geq 1)$ si ha*

(a) $\mu\left(\bigcup_n E_n\right) \leq \sum_n \mu(E_n)$;

(b) $E_n \subset E_{n+1} \implies \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_n E_n\right)$;

(c) $E_{n+1} \subset E_n$ *e* $\mu(E_1) < +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_n E_n\right)$.

La proprietà della misura μ espressa da (a) prende il nome di *numerabile subadditività* e alle proprietà (b) ed (c) si fa riferimento come alle proprietà di *continuità* della misura lungo le successioni crescenti e decrescenti di insiemi rispettivamente.

Dimostrazione. (a) Poniamo $F_1 = E_1$ e $F_n = E_n \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1})$ per $n \geq 2$. Gli insiemi F_n appartengono allora a $\mathcal{R}$, sono disgiunti e tali che $F_n \subset E_n$ per ogni n e $\bigcup_n E_n = \bigcup_n F_n$. Quindi,

$$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \mu\left(\bigcup_n F_n\right) = \sum_n \mu(F_n) \leq \sum_n \mu(E_n).$$

(b) Poniamo $F_1 = E_1$ e $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$ per $n \geq 2$. Come prima, gli insiemi F_n appartengono a $\mathcal{S}$, sono disgiunti e tali che $E_n = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ per ogni n cosicché si ha ancora $\bigcup_n E_n = \bigcup_n F_n$. Risulta quindi

$$\mu(E_n) = \sum_{1\leq m\leq n} F_m \to \mu\left(\bigcup_n F_n\right) = \mu\left(\bigcup_n E_n\right)$$

per $n \to +\infty$ e questo prova (b).

(c) Posto $F_n = E_1 \setminus E_n$ per ogni n, da (b) si ricava

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(F_n) = \mu(F) \qquad \text{con} \qquad F = \bigcup_n F_n.$$

Ma si ha $\mu(E_1) = \mu(E_n) + \mu(F_n)$ e $\mu(F_n) < +\infty$ per ogni n cosicché risulta anche

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = \mu(E_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(F_n) = \mu(E_1) - \mu(F).$$

Infine, da

$$\mu(E_1) = \mu\left(\bigcap_n E_n\right) + \mu(F)$$

e $\mu(F) < +\infty$ si conclude che deve essere

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_n E_n\right)$$

e quasto conclude la dimostrazione. □

La proprietà (c) della proposizione precedente è falsa se si omette l'ipotesi che gli insiemi E_n abbiano misura finita come prova l'esempio seguente.

Esempio 1.23. Sia # la misura del conteggio definita su $\mathbb{N}_+$ (Esempio 1.21 − (a)). Ponendo $E_n = \{m : m \geq n\}$ per $n \geq 1$, si ha evidentemente $\#(E_n) = +\infty$ per ogni n e

$$\#\left(\bigcap_n E_n\right) = \#(\varnothing) = 0$$

cosicché # non è continua lungo la successione decrescente di insiemi $\{E_n\}_n$. □

Nel caso di due misure positive definite sulla medesima σ − algebra è naturale chiedersi quale sia la minima classe di insiemi della σ − algebra su cui le due misure positive devono coincidere affinché siano la medesima misura. A questo problema di identificazione risponde il risultato seguente nel caso di misure positive finite.

Teorema 1.24. *Siano $\mathcal{S}$ una σ − algebra di insiemi di X e $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ una collezione di insiemi di X tale che*

- *$\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{S}$ e $X \in \mathcal{P}$;*
- *$E, F \in \mathcal{P} \implies E \cap F \in \mathcal{P}$;*

e siano $\mu_i : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ $(i = 1, 2)$ due misure positive finite tali che

$$\mu_1(P) = \mu_2(P), \qquad P \in \mathcal{P}.$$

Allora, $\mu_1 = \mu_2$ su $\mathcal{S}$.

Dimostrazione. La collezione

$$\mathcal{D} = \big\{E \in \mathcal{S} : \mu_1(E) = \mu_2(E)\big\}$$

degli insiemi $\mathcal{S}$ − misurabili su cui μ_1 e μ_2 coincidono è una classe di Dynkin che contiene $\mathcal{P}$. Risulta allora $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}$ (Corollario 1.15) e da $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} = \sigma(\mathcal{P})$ segue la tesi. □

Concludiamo questa parte introducendo ulteriori proprietà delle misure positive.
Una misura positiva $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ su una σ − algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X si dice

- *semifinita* se per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ con $\mu(E) = +\infty$ esiste $F \in \mathcal{S}$ con $F \subset E$ e $0 < \mu(F) < +\infty$;
- *σ − finita* se esiste una famiglia di insiemi $X_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ tali che risulti $\mu(X_n) < +\infty$ per ogni n e

$$X = \bigcup_n X_n$$

Se μ è una misura positiva σ − finita si può sempre assumere che gli insiemi di misura finita X_n siano tali che risulti $X_n \subset X_{n+1}$ per ogni n oppure $X_m \cap X_n = \varnothing$ per $m \neq n$.
Ogni misura positiva σ − finita è semifinita mentre esistono misure positive semifinite che non sono σ − finite come si vede considerando la misura del conteggio (Esempio 1.21 − (a)) con X non numerabile.
Come vedremo, le misure positive σ − finite presentano un comportamento relativamente simile al comportamento delle misure positive limitate mentre le misure

positive che non sono tali e ancora di più le misure positive che non sono semifinite tendono ad esibire comportamenti patologici.

Esempio 1.25. Siano X un insieme astratto (non vuoto) e $f\colon X \to [0,+\infty]$ una funzione non negativa. La misura positiva

$$\mu(A) = \sum_{x\in A} f(x), \qquad A \subset X,$$

(Esercizio 1.21−(a)) è semifinita se e solo se risulta $f(x) < +\infty$ per ogni x ed è $\sigma-$finita se e solo se risulta $f(x) < +\infty$ per ogni x e l'insieme $\{f > 0\}$ è al più numerabile. □

Come è facile immaginare, nel caso di uno spazio topologico, le misure definite su una $\sigma-$algebra contenente tutti gli insiemi topologicamente significativi svolgono un ruolo importante e per questo ad esse è riservata una terminologia specifica.

Definizione 1.26. Siano $(X\,,\mathcal{T})$ uno spazio topologico e $\mathcal{S}$ una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X tale che

$$\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{S}.$$

Una misura positiva $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ su $\mathcal{S}$ si dice *misura positiva di Borel in* X. □

Introduciamo infine la terminologia collegata alla relativizzazione di misure. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X e sia $Y \in \mathcal{S}$ un insieme. Allora, le misure positive

- $\mu_Y : \mathcal{S}(Y) \to [0,+\infty]$ definita da
$$\mu_Y(E) = \mu(E), \qquad E \in \mathcal{S}(Y);$$
- $\mu \llcorner Y : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ definita da
$$\mu \llcorner Y(E) = \mu(E \cap Y), \qquad E \in \mathcal{S};$$

si dicono *restrizione di* μ *alla* $\sigma-$*algebra* $\mathcal{S}(Y)$ e *restrizione di* μ *all'insieme* Y rispettivamente. Si ha chiaramente

$$\begin{aligned} &\mu \llcorner Y(E) = \mu(E \cap Y) = \mu_Y(E), && E \in \mathcal{S},\\ &\mu \llcorner Y(E) = \mu(E) = \mu_Y(E), && E \in \mathcal{S}(Y). \end{aligned}$$

Quando l'insieme Y è $\mathcal{S}-$misurabile lo spazio con misura $(Y\,,\mathcal{S}(Y)\,,\mu_Y)$ svolge il ruolo di sottospazio dello spazio con misura $(X\,,\mathcal{S}\,,\mu)$.

Insiemi trascurabili. Gli insiemi di misura nulla sono gli insiemi piccoli nel senso della misura e, come vedremo, svolgono un ruolo importante nello sviluppo della teoria della misura e dell'integrazione. Introduciamo in questa parte la relativa terminologia.

Definizione 1.27. Siano $\mathcal{S}$ una $\sigma-$algebra di insiemi di X e $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su $\mathcal{S}$. Un insieme $T \in \mathcal{S}$ tale che $\mu(T) = 0$ si dice $\mu-$*trascurabile*. □

Nel seguito parleremo brevemente di insiemi trascurabili in tutti i casi in cui non sia necessario evidenziare la misura di riferimento.
Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X. La collezione degli insiemi $\mu-$trascurabili di X si denota con

$$\mathcal{N}(\mu) = \big\{T \in \mathcal{S} : \ \mu(T) = 0\big\}\,.$$

Essa costituisce un ideale dell'anello algebrico $\mathcal{S}$ avente la proprietà di essere stabile per unione numerabile:

$$T_n \in \mathcal{N}(\mu) \ (n \ge 1) \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcup_n T_n \in \mathcal{N}(\mu)$$

ed a tale proprietà si fa riferimento dicendo che $\mathcal{N}(\mu)$ è un $\sigma-$ideale di $\mathcal{S}$. Inoltre, la misura positiva μ si dice *completa* se risulta

$$E \subset T \text{ e } T \in \mathcal{N}(\mu) \qquad \Longrightarrow \qquad E \in \mathcal{N}(\mu),$$

cioè se ogni insieme contenuto in un insieme $\mu-$trascurabile è a sua volta $\mu-$trascurabile. Vedremo nel capitolo successivo i motivi che rendono meritevoli di particolare attenzione le misure positie complete. Per ora, ci limitiamo a mostrare che ogni misura positiva è completabile nel senso seguente.

Proposizione 1.28. *Siano $\mathcal{S}$ una $\sigma-$algebra di insiemi di X e $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su $\mathcal{S}$ e siano*

$$\mathcal{S}^* = \big\{A \subset \mathcal{S} : \text{ esistono } E, F \in \mathcal{S} \text{ tali che } E \subset A \subset F \text{ e } F \setminus E \in \mathcal{N}(\mu)\big\}$$

e $\mu^*\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ definita da

$$\mu^*(A) = \mu(E), \qquad A \in \mathcal{S}^*,$$

ove E è associato ad $A \in \mathcal{S}^*$ come nella definizione di $\mathcal{S}^*$. Allora,

(a) *$\mathcal{S}^*$ è una $\sigma-$algebra e $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}^*$;*
(b) *μ^* è una misura completa e $\mu^* = \mu$ su $\mathcal{S}$.*

Dimostrazione. (a) È chiaro che $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}^*$ cosicché $X \in \mathcal{S}^*$. Sia quindi $A \in \mathcal{S}^*$ e siano E, $F \in \mathcal{S}$ con $E \subset A \subset F$ tali che $\mu(F \setminus E) = 0$. Allora, $F^c \subset A^c \subset E^c$ e $E^c \setminus F^c = F \setminus E$ cosicché $A^c \in \mathcal{S}^*$. Infine, se $\{A_n\}_n \subset \mathcal{S}^*$ ed E_n, $F_n \in \mathcal{S}$ sono tali che $E_n \subset A_n \subset F_n$ e $\mu(F_n \setminus E_n) = 0$ per ogni n, posto

$$A = \bigcup_n A_n, \qquad E = \bigcup_n E_n, \qquad F = \bigcup_n F_n,$$

si ha $E, F \in \mathcal{S}$, $E \subset A \subset F$ e $\mu(F \setminus E) = 0$ per la numerabile subadditività di μ.
(b) Occorre preliminarmente provare che μ^* sia ben definita. Siano dunque $A \in \mathcal{S}^*$ ed $E_i, F_i \in \mathcal{S}$ $(i = 1, 2)$ due coppie di insiemi associati ad A come nella definizione di $\mathcal{S}^*$. Da $E_2 \setminus E_1 \subset F_1 \setminus E_1$ e da $E_1 \setminus E_2 \subset F_2 \setminus E_2$ segue $\mu(E_1) = \mu(E_2)$. Il resto della tesi è ovvio. □

Agli insiemi trascurabili è associata una terminologia assai conveniente che illustriamo di seguito.
Sia X un insieme astratto (non vuoto) e sia μ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X. Siano inoltre A un sottoinsieme di X e P una proprietà predicabile dei punti di A ovvero una funzione $P\colon A \to \{0,1\}$ tale che P è vera per x se e solo se $P(x) = 1$ o equivalentemente P è falsa per x se e solo se $P(x) = 0$. Diremo che P è vera *$\mu-$quasi ovunque in* A o equivalentemente per $\mu-$quasi ogni $x \in A$ o ancora più brevemente per $\mu-$q.o. $x \in A$ se l'insieme degli $x \in A$ per cui essa non vale è contenuto in un insieme $\mu-$trascurabile.
Vediamo alcuni esempi comuni di utilizzo di questa locuzione nel caso di funzioni a valori complessi[2]. Sia A un sottoinsieme di X e siano $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ due funzioni assegnate. Diciamo allora che

- $f = 0$ *$\mu-$quasi ovunque in* A se esiste un insieme $\mu-$trascurabile T tale che sia
$$f(x) = 0, \qquad x \in A \setminus T,$$
e in tal caso scriviamo $f(x) = 0$ per $\mu-$q.o. $x \in A$;

[2] Gli stessi esempi si possono replicare nel caso di funzioni a valori in spazi topologici o metrici o a valori in un insieme arbitrario purché ciò abbia senso.

- $f = g$ *μ – quasi ovunque in* A se esiste un insieme μ – trascurabile T tale che sia

$$f(x) = g(x), \qquad x \in A \setminus T,$$

e in tal caso scriviamo $f(x) = g(x)$ per μ – q.o. $x \in A$;

- f *è limitata μ – quasi ovunque in* A o *essenzialmente μ – limitata in* A se esistono $M \geq 0$ e un insieme μ – trascurabile T tali che risulti[3]

$$|f(x)| \leq M, \qquad x \in A \setminus T,$$

e in tal caso scriviamo $|f(x)| \leq M$ per μ – q.o. $x \in A$.

Anche per tutte queste locuzioni scriveremo brevemente quasi ovunque al posto di μ – quasi ovunque o essenzialmente limitata al posto di essenzialmente μ – limitata e abbrevieremo μ – q.o. in q.o. in tutti i casi in cui non sia necessario specificare la misura μ cui si fa riferimento.
Anche per le successioni di funzioni ci sono analoghi esempi di terminologia dello stesso tipo. Sia ad esempio A un sottoinsieme di X e sia $f_n \colon A \to \mathbb{C}$ $(n \geq 1)$ una successione di funzioni. La successione $\{f_n\}_n$ si dice allora

- *puntualmente limitata μ – quasi ovunque su* A o se esiste un insieme μ – trascurabile T tale che risulti

$$\sup_n |f_n(x)| < +\infty, \qquad x \in A \setminus T;$$

- *uniformemente limitata μ – quasi ovunque su* A o *uniformemente essenzialmente μ – limitata su* A se esistono $M \geq 0$ e un insieme μ – trascurabile T tali che risulti

$$\sup_n |f_n(x)| \leq M, \qquad x \in A \setminus T.$$

Anche in questi casi scriveremo brevemente

$$\sup_n |f_n(x)| < +\infty \qquad \text{per } \mu\text{– q.o. } x \in A$$

e

$$\sup_n |f_n(x)| \leq M \qquad \text{per } \mu\text{– q.o. } x \in A$$

senza esplicitare l'insieme μ – trascurabile T e come al solito ometteremo il riferimento alla misura μ quando evidente dal contesto.

Atomi e misure continue. Esaminiamo in questa parte la struttura del codominio di una misura positiva. Consideriamo a tal fine una σ – algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di un insieme astratto (non vuoto) X che supponiamo fissati in tutta questa parte.

DEFINIZIONE 1.29. Sia $\mu \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva. Un insieme $A \in \mathcal{S}$ con $\mu(A) > 0$ tale che

$$E \in \mathcal{S} \text{ e } E \subset A \qquad \Longrightarrow \qquad \min\big\{\mu(E), \mu(A \setminus E)\big\} = 0$$

si dice *atomo di μ* o *μ – atomo*. □

Denotiamo con

$$A(\mu) = \big\{A \in \mathcal{S} : \ A \ \mu\text{– atomo}\big\}$$

l'insieme dei μ – atomi e conveniamo per brevità di parlare di atomi ogniqualvolta il riferimento alla misura sia chiaro dal contesto.

[3] A rigore, la proprietà di essere limitato non è una proprietà predicabile dei numeri complessi ma piuttosto degli insiemi di numeri complessi. La proprietà cui facciamo riferimento qui è la proprietà P predicabile dei numeri complessi consistente nell'avere modulo minore o uguale a un numero $M \geq 0$ prefissato.

Esempio 1.30. Sia X un insieme astratto (non vuoto).
(a) Sia $f\colon X \to [0,+\infty]$ una funzione e sia $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ la misura positiva definita da

$$\mu(A) = \sum_{x\in A} f(x), \qquad A \subset X,$$

(Esempio 1.21 − (a)). Ogni punto $x \in X$ tale che $f(x) > 0$ è un $\mu-$atomo.
(b) Sia X non numerabile e siano $\mathcal{S}$ la $\sigma-$algebra degli insiemi numerabili o conumerabili (Esempio 1.9 − (a)) e $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ la misura positiva definita da Esempio 1.21 − (b). Ogni insieme $A \subset X$ non numerabile è un $\mu-$atomo. □

Una misura positiva $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ si dice

- *continua* se è semifinita e per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ con $0 < \mu(E) < +\infty$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono insiemi $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{S}$ tali che
  - $E_{m_1} \cap E_{m_2} = \varnothing$ per $m_1 \neq m_2$;
  - $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$;
  - $\mu(E_m) \leq \varepsilon$ per ogni m;
- (*puramente*) *atomica* se esistono $\mu-$atomi $\{A_i\}_{i\in I} \subset A(\mu)$ tali che
  - $A_i \cap A_j = \varnothing$ per $i \neq j$;
  - $\mu(E) = \sum_{i\in I} \mu(E \cap A_i)$ per ogni $E \in \mathcal{S}$.

Il risultato seguente è alla base dell'esame delle relazioni che sussistono tra esistenza di atomi e continuità di una misura.

Teorema 1.31. *Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva con $\mu(X) < +\infty$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono insiemi $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{S}$ tali che*

(a) *$E_1 \cup \dots \cup E_n = X$ e $E_{m_1} \cap E_{m_2} = \varnothing$ per $m_1 \neq m_2$;*
(b) *per ogni m risulta $\mu(E_m) \leq \varepsilon$ o $E_m \in A(\mu)$ con $\mu(E_m) > \varepsilon$.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Denotato con

$$A_\varepsilon(\mu) = \left\{A \in \mathcal{S} : \ A \ \mu-\text{atomo con } \mu(A) > \varepsilon\right\},$$

l'insieme (eventualmente vuoto) dei $\mu-$atomi di misura maggiore di ε, consideriamo una famiglia massimale $A_1, \dots, A_j \in A_\varepsilon(\mu)$ di $\mu-$atomi disgiunti tali che $\mu(A_i) > \varepsilon$ per ogni i e, posto $E = X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_j) \in \mathcal{S}$, supponiamo che risulti $\mu(E) > \varepsilon$ altrimenti non resta altro da provare. In particolare, E non contiene $\mu-$atomi A con misura $\mu(A) > \varepsilon$. Proviamo quindi che l'insieme E ha la seguente proprietà:

$$(**) \quad F \in \mathcal{S} \text{ con } F \subset E \text{ e } \mu(F) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, G \in \mathcal{S} \text{ con } G \subset F \text{ e } 0 < \mu(G) \leq \varepsilon.$$

Se $F \in \mathcal{S}$ fosse un insieme con $F \subset E$ e $\mu(F) > 0$ per il quale non valesse $(**)$, per ogni insieme $G \in \mathcal{S}$ con $G \subset F$ si avrebbe $\mu(G) = 0$ oppure $\mu(G) > \varepsilon$. In particolare, si avrebbe $\mu(F) > \varepsilon$ e quindi, non potendo F essere un $\mu-$atomo, esisterebbe $G_1 \in \mathcal{S}$ con $0 < \mu(G_1) < \mu(F)$. Non valendo $(**)$ per F, si avrebbe $\mu(G_1) > \varepsilon$ e $\mu(F \setminus G_1) > \varepsilon$ e come prima si avrebbe $\mu(G) = 0$ oppure $\mu(G) > \varepsilon$ per ogni insieme $G \in \mathcal{S}$ con $G \subset F \setminus G_1$. Poiché neppure $F \setminus G_1$ potrebbe essere un $\mu-$atomo, esisterebbe $G_2 \in \mathcal{S}$ per il quale si avrebbe $G_2 \subset F \setminus G_1$ e $0 < \mu(G_2) < \mu(F \setminus G_1)$ da cui seguirebbe $\mu(G_2) > \varepsilon$ poiché $(**)$ non vale per F. Iterando questo argomento si determinerebbe una successione $G_k \in \mathcal{S}$ $(k \geq 1)$ di insiemi disgiunti con $\mu(G_k) > \varepsilon$. Essendo $\mu(X) < +\infty$, ciò è assurdo e questo prova $(**)$.
Ad ogni insieme $F \in \mathcal{S}$ con $F \subset E$ associamo il numero

$$m(F) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu(F) = 0 \\ \sup\left\{\mu(G) : \ G \in \mathcal{S},\, G \subset F \text{ e } 0 < \mu(G) \leq \varepsilon\right\} & \text{se } \mu(F) > 0 \end{cases}$$

che risulta ben definito per ogni insieme $F \in \mathcal{S}$ con $F \subset E$ per $(**)$ e tale che risulti $0 < \mu(F) \leq \varepsilon$ se $\mu(F > 0$. Poiché si ha $\mu(E) > \varepsilon$ per ipotesi, esiste $F_1 \in \mathcal{S}$ con $F_1 \subset E$ tale che risulti

$$\frac{1}{2}m(E) \leq \mu(F_1) \leq m(E) \leq \varepsilon.$$

Risulta allora $\mu(E \setminus F_1) > 0$ e dunque esiste $F_2 \in \mathcal{S}$ con $F_2 \subset E \setminus F_1$ tale che risulti

$$\frac{1}{2}m(E \setminus F_1) \leq \mu(F_2) \leq m(E \setminus F_1) \leq \varepsilon.$$

Se risulta ancora $\mu(E \setminus (F_1 \cup F_2)) > 0$, si può procedere determinando $F_3 \in \mathcal{S}$ con $F_3 \subset E \setminus (F_1 \cup F_2)$ tale che risulti

$$\frac{1}{2}m\big(E \setminus (F_1 \cup F_2)\big) \leq \mu(F_2) \leq m\big(E \setminus (F_1 \cup F_2)\big) \leq \varepsilon.$$

Questo procedimento iterativo si arresta dopo un numero finito $k \geq 2$ di passi poichè risulta $\mu(E \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_k)) = 0$ e in tal caso, posto $T = E \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_k) \in \mathcal{S}$, gli insiemi $\big\{A_1, \ldots, A_j, F_1, \ldots, F_k, T\big\}$ costituiscono la partizione $\mathcal{S}-$misurabile di X cercata. Altrimenti si determina una successione $F_k \in \mathcal{S}$ $(k \geq 1)$ di insiemi disgiunti tali che, posto $F_0 = \varnothing$, risulti

$$\frac{1}{2}m\big(E \setminus (F_0 \cup F_{k-1})\big) \leq \mu(F_k) \leq \varepsilon, \qquad k \geq 1.$$

Essendo gli insiemi F_k disgiunti, deve essere $\mu(F_k) \to 0$ per $k \to +\infty$ e quindi, posto $T = E \setminus (\bigcup_k F_k) \in \mathcal{S}$, risulta

$$0 \leq m(T) \leq m\big(E \setminus (F_0 \cup F_{k-1})\big) \leq 2\mu(F_k) \to 0$$

per $k \to +\infty$ da cui segue che T è $\mu-$trascurabile. Scelto infine $k_0 = k_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che risulti

$$F_\infty = \bigcup_{k \geq k_0+1} F_k \qquad \text{e} \qquad \sum_{k \geq k_0+1} \mu(F_k) \leq \varepsilon,$$

gli insiemi $\{A_1, \ldots, A_j, F_1, \ldots, F_k, F_\infty, T\}$ costituiscono la partizione $\mathcal{S}-$misurabile di X cercata. □

PROPOSIZIONE 1.32. *Sia* $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ *una misura positiva semifinta. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) μ *è continua;*
(b) μ *è priva di atomi.*

DIMOSTRAZIONE. (a) Poiché μ è semifinita, μ non può avere atomi di misura infinita e neppure può averne di misura finita se continua.
(b) La misura positiva μ è semifinita per ipotesi e, dato un insieme $E \in \mathcal{S}$ con $0 < \mu(E) < +\infty$, consideriamo la restrizione $\mu_E\colon \mathcal{S}(E) \to [0, +\infty]$ alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}(E)$ formata dagli insiemi $\mathcal{S}-$misurabili contenuti in E che è una misura positiva finita. Essendo μ prima di atomi, anche μ_E è tale e quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $E_1, , \ldots, E_n \in \mathcal{S}$ di E tale che $\mu(E_m) \leq \varepsilon$ per ogni m (Teorema 1.31). □

Proviamo ora che le misure positive $\sigma-$finite e continue si identificano con le misure la cui immagine è un intervallo.

TEOREMA 1.33. *Sia* $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ *una misura positiva* σ *–finita e continua. Allora,*

$$\mu(\mathcal{S}) = [0, \mu(X)].$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo dapprima che sia $\mu(X) < +\infty$ e consideriamo l'insieme delle funzioni $s\colon \operatorname{dom}(s) \to \mathcal{P}(X)$ con le seguenti proprietà:

- $\operatorname{dom}(s) \subset [0, \mu(X)]$ e $s(t) \in \mathcal{S}$ per ogni $t \in \operatorname{dom}(s)$;

- $t_1, t_s \in \mathrm{dom}(s)$ e $t_1 \leq t_2 \qquad \Longrightarrow \qquad s(t_1) \subset s(t_2)$;
- $\mu(s(t)) = t$ per ogni $t \in \mathrm{dom}(s)$;

munito dell'ordinamento definito per due funzioni $s_i\colon \mathrm{dom}(s_i) \to \mathcal{P}(X)$ $(i = 1, 2)$ di S ponendo $s_1 \leq s_2$ quando risulta $\mathrm{dom}(s_1) \subset \mathrm{dom}(s_2)$ e $s_1(t) = s_2(t)$ per ogni $t \in \mathrm{dom}(s_1)$. Per il teorema di massimalità di Hausdorff (Teorema I–1.5) esiste un sottoinsieme totalmente ordinato e massimale S_m di S e la funzione $s_m\colon \mathrm{dom}(s_m) \to \mathcal{P}(X)$ definita ponendo

$$\mathrm{dom}(s_m) = \bigcup \big\{\mathrm{dom}(s) :\ s \in S_m\big\}$$

e $s_m(t) = s(t)$ se $t \in \mathrm{dom}(s)$ con $s \in S_m$ risulta essere evidentemente un elemento massimale di S. Proviamo che risulta $\mathrm{dom}(s_m) = [0, \mu(X)]$.
Consideriamo a tal fine $0 < t_0 < \mu(X)$ e, posto

$$t^- = \sup\big\{t :\ t \in \mathrm{dom}(s_m) \text{ e } t < t_0\big\} \leq t_0 \leq \inf\big\{t :\ t \in \mathrm{dom}(s_m) \text{ e } t > t_0\big\} = t^+,$$

proviamo che risulta $t^\pm \in \mathrm{dom}(s_m)$. Per definizione esistono infatti due successioni $t_n^\pm \in \mathrm{dom}(s_m)$ $(n \geq 1)$ tali che $t_n^- \leq t_{n+1}^-$ e $t_n^+ \geq t_{n+1}^+$ per ogni n e, posto $S^- = \bigcup_n s_m(t_n^-)$ e $S^+ = \bigcap_n s_m(t_n^+)$, si ha $S^\pm \in \mathcal{S}$ con $S^- \subset S^+$ e

$$\mu(S^\pm) = \lim_{n\to+\infty} \mu\big(s_m(t_n^\pm)\big) = \lim_{n\to+\infty} t_n^\pm = t^\pm.$$

Se fosse $t^- < t^+$, si avrebbe $\mu(S^+ \setminus S^-) = t^+ - t^- > 0$ cosicché, essendo μ priva di atomi (Proposizione 1.32), esisterebbe un insieme $E \in \mathcal{S}$ tale che $E \subset S^+ \setminus S^-$ con misura $0 < \mu(E) < \mu(S^+ \setminus S^-)$. Allora la funzione $s\colon \mathrm{dom}(s_m) \cup \{\mu(E)\} \to \mathcal{P}(X)$ definita da $s(t) = s_m(t)$ per $t \in \mathrm{dom}(s_m)$ e $s(\mu(E)) = E$ violerebbe la massimalità di s_m. Deve quindi essere $t^\pm = t_0$ e questo completa la dimsotrazione quando μ è finita.
Supponiamo quindi che μ sia $\sigma-$finita con $\mu(X) = +\infty$ e consideriamo una successione di insiemi $X_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ tali che $X_n \subset X_{n+1}$ e $\mu(X_n) < +\infty$ per ogni n e $X = \bigcup_n X_n$. La restrizione μ_n di μ alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}(X_n)$ formata dagli insiemi $\mathcal{S}-$miurabili contenuti in X_n è una misura positiva finita e priva di atomi cosicché risulta $\mu(\mathcal{S}_n) = [0, \mu(X_n)]$ per quanto provato prima. Da questo segue

$$[0, +\infty) = \bigcup_n \mu(\mathcal{S}_n) \subset \mu(\mathcal{S})$$

e infine da $\mu(X) = [0, +\infty]$ segue la tesi. □

La nozione di atomo che abbiamo introdotto non individua univocamente gli atomi di una misura μ poiché due $\mu-$atomi A e B tali che $\mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A) = 0$ sono essenzialmente lo stesso $\mu-$atomo. Tuttavia non è in genere possibile individuare un atomo minimo rispetto all'inclusione (Esempio 1.30−(b)). Al fine di definire univocamente gli atomi, consideriamo una misura positiva $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ e, dati due $\mu-$atomi $A, B \in A(\mu)$, poniamo

$$A \simeq B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu(A \triangle B) = 0.$$

In tal caso i $\mu-$atomi A e B si dicono *equivalenti* e la relazione così definita risulta essere una relazione d'equivalenza nell'insieme dei $\mu-$atomi $A(\mu)$.
È chiaro che due $\mu-$atomi $A, B \in A(\mu)$ non sono equivalenti (in simboli $\not\simeq$) se e solo se risulta

$$A \not\simeq B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu(A \cap B) = 0$$

nel qual caso $A \setminus B$ e $B \setminus A$ sono $\mu-$atomi disgiunti equivalenti ad A e B rispettivamente. Consideriamo ora l'insieme quoziente

$$A(\mu)/\simeq$$

e proviamo che nel caso di una misura positiva $\sigma-$finita l'insieme quoziente $A(\mu)/\simeq$ è al più numerabile.

Teorema 1.34. *Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva σ –finita. Allora, esiste una famiglia al più numerabile $A_n \in A(\mu)$ $(n \geq 1)$ di μ –atomi tali che*

(a) $A_m \cap A_n = \varnothing$ *per* $m \neq n$*;*
(b) *per ogni* $A \in A(\mu)$ *esiste uno ed un solo* $n \geq 1$ *tale che* $A \simeq A_n$*.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che sia $\mu(X) < +\infty$ e, senza perdità di generalità, supponiamo anche che sia $\mu(X) = 1$. Per Teorema 1.31 esistono due famiglie finite $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{E}_1$ costituenti una partizione $\mathcal{S}-$misurabile di X tali che

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A}_1 \qquad &\Longrightarrow \qquad A \in A(\mu) \text{ e } 1/2 < \mu(A) \leq 1; \\ E \in \mathcal{E}_1 \qquad &\Longrightarrow \qquad \mu(E) \leq 1/2. \end{aligned}$$

Se $A' \in A(\mu)$, risulta $A' \simeq A$ per qualche $A \in \mathcal{A}_1$ oppure risulta $\mu(A' \cap A) = 0$ per ogni $A \in \mathcal{A}_1$ da cui segue che deve essere $\mu(A') \leq 1/2$. Posto $X_1 = \bigcup\{E : E \in \mathcal{E}_1\}$, consideriamo la restrizione di μ alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}(X_1)$ degli insiemi $\mathcal{S}-$misurabili contenuti in X_1. Come prima esistono due famiglie finite $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{E}_2$ costituenti una partizione $\mathcal{S}-$misurabile di X_1 tali che

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A}_2 \qquad &\Longrightarrow \qquad A \in A(\mu) \text{ e } 1/4 < \mu(A) \leq 1/2; \\ E \in \mathcal{E}_2 \qquad &\Longrightarrow \qquad \mu(E) \leq 1/4. \end{aligned}$$

Anche in questo caso per $A' \in A(\mu)$, risulta $A' \simeq A$ per qualche $A \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ oppure risulta $\mu(A' \cap A) = 0$ per ogni $A \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ da cui si ricava $\mu(A') \leq 1/4$.
Iterando questo argomento si determinano $\mathcal{A}_k$ $(k \geq 1)$ famiglie finite di $\mu-$atomi disgiunti tali che

$$1/2^k < \mu(A) \leq 1/2^{k-1}, \qquad A \in \mathcal{A}_k,$$

e per costruzione, se A' è un $\mu-$atomo, deve essere $A' \simeq A$ per uno ed un solo $\mu-$atomo $A \in \mathcal{A}_k$ ove k è tale che $1/2^k < \mu(A') \leq 1/2^{k-1}$. Pertanto, ponendo $\{A_n\}_n = \bigcup_k \mathcal{A}_k$ si ottiene la tesi nel caso di misura finita.
Il caso infine in cui μ sia $\sigma-$finita con $\mu(X) = +\infty$, si ricava dal precedente localizzando la misura μ agli insiemi di una partizione numerabile $\{X_n\}_n$ di X formata da insiemi $\mathcal{S}-$misurabili con misura finita. □

Proviamo infine che ogni misura positiva e $\sigma-$finita ammette un'unica decomposizione come somma di una misura positiva continua e di una misura positiva (puramente) atomica.

Teorema 1.35. *Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva σ –finita. Allora, esistono due misure positive $\mu_a, \mu_c\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ tali che*

(a) μ_c *è continua e* μ_a *è (puramente) atomica;*
(b) $\mu = \mu_c + \mu_a$*.*

In particolare, se $\{A_n\}_n$ è la famiglia (al più) numerabile di $\mu-$atomi disgiunti associata a μ da Teorema 1.34, si ha

$$\mu_c(E) = \sum_n \mu_c(E \cap A_n), \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Dimostrazione. Siano $\{A_n\}_n$ la famiglia (al più) numerabile di $\mu-$atomi disgiunti associata a μ da Teorema 1.34, sia $A_\infty = \bigcup_n A_n \in \mathcal{S}$ la loro unione e siano $\mu_a, \mu_c\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ le misure positive definite da

$$\mu_c(E) = \sum_n \mu(E \cap A_n) \qquad \text{e} \qquad \mu_a(E) = \mu(E \setminus A_\infty)$$

per ogni $E \in \mathcal{S}$. Si ha evidentemente $\mu = \mu_c + \mu_a$ ed ogni insieme A_n risulta essere un μ_a −atomo cosicché μ_a risulta essere una misura (puramente) atomica. Proviamo che μ_c è una misura continua mostrando che è priva di atomi (Proposizione 1.32). Se un insieme $E \in \mathcal{S}$ fosse un μ_c −atomo, sarebbe $\mu_c(E) < +\infty$ poiché μ e quindi anche μ_c è σ −finita e per ogni insieme $F \in \mathcal{S}$ con $F \subset E \setminus A_\infty$ si avrebbe

$$\mu(F) = \mu(F \setminus A_\infty) = \mu_c(F) \in \{0, \mu_c(E)\} = \{0, \mu(E \setminus A_\infty)\}.$$

Quindi, $E \setminus A_\infty$ sarebbe un μ −atomo e quindi si avrebbe $(E \setminus A_\infty) \simeq A_n$ per un opportuno n (Teorema 1.34) mentre risulta $\mu((E \setminus A_\infty) \cap A_n) = 0$ per ogni n. □

1.3. Misure esterne e costruzione di misure

Gli esempi di misure positive forniti nelle sezioni precedenti non sono molto significativi e lasciano il dubbio che la teoria astratta svolta sin qui sia solo un modo complicato di parlare di serie numeriche a termini non negativi o di funzioni non negative sommabili. Per fugare questo dubbio, esaminiamo in questa sezione due metodi per la costruzione di σ −algebre e misure positive potenzialmente significative su insiemi astratti. Questi metodi troveranno applicazione concreta nella sezione successiva dove saranno introdotte le misure di Lebesgue–Stieltjes in $\mathbb{R}$ e poi nella definizione della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ (Capitolo 5) e delle misure di Hausdorff in $\mathbb{R}^N$ (Capitolo **??**). Un ulteriore fondamentale metodo di costruzione di misure positive sarà esaminato nella successiva Sezione 3.1.

Misure esterne e metodo di Carathéodory. Il metodo di Carathéodory per la costruzione di misure positive che esaminiamo in questa parte è basato sulla seguente nozione di misura esterna su un insieme astratto (non vuoto) X che supponiamo fissato in tutta questa parte.

Definizione 1.36. Sia X un insieme (non vuoto). Una funzione $\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ con le seguenti proprietà:

- $\mu^*(\varnothing) = 0$;
- $A \subset \bigcup_n A_n \quad \Longrightarrow \quad \mu^*(A) \le \sum_n \mu^*(A_n)$.

si dice *misura esterna su X*. □

Ogni misura esterna μ^* su un insieme X è in particolare numerabilmente subadditiva e quindi anche finitamente subadditiva e monotòna: per ogni coppia di insiemi $A, B \subset X$ risulta

- $\mu^*(A \cup B) \le \mu^*(A) + \mu^*(B)$;
- $A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

Inoltre, la collezione degli insiemi aventi misura esterna nulla

$$\mathcal{N}(\mu^*) = \{N \in \mathcal{P}(X) : \ \mu^*(N) = 0\}$$

è un σ −ideale di insiemi della σ −algebra $\mathcal{P}(\mathcal{X})$.
Il seguente teorema di Carathéodory mostra che ogni misura esterna esterna dà luogo per restrizione ad una misura positiva su un'opportuna σ −algebra.

Teorema 1.37 (C. Carathéodory). *Sia $\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ una misura esterna su X e sia*

$$\mathcal{S}(\mu^*) = \{E \subset X : \ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \text{ per ogni } A \subset X\}.$$

Allora,

(a) *$\mathcal{S}(\mu^*)$ è una σ −algebra di sottoinsiemi di X;*

(b) $\mu^*(E) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E \in \mathcal{S}(\mu^*)$;

(c) *la restrizione* μ *di* μ^* *a* $\mathcal{S}(\mu^*)$ *è una misura positiva completa su* $\mathcal{S}(\mu^*)$.

Gli insiemi appartenenti alla σ – algebra $\mathcal{S}(\mu^*)$ si dicono μ^* – *misurabili* e la condizione

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E), \qquad A \subset X,$$

che caratterizza gli insiemi E che sono μ^* – misurabili prende il nome di *condizione di misurabilità di Carathéodory*. Essa individua gli insiemi che, per così dire, tagliano bene ogni altro insieme rispetto alla misura esterna μ^*. Essendo μ^* finitamente subadditiva, la condizione di misurabilità di Carathéodory per un insieme E equivale a richiedere che si abbia

$$(*) \qquad \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

per ogni insieme $A \subset X$ con $0 < \mu^*(A) < +\infty$.

Dimostrazione. (a) Proviamo che $\mathcal{S}(\mu^*)$ è una σ – algebra di insiemi di X mostrando che è una classe di Dynkin stabile per intersezione finita (Teorema 1.13). Si ha evidentemente

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap X) + \mu^*(A \setminus X)$$

per ogni insieme $A \subset X$ e quindi X appartiene a $\mathcal{S}(\mu^*)$. Inoltre risulta

$$E \in \mathcal{S}(\mu^*) \qquad \Longleftrightarrow \qquad E^c \in \mathcal{S}(\mu^*)$$

per la definizione stessa di $\mathcal{S}(\mu^*)$. Quindi per $\mathcal{S}(\mu^*)$ valgono le proprietà (D1) e (D2) della definizione di classe di Dynkin e relativamente alla validità di (D3) osserviamo preliminarmente che risulta

$$E, F \in \mathcal{S}(\mu^*) \qquad \Longrightarrow \qquad E \cup F \in \mathcal{S}(\mu^*).$$

Per $A \subset X$ si ha infatti

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) = \\
&= \mu^*(A \cap E) + \mu^*\big((A \setminus E) \cap F\big) + \mu^*\big((A \setminus E) \setminus F\big) = \\
&= \mu^*(A \cap E) + \mu^*\big((A \setminus E) \cap F\big) + \mu^*\big(A \setminus (E \cup F)\big) \geq \\
&\geq \mu^*\big((A \cap E) \cup [(A \setminus E) \cap F]\big) + \mu^*\big(A \setminus (E \cup F)\big) = \\
&= \mu^*\big(A \cap (E \cup F)\big) + \mu^*\big(A \setminus (E \cup F)\big)
\end{aligned}$$

e quindi risulta $E \cup F \in \mathcal{S}(\mu^*)$ per $(*)$. Inoltre, se $E \in \mathcal{S}(\mu^*)$ e $B \subset X$ sono insiemi tali che $E \cap B = \varnothing$, si ha

$$(**) \qquad \mu^*\big(A \cap (E \cup B)\big) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap B), \qquad A \subset X,$$

poiché, essendo $E \in \mathcal{S}(\mu^*)$, risulta

$$\begin{aligned}
\mu^*\big(A \cap (E \cup B)\big) &= \mu^*\big([A \cap (E \cup B)] \cap E\big) + \mu^*\big([A \cap (E \cup B)] \setminus E\big) = \\
&= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap B)
\end{aligned}$$

per ogni insieme $A \subset X$.

Consideriamo ora una successione di insiemi $E_n \in \mathcal{S}(\mu^*)$ $(n \geq 1)$ con $E_m \cap E_n = \varnothing$ per ogni $m \neq n$. Posto per brevità $E = \bigcup_n E_n$, si ha $E_1 \cup \cdots \cup E_n \subset E$ per ogni n e iterando $(**)$ risulta

$$\mu^*(A \cap E) \geq \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup \cdots \cup E_n)\big) = \mu^*(A \cap E_1) + \cdots + \mu^*(A \cap E_n)$$

per ogni n cosicché risulta

$$\mu^*(A \cap E) \geq \sum_n \mu^*(A \cap E_n)$$

per ogni insieme $A \subset X$ e l'uguaglianza

$$(***) \qquad \mu^*(A \cap E) = \sum_n \mu^*(A \cap E_n), \qquad A \subset X,$$

segue quindi dalla numerabile subadditività di μ^*. Si ha infine

$$\mu^*(A) = \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup \cdots \cup E_n)\big) + \mu^*\big(A \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_n)\big) \geq$$

poiché $E_1 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{S}(\mu^*)$ per ogni n cosicché, iterando $(**)$ e tenendo conto che risulta $E_1 \cup \cdots \cup E_n \subset E$, si ha

$$\geq \mu^*(A \cap E_1) + \cdots + \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \setminus E)$$

per ogni n e per ogni insieme $A \subset X$. Passando al limite per $n \to +\infty$, risulta allora

$$\mu^*(A) \geq \sum_n \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \setminus E) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

per numerabile subadditività. Quindi, $E \in \mathcal{S}(\mu^*)$ e questo prova che $\mathcal{S}(\mu^*)$ è una classe di Dynkin. Infine si ha

$$E, F \in \mathcal{S}(\mu^*) \qquad \Longrightarrow \qquad E \cap F = (E^{\mathrm{c}} \cup F^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} \in \mathcal{S}(\mu^*)$$

e quindi $\mathcal{S}(\mu^*)$ è una classe di Dynkin stabile per intersezione finita e questo completa la dimostrazione di (a).

(b) È conseguenza diretta di $(*)$.

(c) Si ha $\mu^*(\varnothing) = 0$ e la numerabile additività della restrizione μ di μ^* alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}(\mu^*)$ è conseguenza di $(***)$ con $A = X$. Infine, la completezza della misura μ segue evidentemente da (b). $\square$

La dimostrazione del teorema precedente contiene un risultato che merita di essere evidenziato a parte, assieme alle sue conseguenze: la misura esterna è additiva sull'unione di due insiemi disgiunti non appena uno dei due sia misurabile.

Corollario 1.38. *Sia $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ una misura esterna su X e siano $E \in \mathcal{S}(\mu^*)$ un insieme μ^* –misurabile e $A \subset X$ un insieme. Allora,*

(a) $\mu^*(E \cup A) + \mu^*(E \cap A) = \mu^*(E) + \mu^*(A)$;

(b) *se $E \cap A = \varnothing$, risulta $\mu^*(E \cup A) = \mu^*(E) + \mu^*(A)$;*

(c) *se $\mu^*(E) < +\infty$ e $E \subset A$, risulta $\mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A) - \mu^*(E)$.*

Ciò che è rilevante in queste relazioni è che A non è necessariamente un insieme μ^*-misurabile. Inoltre, (b) non è altro che $(**)$ con $A = X$ e $B = A$.

Dimostrazione. Utilizzando come insiemi di prova nella condizione di misurabilità di Carathéodory di E gli insiemi $E \cup A$ e A si ha

$$\mu^*(E \cup A) = \mu^*(E) + \mu^*(A \setminus E) \qquad \text{e} \qquad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

e da ciò segue

$$\mu^*(E \cup A) + \mu^*(E \cap A) = \mu^*(E) + \mu^*(A \setminus E) + \mu^*(E \cap A) = \mu^*(E) + \mu^*(A).$$

Questo prova (a) e (b) è conseguenza ovvia di (a). Infine, per la condizione di misurabilità di Carathéodory per E con A come insieme di prova si ha

$$\mu^*(A) = \mu^*(E) + \mu^*(A \setminus E)$$

cosicché l'uguaglianza in (c) segue da $\mu^*(E) < +\infty$. $\square$

Corollario 1.39. *Sia $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ una misura esterna su X e $A \subset X$ un insieme con $\mu^*(A) < +\infty$. Allora,*

$$A \in \mathcal{S}(\mu^*) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, E \in \mathcal{S}(\mu^*) \text{ tale che } E \subset A \text{ e } \mu^*(E) = \mu^*(A).$$

Dimostrazione. Se è $A \in \mathcal{S}(\mu^*)$, basta scegliere $A = E$. Viceversa, dalla condizione di misurabilità di Carathéodory per E con A come insieme di prova si ricava
$$+\infty > \mu^*(A) = \mu^*(E) + \mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A) + \mu^*(A \setminus E).$$
Risulta quindi $\mu^*(A \setminus E) = 0$ e la conclusione segue dalla completezza della restrizione di μ^* a $\mathcal{S}(\mu^*)$. □

Relativamente al problema di costruire una misura positiva su una $\sigma-$algebra di insiemi di un insieme X assegnato, il teorema di Carathéodory sembra avere solo spostato il problema: come costruire una misura esterna su un insieme X? Ciò è possibile in molti modi a partire da una famiglia elementare di insiemi e da una funzione non negativa su di essi.
Una famiglia di insiemi $\mathcal{R}$ di X tale che

- $\varnothing \in \mathcal{R}$;
- per ogni $A \subset X$ esistono R_k $(k \geq 1)$ tali che $A \subset \bigcup_k R_k$;

si dice *ricoprimento elementare di X*.

Teorema 1.40. *Siano $\mathcal{R}$ un ricoprimento elementare di X e $\lambda\colon \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ una funzione tale che $\lambda(\varnothing) = 0$. Allora, la funzione $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ definita da*
$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_k \lambda(R_k) : \; A \subset \bigcup_k R_k \ \text{ e } R_k \in \mathcal{R} \right\}, \qquad A \subset X,$$
è una misura esterna su X.

Nel caso dello spazio euclideo $X = \mathbb{R}^N$ si possono costruire classi di ricoprimento sequenziali a partire da insiemi geometricamente significativi quali palle, cubi o altri insiemi convessi scegliendo come λ opportune funzioni di raggio o lato o di altre quantità geometricamente associate agli insiemi della classe di ricoprimento sequenziale scelta. La stessa cosa si può fare negli spazi metrici con insiemi qualunque e con funzioni del diametro.

Dimostrazione. Da $\varnothing \in \mathcal{R}$ e $\lambda(\varnothing) = 0$ segue $\mu^*(\varnothing) = 0$. Siano quindi A ed A_n $(n \geq 1)$ insiemi di X tali che $A \subset \bigcup_n A_n$ e proviamo che risulta
$$\mu^*(A) \leq \sum_n \mu^*(A_n).$$
Possiamo supporre che risulti $\mu^*(A_n) < +\infty$ per ogni n altrimenti non vi è nulla da provare. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni n siano $R_k^n \in \mathcal{R}$ $(k \geq 1)$ insiemi tali che risulti
$$\sum_k \lambda(R_k^n) < \mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n.$$
Si ha allora $A \subset \bigcup_{k,n} R_k^n$ e
$$\mu^*(A) \leq \sum_{k,n} \lambda(R_k^n) = \sum_n \left(\sum_k \lambda(R_k^n) \right) \leq \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$$
e dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue l'asserto. □

Come già anticipato, il metodo di Carathéodory per la costruzione di una misura positiva che abbiamo qui descritto sarà utilizzato nel successivo Capitolo 5 per costruire la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$.

Misure esterne metriche. Nel caso in cui l'insieme X sia uno spazio topologico è naturale chiedersi sotto quali condizioni sulla misura esterna $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ il metodo di Carathéodory fornisca una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}(\mu^*)$ di insiemi μ^*-misurabili

contenente tutti gli insiemi di Borel di X. Per estensione, una misura esterna $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ siffatta si dice *misura esterna di Borel in* X.
Nel caso particolare in cui X sia uno spazio metrizzabile con metrica d, una classe di misure esterne con questa proprietà è costituita dalle misure esterne $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ che sono additive sugli insiemi ben separati:

$$A\,,B \subset X \text{ e } d(A\,,B) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Le misure esterne siffatte si dicono *misure esterne metriche.*

TEOREMA 1.41. *Siano* $(X\,,d)$ *uno spazio metrico e* $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ *una misura esterna metrica in* X. *Allora,*

$$\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{S}(\mu^*).$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo preliminarmente che, per ogni coppia di insiemi A e F di X tali che

- $\mu^*(A) < +\infty$;
- F chiuso e $A \cap F = \varnothing$;

posto $A_n = \{x \in A:\ d(x\,,F) \geq 1/n\}$ $(n \geq 1)$, risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(A).$$

Si ha infatti $A_n \subset A_{n+1}$ per ogni n e $A = \bigcup_n A_n$ poiché F è chiuso e $A \cap F = \varnothing$ cosicché, per la monotonia di $\{A_n\}_n$, basta provare che risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \mu^*(A_{2n}) = \mu^*(A).$$

Posto $B_n = A_{n+1} \setminus A_n$ per $n \geq 1$, risulta $d(B_m\,,B_n) > 0$ per $|n-m| \geq 2$ cosicché si ha

$$\mu^*(B_m \cup B_n) = \mu^*(B_m) + \mu^*(B_n)$$

per ogni m e n siffatti. Per $n \geq 2$ si ha allora

$$A_{2n} \supset \bigcup_{1\leq m\leq n-1} B_{2m} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu^*(A) \geq \sum_{1\leq m\leq n-1} \mu^*(B_{2m})$$
$$A_{2n} \supset \bigcup_{1\leq m\leq n} B_{2m-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu^*(A) \geq \sum_{1\leq m\leq n} \mu^*(B_{2m-1})$$

e quindi la serie di termine generale $\mu^*(B_n)$ converge. Si ha inoltre

$$A = A_{2n} \cup \left(\bigcup_{m\geq 2n} B_m\right)$$

per ogni n da cui segue

$$0 \leq \mu^*(A) - \mu^*(A_{2n}) \leq \sum_{m\geq 2n} \mu^*(B_m) \to 0$$

per $n \to +\infty$ e questo prova l'asserto.
Utilizziamo quanto dimostrato sopra per provare che ogni insieme chiuso F di X è μ^*-misurabile. A tale scopo basta provare che per F chiuso risulta

$$A \subset X \text{ e } \mu^*(A) < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \setminus F).$$

Associamo allora ad $A \setminus F$ gli insiemi

$$A_n = \left\{x \in A \setminus F:\ d(x\,,F) \geq 1/n\right\}, \qquad n \geq 1,$$

cosicché risulta $d(A_n\,,A \cap F) \geq d(A_n\,,F) \geq 1/n$ per ogni n da cui segue

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\left((A \cap F) \cup A_n\right) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A_n)$$

per ogni n. Da $(A \setminus F) \cap F = \varnothing$ segue allora $\mu^*(A_n) \to \mu^*(A \setminus F)$ per $n \to +\infty$ per quanto provato sopra e passando al limite per $n \to +\infty$ nella disuguaglianza precedente si prova l'asserto. $\square$

Esaminiamo ora una variante del metodo di Carathéodory descritto nel paragrafo precedente che consente di costruire misuure esterne metriche. Utilizzeremo questo metodo nel successivo Capitolo **??** per costruire le misure di Hausdorff in $\mathbb{R}^N$.
Sia $(X\,,d)$ uno spazio metrico. Un ricoprimento elementare $\mathcal{R}$ di X tale che per ogni $\delta > 0$ la collezione di insiemi

$$\mathcal{R}_\delta = \big\{R \in \mathcal{R} : \ \mathrm{diam}(R) \leq \delta\big\}$$

sia ancora un ricoprimento elementare di X si dice *fine*. Ad esempio, i ricoprimenti elementari di $\mathbb{R}^N$ formati dalle palle o dai cubi sono tali.

Teorema 1.42. *Sia $(X\,,d)$ uno spazio metrico e siano $\mathcal{R}$ un ricoprimento elementare fine di X e $\lambda\colon \mathcal{R} \to [0,+\infty]$ una funzione tale che $\lambda(\varnothing) = 0$. Allora, la funzione $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ definita da*

$$(****) \quad \mu^*(A) = \sup_{\delta>0}\left(\inf\left\{\sum_k \lambda(R_k) : \ A \subset \bigcup_k R_k,\ R_k \in \mathcal{R} \text{ e } \mathrm{diam}\,(R_k) \leq \delta\ \right\}\right)$$

per ogni $A \subset X$ è una misura esterna metrica in X.

Dimostrazione. Le funzioni

$$\mu^*_\delta(A) = \inf\left\{\sum_k \lambda(R_k) : \ A \subset \bigcup_k R_k,\ R_k \in \mathcal{R} \text{ e } \mathrm{diam}\,(R_k) \leq \delta\ \right\}, \qquad A \subset X,$$

sono misure esterne su X per ogni $\delta > 0$ (Teorema 1.40) e da $\mu^*_{\delta_2} \leq \mu^*_{\delta_1}$ su $\mathcal{P}(X)$ per $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ e $\mu^*_\delta \to \mu^*$ puntualmente su $\mathcal{P}(X)$ per $\delta \to 0^+$ segue facilmente che anche μ^* è una misura esterna su X.
Resta quindi da provare solo che μ^* è una misura esterna metrica su X. Consideriamo a tal fine due insiemi $A_1, A_2 \subset X$ con $d(A_1, A_2) > 0$ e proviamo che risulta

$$0 < \delta < d(A_1, A_2) \qquad \Longrightarrow \qquad \mu^*_\delta(A_1) + \mu^*_\delta(A_1) \leq \mu^*_\delta(A_1 \cup A_2).$$

Fissiamo quindi δ come sopra e supponiamo senza perdita di generalità che sia anche $\mu^*_\delta(A_1 \cup A_2) < +\infty$. Fissato $\varepsilon > 0$, esistono allora insiemi $R_k \in \mathcal{R}$ $(k \geq 1)$ con $\mathrm{diam}\,(R_k) \leq \delta$ per ogni k tali che si abbia $A_1 \cup A_2 \subset \bigcup_k R_k$ e

$$\sum_k \lambda(R_k) < \mu^*_\delta(A_1 \cup A_2) + \varepsilon.$$

Possiamo ovviamente supporre che sia $(A_1 \cup A_2) \cap R_k = \varnothing$ per ogni k cosicché ogni insieme R_k interseca uno ed uno solo degli insiemi A_1 e A_2. Posto allora

$$\{R^i_k\}_k = \big\{R_k : \ R_k \cap A_i \neq \varnothing\big\}\,, \qquad i = 1, 2,$$

risulta evidentemente $A_i \subset \bigcup_k R^i_k$ con $\mathrm{diam}\,(R^i_k) \leq \delta$ e

$$\mu^*_\delta(A_1) + \mu^*_\delta(A_2) \leq \sum_k \lambda(R^1_k) + \sum_k \lambda(R^2_k) = \sum_k \lambda(R_k) < \mu^*_\delta(A_1 \cup A_2) + \varepsilon$$

per ogni i. Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue $\mu^*_\delta(A_1) + \mu^*_\delta(A_1) \leq \mu^*_\delta(A_1 \cup A_2)$ per ogni $0 < \delta < d(A_1, A_2)$ e passando al limite per $\delta \to 0^+$ si ottiene infine

$$d(A_1, A_2) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu^*(A_1) + \mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_1 \cup A_2)$$

che prova la tesi. $\square$

Evidenziamo nel risultato seguente una proprietà delle misure esterne di Borel sulla quale ritorneremo nel successivo Capitolo **??**. Le misure esterne di Borel $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ per le quali ogni insieme di X è equivalente ad un insieme di Borel nel senso seguente

$$(*{*}*{*}*) \qquad A \subset X \qquad \Longrightarrow \qquad \exists\, B \in \mathcal{B}(X) \text{ tale che } A \subset B \text{ e } \mu^*(A) = \mu^*(B);$$

hanno la proprietà di essere continue lungo tutte le successioni crescenti di insiemi.

TEOREMA 1.43. *Siano* $(X\,,d)$ *uno spazio metrico e* $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ *una misura esterna di Borel in* X *tale che valga* $(*{*}*{*}*)$. *Allora, per ogni successione di insiemi* $A_n \subset X$ $(n \geq 1)$ *si ha*

$$A_n \subset A_{n+1} \text{ per ogni } n \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*\left(\bigcup_n A_n\right).$$

Questo risultato va confrontato con Proposizione 1.22 − (b).

DIMOSTRAZIONE. Sia come al solito μ la restrizione di μ^* agli insiemi μ^*-misurabili e per ogni n sia $B_n \in \mathcal{B}(X)$ associato ad A_n da $(*{*}*{*})$ e siano C_m $(m \geq 1)$ e C gli insiemi di Borel di X definiti da

$$C_m = \bigcap_{n\geq m} B_n \quad (m \geq 1) \qquad \text{e} \qquad C = \bigcup_m C_m.$$

Si ha $A_m \subset C_m \subset B_m$ per ogni m cosicché risulta $A \subset C$ e

$$\mu^*(A_m) \leq \mu(C_m) \leq \mu(B_m) = \mu^*(A_m)$$

per ogni m. Inoltre, da $C_m \subset C_{m+1}$ per ogni m segue $\mu(C_m) \to \mu(C)$ per $m \to +\infty$ (Proposizione 1.22 − (b)). Si ha allora

$$\mu^*(A) \geq \lim_{n\to+\infty} \mu^*(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(C_n) = \mu(C) \geq \mu^*(A)$$

e questo completa la dimostrazione. □

Condizioni sufficienti espresse in termini del ricoprimento elementare fine $\mathcal{R}$ e della funzione λ affinché la misura esterna metrica costruita a partire da essi come in $(*{*}*{*})$ verifichi $(*{*}*{*}*)$ sono fornite nel risultato seguente.

TEOREMA 1.44. *Siano* $(X\,,d)$ *uno spazio metrico,* $\mathcal{R}$ *un ricoprimento elementare fine di* X *e* $\lambda\colon \mathcal{R} \to [0,+\infty]$ *una funzione tale che* $\lambda(\varnothing) = 0$ *e*

$$R \in \mathcal{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{cl}(R) \in \mathcal{R} \text{ e } \lambda(R) = \lambda(\mathrm{cl}(R)).$$

Allora, la misura esterna metrica in X *definita da* $(*{*}*{*})$ *verifica* $(*{*}*{*}*)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mu^*(A) < +\infty$ altrimenti non c'è nulla da dimostrare. Con le notazioni di Teorema 1.42, per ogni $n \geq 1$ fissato siano $R^n_k \in \mathcal{R}$ $(k \geq 1)$ insiemi con $\mathrm{diam}\,(R^n_k) \geq 1/k$ tali che risulti

$$A \subset \bigcup_k R^n_k \qquad \text{e} \qquad \sum_k \lambda(R^n_k) \leq \mu^*_{1/n}(A) + 1/n.$$

Allora, gli insiemi $B_n = \bigcup_k \mathrm{cl}(R^n_k)$ $(n \geq 1)$ sono insiemi di Borel di X tali che $A \subset B_n$ e

$$\mu_{1/n}(B_n) < \mu_{1/n}(A) + 1/n$$

Conseguentemente anche l'insieme $B = \bigcap_n B_n$ è di Borel in X e contiene A e per la manotonia di $\mu^*_{1/n}$ risulta

$$\mu_{1/n}(A) \leq \mu_{1/n}(B) \leq \mu_{1/n}(B_n) < \mu_{1/n}(A) + 1/n$$

per ogni n. Passando al limite per $n \to +\infty$ si ricava $\mu^*(A) = \mu^*(B)$ e questo completa la dimostrazione. □

A conclusione di questa parte dedicata al metodo di Carathéodory per la costruzione di misure esterne metriche, ricaviamo un'ovvia condizione sufficiente affinché i due procedimenti descritti in Teorema 1.37 e 1.42 coincidano.

TEOREMA 1.45. *Siano* (X, d) *uno spazio metrico,* $\mathcal{R}$ *un ricoprimento elementare fine di* X *e* $\lambda\colon \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ *una funzione tale che* $\lambda(\varnothing) = 0$ *con la seguente proprietà: per ogni* $R \in \mathcal{R}$ *e per ogni* $\varepsilon > 0$ *e* $\delta > 0$ *esiste* $R_k \in \mathcal{R}$ $(k \geq 1)$ *tali che risulti*

- $R \subset \bigcup_k R_k$ *e* $\operatorname{diam}(R_k) \leq \delta$*;*
- $\sum_k \lambda(R_k) \leq \lambda(R) + \varepsilon$*.*

Allora, le misure esterne definite in Teorema 1.37 e Teorema 1.42 coincidono.

DIMOSTRAZIONE. Siano μ^* e ν^* le misure esterne su X definite da Teorema 1.37 e Teorema 1.42 rispettivamente. Si ha $\mu^*(A) \leq \nu^*(A)$ per ogni insieme $A \subset X$ per costruzione. Viceversa, sia $A \subset X$ tale che $\mu^*(A) < +\infty$ e, fissato $\varepsilon > 0$, siano $R_k \in \mathcal{R}$ $(k \geq 1)$ insiemi tali che risulti

$$A \subset \bigcup_k R_k \qquad \text{e} \qquad \sum_k \lambda(R_k) < \mu^*(A) + \varepsilon/2.$$

Sia ora $\delta > 0$ fissato. Per ipotesi, per ogni k esistono insiemi $R_h^k \in \mathcal{R}$ $(h \geq 1)$ tali che risulti $\operatorname{diam}(R_h^k) \leq \delta$ per ogni h con

$$R_k \subset \bigcup_h R_h^k \qquad \text{e} \qquad \sum_h \lambda(R_h^k) \leq \lambda(R_k) + \varepsilon/2^{k+1}$$

e da ciò segue

$$A \subset \bigcup_{h,k} R_h^k \qquad \text{e} \qquad \sum_{h,k} \lambda(R_h^k) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

con $\operatorname{diam}(R_h^k) \leq \delta$ per ogni h e k. Abbiamo così provato che per la misura esterna ν_δ associata a ν^* come nella dimostrazione di Teorema 1.42 risulta $\nu_\delta^*(A) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$ per ogni $\delta > 0$. Per $\delta \to 0^+$ si trova $\nu^*(A) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$ e la tesi segue dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$. □

Premisure ed estensione di misure. A partire dai risultati di Carathéodory sulle misure esterne e sulla costruzione di misure che abbiamo illustrato nella sezione precedente esaminiamo in questa parte il problema di costruire una misura positiva sulla $\sigma-$algebra generata da una classe di insiemi a partire da una funzione numerabilmente additiva sulla medesima classe.
Sia X un insieme (non vuoto) che supponiamo fissato in tutta questa parte e siano $\mathcal{A}$ una classe di insiemi di X tale che $\varnothing \in \mathcal{A}$ e $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una funzione tale che $\lambda(\varnothing) = 0$. Sotto quali ipotesi sulla classe di insiemi $\mathcal{A}$ e sulla funzione λ esistono una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X tale che $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ e una misura positiva $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ su $\mathcal{S}$ che estende λ?
Esaminiamo in questa parte questo problema nell'ipotesi che la classe di insiemi $\mathcal{A}$ sia un'algebra di insiemi di X. Evidentemente una condizione necessaria perché ciò accada è che la funzione λ sia numerabilmente additiva su $\mathcal{A}$: se $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \geq 1)$ sono insiemi $\mathcal{A}-$misurabili, deve essere

$$A_m \cap A_n = \varnothing \text{ per } m \neq n \text{ e } \bigcup_n A_n \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \lambda\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \lambda(A_n).$$

Alla luce di questa considerazione, introduciamo la seguente definizione: data un'algebra di insiemi $\mathcal{A}$ di X, una funzione $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tale che

- $\lambda(\varnothing) = 0$;
- λ è numerabilmente additiva su $\mathcal{A}$;

si dice *premisura su* $\mathcal{A}$.
È chiaro che una premisura sull'algebra $\mathcal{A}$ è una misura positiva finitamente additiva su $\mathcal{A}$ e come tale risulta anche finitamente additiva e monotòna. Le nozioni di premisura *finita* (*limitata*) o σ *–finita* si formulano negli stessi termini delle corrispondenti definizioni per le misure positive.
Ogni algebra di insiemi $\mathcal{A}$ di X è un ricoprimento elementare di X e quindi ad ogni premisura $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ sull'algebra $\mathcal{A}$ si associano la misura esterna $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ su X definita da

$$(******) \qquad \mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_k \lambda(A_k) :\ A \subset \bigcup_k A_k \text{ e } A_k \in \mathcal{A} \right\}, \qquad A \subset X,$$

e la misura positiva $\mu\colon \mathcal{S}(\mu^*) \to [0, +\infty]$ definita per restrizione di μ^* alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}(\mu^*)$ degli insiemi μ^*-misurabili (Teorema 1.37). La misura esterna μ^* e la misura positiva e completa μ così definite si dicono indotte dalla premisura λ.
I risultati seguenti illustrano le relazioni tra la premisura λ e la misura positiva μ da essa indotta.

TEOREMA 1.46. *Siano*

- $\mathcal{A}$ *algebra di insiemi di* X*;*
- $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *premisura su* $\mathcal{A}$*;*
- $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ *la misura esterna definita da* $(******)$.

Allora, $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{S}(\mu^*)$ *e* $\mu^* = \lambda$ *su* $\mathcal{A}$.

In particolare, la misura positiva μ indotta da λ estende la premisura λ a tutta la $\sigma-$algebra generata da $\mathcal{A}$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $A \in \mathcal{A}$ e $A_k \in \mathcal{A}$ $(k \geq 1)$ insiemi $\mathcal{A}-$misurabili tali che $A \subset \bigcup_k A_k$. Allora, posto $A_0 = \varnothing$, gli insiemi

$$B_k = A \cap \big(A_k \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1})\big), \qquad k \geq 1,$$

sono $\mathcal{A}-$misurabili, disgiunti e tali che $A = \bigcup_k B_k$. Risulta quindi

$$\lambda(A) = \sum_k \lambda(B_k) \leq \sum_k \lambda(A_k)$$

poiché $B_k \subset A_k$ e λ è monotòna su $\mathcal{A}$ e da ciò segue

$$\lambda(A) \leq \mu^*(A), \qquad A \in A.$$

Viceversa, consideriamo gli insiemi $A_k \in \mathcal{A}$ $(k \geq 1)$ definiti da $A_1 = A$ e $A_k = \varnothing$ per $k \geq 2$. Risulta allora

$$\mu^*(A) \leq \sum_k \lambda(A_k) = \lambda(A)$$

da cui segue $\mu^* = \lambda$ su $\mathcal{A}$.
Per concludere la dimostrazione resta solo da provare che risulta $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}(\mu^*)$. Consideriamo a tal fine un insieme $A \in \mathcal{A}$ e $B \subset X$ con $\mu^*(B) < +\infty$. Fissato $\varepsilon > 0$, esistono allora insiemi $B_k \in \mathcal{A}$ $(k \geq 1)$ tali che risulti

$$B \subset \bigcup_k B_k \qquad \text{e} \qquad \sum_k \lambda(B_k) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$$

cosicché

$$\mu^*(B) + \varepsilon \geq \sum_k \lambda(B_k) = \sum_k \lambda(B_k \cap A) + \sum_k \lambda(B_k \setminus A) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, A risulta μ^*-misurabile per il citerio di misurabilità di Carathéodory. Pertanto si ha $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}(\mu^*)$ e questo conclude la dimostrazione. $\square$

La misura positiva μ associata alla premisura λ non è necessariamente l'unica misura positiva sulla $\sigma-$algebra $\sigma(\mathcal{A})$ che estende λ. Il risultato seguente illustra la relazione tra μ e le eventuali altre estensioni di λ.

TEOREMA 1.47. *Siano*

- $\mathcal{A}$ *algebra di insiemi di* X*;*
- $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ *premisura su* $\mathcal{A}$*;*
- $\mu\colon \mathcal{S}(\mu^*) \to [0,+\infty]$ *la misura positiva indotta da* λ*;*

e sia $\nu\colon \sigma(\mathcal{A}) \to [0,+\infty]$ *una misura positiva sulla* σ*–algebra* $\sigma(\mathcal{A})$ *generata da* $\mathcal{A}$ *tale che*

$$\nu(A) = \lambda(A), \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Allora,

(a) $\nu(E) \le \mu(E)$ *per ogni* $E \in \sigma(\mathcal{A})$*;*
(b) $E \in \sigma(\mathcal{A})$ *e* $\mu(E) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \nu(E) = \mu(E)$*;.*
(c) λ σ*–finita* $\quad \Longrightarrow \quad \nu = \mu$ *su* $\sigma(\mathcal{A})$*.*

DIMOSTRAZIONE. (a) Sia $E \in \sigma(\mathcal{A})$ e siano $A_k \in \mathcal{A}$ $(k \ge 1)$ insiemi $\mathcal{A}-$misurabili tali che $E \subset \bigcup_k A_k$. Risulta allora

$$\nu(E) \ge \sum_k \nu(A_k) = \sum_k \lambda(A_k)$$

da cui segue $\nu(E) \le \mu^*(A)$. Da $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{S}(\mu^*)$ (Teorema 1.46) segue $\mu^*(A) = \mu(E)$ cosicché risulta $\nu(E) \le \mu(E)$ e questo prova (a).
(b) Sia $E \in \sigma(\mathcal{A})$ con $\mu(E) < +\infty$ e, fissato $\varepsilon > 0$, siano $A_k \in \mathcal{A}$ $(k \ge 1)$ insiemi $\mathcal{A}-$misurabili tali che

$$E \subset \bigcup_k A_k \qquad \text{e} \qquad \sum_k \lambda(A_k) \le \mu(E) + \varepsilon.$$

Posto $A = \bigcup_k A_k$, risulta $A \in \sigma(\mathcal{A})$ e

$$\nu(A) = \lim_{k\to+\infty} \nu(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \mu(A)$$

poiché $\mu = \lambda = \nu$ su $\mathcal{A}$ cosicché si ha

$$\mu(E) \le \mu(A) \le \sum_k \mu(A_k) = \sum_k \lambda(A_k) < \mu(E) + \varepsilon$$

da cui segue $\mu(A \setminus E) = \mu(A) - \mu(E) < \varepsilon$ poiché $\mu(E) < +\infty$. In forza di (a) risulta $\nu(A \setminus E) \le \mu(A \setminus E)$ da cui segue

$$\mu(E) \le \mu(A) = \nu(A) = \nu(E) + \nu(A \setminus E) \le \nu(E) + \mu(A \setminus E) < \nu(E) + \varepsilon$$

e dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue $\mu(E) \le \nu(E)$ che prova l'asserto.
(c) Sia $X = \bigcup_n A_n$ con $A_n \in \mathcal{A}$ e $\lambda(A_n) < +\infty$ per ogni n. Essendo $\mathcal{A}$ un'algebra, possiamo supporre che sia $A_m \cap A_n = \varnothing$ per $m \ne n$. Allora, per ogni insieme $E \in \sigma(\mathcal{A})$ si ha per (b)

$$\mu(E) = \sum_n \mu(E \cap A_n) = \sum_k \nu(E \cap A_n) = \nu(E)$$

e questo conclude la dimostrazione. $\square$

L'enunciato seguente evidenzia un caso particolare del risultato precedente. La dimostrazione è ovvia.

COROLLARIO 1.48. *Siano*

- *$\mathcal{A}$ algebra di insiemi di X;*
- *$\lambda\colon \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ premisura σ –finita su $\mathcal{A}$.*

Allora, esiste una ed una sola misura positiva $\mu\colon \sigma(\mathcal{A}) \to [0,+\infty]$ tale che

$$\mu(A) = \lambda(A), \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Concludiamo questa parte provando che nel caso di una misura positiva σ–finita su una σ–algebra di insiemi il procedimento di estensione che abbiamo descritto produce il completamento della misura di partenza (Proposizione 1.28).

Teorema 1.49. *Siano $\mathcal{S}$ una σ algebra di insiemi di X e $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva σ –finita su $\mathcal{S}$ e siano*

- *$\lambda^*\colon \mathcal{S}^* \to [0,+\infty]$ il completamento di λ;*
- *$\mu\colon \mathcal{S}(\mu^*) \to [0,+\infty]$ la misura positiva indotta da λ.*

Allora, $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}(\mu^*)$ e $\lambda^* = \mu$.

Dimostrazione. Denotiamo con $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ la misura esterna indotta da λ cosicché risulta $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}(\mu^*)$ e $\mu = \lambda$ su $\mathcal{S}$ (Teorema 1.46) e proviamo preliminarmente che per ogni insieme $A \in \mathcal{S}(\mu^*)$ con $\mu^*(A) < +\infty$ esiste $E \in \mathcal{S}$ tale che

$$A \subset E \qquad \text{e} \qquad \mu^*(E \setminus A) = 0.$$

Infatti, per ogni $n \geq 1$ esistono insiemi $E_{n,k} \in \mathcal{S}$ $(k \geq 1)$ tali che risulti

$$A \subset \bigcup_k E_{n,k} \qquad \text{e} \qquad \sum_k \mu^*(E_{n,k}) = \sum_k \lambda(E_{n,k}) < \mu^*(A) + 1/n.$$

Allora, l'insieme $E = \bigcap_n \bigcup_k E_{n,k}$ è $\mathcal{S}$–misurabile e tale che $A \subset E$ con

$$\mu^*(E) \leq \sum_k \mu^*(E_{n,k}) < \mu^*(A) + 1/n$$

per ogni n da cui segue $\mu^*(E) = \mu^*(A)$. Essendo A un insieme μ^*–misurabile con $\mu^*(A) < +\infty$, deve essere $\mu^*(E \setminus A) = 0$ e questo prova l'asserto.
Consideriamo quindi il completamento $\lambda^*\colon \mathcal{S}^* \to [0,+\infty]$ della misura positiva λ definita su $\mathcal{S}$ (Proposizione 1.28) e proviamo dapprima che risulta

$$\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}(\mu^*) \qquad \text{e} \qquad \lambda^* = \mu^* \text{ su } \mathcal{S}^*.$$

Sia dunque $A \in \mathcal{S}^*$. Per definizione esistono allora due insiemi $E, F \in \mathcal{S}$ tali che risulti $E \subset A \subset F$ e $\lambda(F \setminus E) = 0$. Si ha allora

$$F \setminus E \in \mathcal{S} \subset \mathcal{S}(\mu^*) \qquad \text{e} \qquad \mu^*(F \setminus E) = \lambda^*(F \setminus E) = 0$$

e quindi risulta $A \in \mathcal{S}(\mu^*)$ e $\mu^*(A) = \mu^*(E) = \lambda^*(E) = \lambda(E)$.
Viceversa, sia $E \in \mathcal{S}(\mu^*)$ e siano $A_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ insiemi tali che risulti $X = \bigcup_n A_n$ con $A_n \subset A_{n+1}$ e $\lambda(A_n) < +\infty$ per ogni n. Si ha allora

$$\mu^*(E) = \lim_{n\to+\infty} \mu^*(E \cap A_n) \qquad \text{e} \qquad \mu^*(E \cap A_n) \leq \mu^*(A_n) = \lambda(A_n) < +\infty$$

per ogni n. Quindi, $E \cap A_n \in \mathcal{S}(\mu^*)$ con $\mu^*(E \cap A_n) < +\infty$ per ogni n. Per quanto provato all'inizio, per ogni n esiste allora $B_n \in \mathcal{S}$ tale che risulti

$$E \cap A_n \subset B_n \qquad \text{e} \qquad \mu^*\big(B_n \setminus (E \cap A_n)\big) = 0.$$

Analogamente risulta $A_n \setminus E \in \mathcal{S}(\mu^*)$ con $\mu^*(A_n \setminus E) < +\infty$ e quindi per ogni n esiste $C_n \in \mathcal{S}$ tale che risulti

$$A_n \setminus E \subset C_n \qquad \text{e} \qquad \mu^*\big(C_n \setminus (A_n \setminus E)\big) = 0.$$

Consideriamo ora gli insiemi $\mathcal{S}$–misurabili $A_n \setminus C_n$ e B_n e proviamo che risulta

- $A_n \setminus C_n \subset E \cap A_n \subset B_n$;

- $\lambda\big(B_n \setminus (A_n \setminus C_n)\big) = 0$;

per ogni n. Si ha infatti $A_n \setminus C_n \subset A_n \setminus (A_n \setminus E) = A_n \cap E$ e l'altra inclusione segue direttamente dalla scelta di B_n. Si ha inoltre

$$\begin{aligned}\lambda\big(B_n \setminus (A_n \setminus C_n)\big) &= \mu^*\left(B_n \setminus (A_n \setminus C_n)\right) \le \\ &\le \mu^*\left(B_n \setminus (E \cap A_n)\right) + \mu^*\big((E \cap A_n) \setminus (A_n \setminus C_n)\big) = \\ &= \mu^*\big((E \cap A_n) \setminus (A_n \setminus C_n)\big)\end{aligned}$$

per la scelta di B_n cosicché dalla catena di inclusioni

$$(E \cap A_n) \setminus (A_n \setminus C_n) = E \cap A_n \cap C_n \subset C_n \cap E \subset C_n \cap (E \cup A_n^{\mathrm{c}}) = C_n \setminus (A_n \setminus E),$$

si conclude che risulta $\mu^*\big((E \cap A_n) \setminus (A_n \setminus C_n)\big) = 0$ per la scelta di C_n.
Abbiamo così provato che risulta $E \cap A_n \in \mathcal{S}^*$ per ogni n e da ciò segue $E \in \mathcal{S}^*$ e questo conclude la domostrazione. □

Esercizi

1.1. Sia $\mathcal{C}$ una famiglia (non vuota) di insiemi di X. Provate che l'algebra $\mathcal{A}$ generata da $\mathcal{C}$ è formata dalle unioni finite di insiemi disgiunti E della forma

$$E = C_1 \cap \dots \cap C_k$$

con $C_h \in \mathcal{C}$ o $C_h^{\mathrm{c}} \in \mathcal{C}$ per ogni $h = 1, \dots, k$.

1.2. Siano X, Y due insiemi e $\Phi\colon X \to Y$ una funzione. Provate che

(a) se $\mathcal{S}_Y$ è una $\sigma-$algebra di insiemi di Y, la collezione di insiemi
$$\Phi^{-1}(\mathcal{S}_Y) = \left\{\Phi^{-1}(E) : \, E \in \mathcal{S}_Y\right\}$$
è una $\sigma-$algebra di insiemi di X;

(b) se Φ è biettiva e $\mathcal{S}_X$ è una $\sigma-$algebra di insiemi di X, la collezione di insiemi
$$\Phi(\mathcal{S}_X) = \left\{\Phi(E) : \, E \in \mathcal{S}_X\right\}$$
è una $\sigma-$algebra di insiemi di Y.

1.3. Siano $\mathcal{A}$ una collezione di insiemi di X e $B \subset X$ un insieme. Provate che risulta

$$\sigma(\mathcal{A} \cap B) = \sigma(\mathcal{A}) \cap B.$$

1.4. Siano X e Y spazi topologici con $\sigma-$algebre di Borel $\mathcal{B}(X)$ e $\mathcal{B}(Y)$ rispettivamente. Provate che

(a) se $Z \subset X$ è un insieme di X e $\mathcal{B}(Z)$ è la $\sigma-$algebra di Borel di Z relativamente alla topologia indotta, si ha $\mathcal{B}(Z) = \mathcal{B}(X) \cap Z$;

(b) se $\Phi\colon X \to Y$ è un omeomorfismo di X su Y si ha
$$B \in \mathcal{B}(X) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Phi(B) \in \mathcal{B}(Y);$$

(c) $B_1 \in \mathcal{B}(X)$ e $B_2 \in \mathcal{B}(Y) \qquad \Longrightarrow \qquad B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}(X \times Y)$.

1.5. Sia $\mathcal{S}$ una $\sigma-$algebra infinita di insiemi di X. Provate che

(a) esiste una collezione numerabile $\{E_n\}_n$ di insiemi $\mathcal{S}-$misurabili non vuoti e disgiunti;

(b) $\mathcal{S}$ non è numerabile: $\operatorname{card}(\mathcal{S}) \ge \mathfrak{c}$.

1.6. Fornite un esempio di classe di Dynkin $\mathcal{D}$ e un esempio di classe monotòna $\mathcal{M}$ che non siano $\sigma-$algebre.

1.7. Provate che una famiglia di insiemi $\mathcal{D}$ di un insieme X (non vuoto) è una classe di Dynkin se e solo se

- $X \in \mathcal{D}$;
- $E, F \in \mathcal{D}$ e $E \subset F \quad \Longrightarrow \quad F \setminus E \in \mathcal{D}$;
- $E_n \in \mathcal{D}$ e $E_n \subset E_{n+1}$ $(n \geq 1) \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_n E_n \in \mathcal{D}$.

1.8. Sia $f\colon X \to [0, +\infty]$ una funzione. Provate che

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x), \qquad X \subset A,$$

è una misura positiva sulla σ- algebra $\mathcal{P}(X)$ (Esempio 1.21 − (a)).

1.9. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva e, dati $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$, siano

$$\liminf_{n \to +\infty} E_n = \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} E_n \qquad \text{e} \qquad \limsup_{n \to +\infty} E_n = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} E_n.$$

Provate che

(a) $\mu\left(\liminf\limits_{n \to +\infty} E_n\right) \leq \liminf\limits_{n \to +\infty} \mu(E_n)$;

(b) $\mu\left(\bigcup\limits_{n \geq 1} E_n\right) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mu\left(\limsup\limits_{n \to +\infty} E_n\right) \geq \limsup\limits_{n \to +\infty} \mu(E_n)$.

1.10. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva. Provate che

(a) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $E_\varepsilon \in \mathcal{S}$ con $0 < \mu(E_\varepsilon) \leq \varepsilon$, esistono $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ disgiunti con

$$0 < \mu(E_n) < 1/2^n, \qquad n \geq 1;$$

(b) se per ogni $t > 0$ esiste $E_t \in \mathcal{S}$ con $t < \mu(E_t) < +\infty$, esistono $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ disgiunti con

$$1 \leq \mu(E_n) < +\infty, \qquad n \geq 1.$$

1.11. Sia μ una misura positiva semifinita su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X e sia $E \in \mathcal{S}$ un insieme tale che $\mu(E) = +\infty$. Provate che per ogni $t > 0$ esiste un insieme $F \in \mathcal{S}$ tale che $F \subset E$ e $t < \mu(F) < +\infty$.

1.12. Sia μ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X e sia

$$\mu_{\mathrm{sf}}(E) = \sup\left\{\mu(F) :\ F \in \mathcal{S} \text{ con } F \subset E \text{ e } \mu(F) < +\infty\right\}, \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Provate che

(a) μ_{sf} è una misura positiva semifinita su $\mathcal{S}$;

(b) μ semifinita $\quad \Longrightarrow \quad \mu_{\mathrm{sf}} = \mu$;

(c) $\mu = \mu_{\mathrm{sf}} + \mu'$ con μ' misura positiva su $\mathcal{S}$ non semifinita.

CAPITOLO 2

Integrazione astratta

Presentiamo in questo capitolo la teoria dell'*integrazione secondo Lebesgue* che generalizza ed estende la classica nozione di integrale di Riemann. Questa teoria è astratta nel senso che si applica a insiemi privi di ulteriore struttura oltre a quella necessaria alla definizione stessa dell'integrale. Ne consegue una definizione di integrale che trova applicazione non solo nel caso euclideo $\mathbb{R}^N$ ma di fatto in tutti i contesti in cui sia possibile definire una nozione di integrale. Come vedremo, la teoria che svilupperemo risulta semplice e potente al contempo e particolarmente adatta a gestire le operazioni di passaggio al limite sotto il segno di integrale.
La definizione di integrale di Lebesgue di cui esaminiamo qui le principali proprietà muove dalla nozione di misura positiva di un insieme astratto che abbiamo sviluppato nel capitolo precedente. Come vedremo nel proseguio del capitolo, l'integrale che ne risulta realizza un felice punto di equilibrio tra generalità della definizione e proprietà dell'integrale risultante.

2.1. Funzioni misurabili

Le funzioni *misurabili* sono le funzioni definite su insiemi muniti di una $\sigma-$algebra che sono naturali nello stesso senso in cui le funzioni continue sono le applicazioni naturali tra spazi topologici. I casi di maggior interesse per queste note sono quelli delle funzioni a valori complessi e a valori reali estesi ma, per consentire una trattazione il più possibile unitaria di entrambe le situazioni, è conveniente considerare il caso generale di funzioni a valori in spazi topologici.
Denoteremo in tutta la sezione con X un insieme astratto (non vuoto) e con $\mathcal{S}$ una $\sigma-$algebra di insiemi di X fissati e porremo come al solito $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Funzioni misurabili. La definizione di funzione misurabile rispetto ad una $\sigma-$algebra di insiemi è la seguente.

DEFINIZIONE 2.1. Sia Y uno spazio topologico. Una funzione $f\colon X \to Y$ tale che

$$B \in \mathcal{B}(Y) \qquad \Longrightarrow \qquad f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$$

si dice *$\mathcal{S}-$misurabile da X in Y*. □

In particolare, se anche X è uno spazio topologico, la funzione $f\colon X \to Y$ si dice *Borel−misurabile da X in Y* o equivalentemente che f è una *funzione di Borel da X in Y* se è $\mathcal{B}(X)-$misurabile cioè se risulta

$$B \in \mathcal{B}(Y) \qquad \Longrightarrow \qquad f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X).$$

La definizione precedente sembra di scarsa utilità a meno di conoscere gli insiemi di Borel dello spazio topologico Y. Prima di procedere con l'esame delle proprietà delle funzioni misurabili, proviamo che è possibile testare la misurabilità di una funzione restringendo la verifica ai soli insiemi aperti o chiusi di Y.

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia Y uno spazio topologico e sia $f\colon X \to Y$ una funzione. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *f è $\mathcal{S}$ – misurabile;*

(b) *$V \subset Y$ aperto* $\Longrightarrow$ $f^{-1}(V) \in \mathcal{S}$*;*

(c) *$F \subset Y$ chiuso* $\Longrightarrow$ $f^{-1}(F) \in \mathcal{S}$*.*

In particolare, se X e Y sono spazi topologici, ogni funzione continua $f: X \to Y$ è una funzione di Borel da X in Y.

Dimostrazione. L'equivalenza di (b) e (c) è conseguenza immediata dell'identità $f^{-1}(A^c) = \big(f^{-1}(A)\big)^c$ valida per ogni insieme A. Basta quindi provare che (b) implica (a). A tal fine, osserviamo che la collezione di insiemi

$$\mathcal{S}' = \big\{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{S}\big\}$$

è una σ – algebra contenente tutti gli aperti di Y per (b) e conseguentemente anche tutti gli insiemi di Borel di Y. Pertanto, f è $\mathcal{S}$ – misurabile e questo prova (a). □

Proviamo ora che la composizione con funzioni continue o di Borel preserva la misurabilità di una funzione e che la misurabilità di una funzione a valori nel prodotto di spazi topologici si riduce alla misurabilità delle sue componenti.

Proposizione 2.3. *Siano Y e Z due spazi topologici, $A \subset Y$ un isnieme e $f: X \to Y$ una funzione $\mathcal{S}$ – misurabile tale che*

$$f(x) \in A, \qquad x \in X,$$

e sia $\Phi: A \to Z$ una funzione tale che valga una delle seguenti due ipotesi:

(a) *$A = X$ e Φ è Borel misurabile;*

(b) *Φ è continua in A.*

Allora, la funzione $h = \Phi \circ f: X \to Z$ è $\mathcal{S}$ – misurabile.

Dimostrazione. (a) Per ogni insieme di Borel B di Z, risulta $\Phi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(Y)$ e da ciò segue $h^{-1}(B) = f^{-1}\big(\Phi^{-1}(B)\big) \in \mathcal{S}$.

(b) Per ogni insieme aperto V di Z, l'insieme $\Phi^{-1}(V)$ è aperto in A e quindi è della forma $\Phi^{-1}(V) = A \cap W$ con W aperto di Y cosicché, essendo f à valori in A, risulta $h^{-1}(V) = f^{-1}\big(\Phi^{-1}(V)\big) = f^{-1}(W) \in \mathcal{S}$ (Proposizione 2.2) e questo prova l'asserto. □

Proposizione 2.4. *Sia Y lo spazio topologico prodotto*

$$Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$$

di spazi topologici Y_m aventi base numerabile di aperti e $\pi_m: Y \to Y_m$ le relative proiezioni canoniche $(m = 1, \ldots, n)$. Allora, per una funzione $f: X \to Y$ le seguenti afermazioni sono equivalenti:

(a) *f è $\mathcal{S}$ – misurabile;*

(b) *ogni componente $f^m = \pi_m \circ f: X \to Y_m$ $(m = 1, \ldots, n)$ è $\mathcal{S}$ – misurabile.*

In particolare, per una funzione $f: X \to \mathbb{K}^n$ a valori in uno spazio euclideo $\mathbb{K}^n$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ di componenti $f = \big(f^1, \ldots, f^n\big)$ la misurabilità di f equivale alla misurabilità delle sue componenti $f^1, \ldots, f^n$.

Dimostrazione. (a) Dalla continuità delle proiezioni canoniche π_m e da (a) segue che ogni componente f^m è $\mathcal{S}$ – misurabile se f è tale.

(b) Siano $\mathcal{V}_m$ basi numerabili di aperti di Y_m $(m = 1, \ldots, n)$ cosicché

$$\mathcal{W} = \big\{W = V_1 \times \cdots \times V_n : V_m \in \mathcal{V}_m \text{ per } m = 1, \ldots, n\big\}$$

è una base numerabile di aperti di Y. Per ogni insieme $W = V_1 \times \cdots \times V_n \in \mathcal{W}$ risulta

$$f^{-1}(W) = \bigcap_m (f^m)^{-1}(V_m)$$

da cui segue $f^{-1}(W) \in \mathcal{S}$ per ogni $W \in \mathcal{W}$. Poiché ogni aperto V di Y è unione di una famiglia numerabile $\{W_j\}_j$ di aperti di $\mathcal{W}$, da

$$f^{-1}(V) = \bigcup_j f^{-1}(W_j)$$

e dalla Proposizione 2.2 si deduce che f è $\mathcal{S}-$misurabile se ogni componente è tale. $\square$

Dai risultati precedenti con opportune scelte di Φ si ricava che tutte le usuali operazioni sulle funzioni a valori reali o complessi preservano la misurabilità.

Corollario 2.5. *Sia $f = u + iv \colon X \to \mathbb{C}$ una funzione complessa con $u, v \colon X \to \mathbb{R}$ parte reale e parte immaginaria di f. Allora,*

$$f \text{ è } \mathcal{S}-\text{misurabile} \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \text{ e } v \text{ sono } \mathcal{S}-\text{misurabili.}$$

Inoltre, se $f, g \colon X \to \mathbb{C}$ sono funzioni $\mathcal{S}-$misurabili, le funzioni

(a) *λf $(\lambda \in \mathbb{C})$, $f + g$ e fg;*
(b) *$1/g$ e f/g se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in X$;*
(c) *f^* e $|f|$;*

sono $\mathcal{S}-$misurabili.

Le stesse conclusioni valgono per funzioni $\mathcal{S}-$misurabili a valori reali $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ (con l'ovvia esclusione di quella relativa a f^*) nel qual caso risultano $\mathcal{S}-$misurabili anche le funzioni

(d) $\min\{f, g\}$ e $\max\{f, g\}$;
(e) $f^{\pm} = \max\{\pm f, 0\}$.

Gli stessi risultati si estendono per induzione al caso di un numero finito qualunque di funzioni.
Come accennato, oltre alla misurabilità di funzioni a valori reali o complessi è opportuno considerare la misurabilità di funzioni a valori nella retta reale estesa $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ munita dell'usuale topologia di Hausdorff compatta e a base numerabile (Esercizio I–2.37). In tal caso, le proprietà (a), ..., (d) elencate sopra (di nuovo con l'ovvia esclusione di quella relativa a f^*) continuano a valere per una coppia di funzioni $\mathcal{S}-$misurabili $f, g \colon X \to \mathbb{R}_\infty$ purché le funzioni $f + g$, fg, f/g e cf $(c \in \mathbb{R})$ siano definite in ogni punto di X cioè non si abbiano mai i casi simbolicamente rappresentati da $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $[0/0]$ e $[\infty/\infty]$. Ciò è conseguenza della continuità di addizione, moltiplicazione e divisione sulle coppie di reali estesi per cui tali operazioni sono definite (Proposizione 2.4−(b)).
Vedremo successivamente (Corollario 2.13) che, pur di adottare la convenzione $0 \cdot \infty = 0$, il prodotto fg risulta $\mathcal{S}-$misurabile anche senza la richiesta che il caso $[0 \cdot \infty]$ non si presenti.
A conclusione di queste considerazioni sulla misurabilità delle funzioni a valori reali estesi, proviamo che è in effetti sufficiente testare la misurabilità di una funzione a valori reali o reali estesi solo su classi di insiemi più ristrette della classe degli aperti della retta reale o reale estesa.

Proposizione 2.6. *Sia $f \colon X \to \mathbb{R}_\infty$ una funzione. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *f è $\mathcal{S}$ – misurabile;*
(b) *$f^{-1}(V) \in \mathcal{S}$ per ogni aperto V di $\mathbb{R}_\infty$;*
(c) *$\{f > \alpha\} \in \mathcal{S}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$;*
(d) *$f^{-1}(I) \in \mathcal{S}$ per ogni intervallo $I \subset \mathbb{R}_\infty$.*

L'ipotesi (c) può essere ovviamente sostituita da $\{f < \alpha\} \in \mathcal{S}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Inoltre, nel caso particolare di una funzione a valori reali $f\colon X \to \mathbb{R}$, in (b) e (d) è possibile prendere V aperto ed I intervallo di $\mathbb{R}$ anziché di $\mathbb{R}_\infty$.

Dimostrazione. Proviamo ciclicamente l'equivalenza di (b), (c) e (d) avendo già provato l'equivalenza di (a) e (b) (Proposizione 2.2).

(b) L'insieme $(\alpha, +\infty]$ è un aperto di $\mathbb{R}_\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e quindi (c) segue da (b).

(c) Risulta $\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{S}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e da

$$\{f \geq \alpha\} = \bigcap_n \{f > \alpha - 1/n\}$$

segue che anche $\{f \geq \alpha\}$ e $\{f < \alpha\}$ sono in $\mathcal{S}$. Poiché ogni intervallo I della retta reale estesa si scrive come intersezione di due insiemi dei quattro tipi precedenti, si ottiene (d).

(d) Ogni aperto della retta reale estesa è unione di una famiglia al più numerabile di intervalli di $\mathbb{R}_\infty$ e quindi (a) segue da (d). $\square$

Successioni di funzioni misurabili. Esaminiamo in questa parte le proprietà della misurabilità in relazione alle operazioni sulle successioni di funioni misurabili a valori complessi o reali estesi.

Teorema 2.7. *Sia $\mathcal{S}$ una σ – algebra di insiemi di X e siano $f_n\colon X \to \mathbb{R}_\infty$ $(n \geq 1)$ funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili. Allora,*

(a) *le funzioni $s = \inf_{n\geq 1} f_n$ e $S = \sup_{n\geq 1} f_n$ sono $\mathcal{S}$ – misurabili;*
(b) *le funzioni $l = \liminf_{n\to+\infty} f_n$ e $L = \limsup_{n\to+\infty} f_n$ sono $\mathcal{S}$ – misurabili;*
(c) *se $f\colon X \to \mathbb{R}_\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ puntualmente in X, f è $\mathcal{S}$ – misurabile.*

La proprietà (c) vale ovviamente anche per il limite puntuale di una successione di funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili $f_n\colon X \to \mathbb{C}$ $(n \geq 1)$ a valori complessi.

Dimostrazione. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\{s < \alpha\} = \bigcup_n \{f_n < \alpha\} \qquad \text{e} \qquad \{S > \alpha\} = \bigcup_n \{f_n > \alpha\}$$

da cui segue (a) mentre (b) e (c) seguono da

$$l = \liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup_{m\geq 1}\left(\inf_{n\geq m} f_n\right) \qquad \text{e} \qquad L = \limsup_{n\to+\infty} f_n = \inf_{m\geq 1}\left(\sup_{n\geq m} f_n\right). \quad \square$$

La principale proprietà delle funzioni misurabili non negative risiede nella possibilità di caratterizzarle come limite puntuale di successioni crescenti di funzioni che assumono un numero finito di valori su insiemi misurabili. Queste funzioni elementari svolgono un ruolo così importante nella teoria della misura e dell'integrazione da meritare una definizione specifica.

Definizione 2.8. Sia X un insieme (non vuoto). Una funzione $s\colon X \to \mathbb{K}$ appartenente allo spazio vettoriale

$$\operatorname{span}\left\{1_A :\ A \subset X\right\}$$

generato dalle funzioni caratteristiche si dice *semplice.* $\square$

Una funzione semplice $s\colon X \to \mathbb{K}$ è dunque della forma

$$s(x) = \alpha_1 1_{A_1}(x) + \cdots + \alpha_j 1_{A_j}(x), \qquad x \in X,$$

con $\alpha_1, \ldots, \alpha_j \in \mathbb{K}$ numeri reali o complessi (non necessariamente distinti) e $A_1, \ldots, A_j$ insiemi di X (non necessariamente disgiunti) e ciò accade se e solo se s assume solo un numero finito di valori. La rappresentazione di s come combinazione lineare di funzioni caratteristiche non è unica. Se tuttavia risulta $s(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ con $\alpha_{h'} \neq \alpha_{h''}$ per $h' \neq h''$, i corrispondenti insiemi di livello $A_h = \{s = \alpha_h\}$ $(h = 1, \ldots, k)$ sono tra loro disgiunti e costituiscono una partizione di X e in tal caso la rappresentazione

$$(*) \qquad s(x) = \alpha_1 1_{A_1}(x) + \cdots + \alpha_k 1_{A_k}(x), \qquad x \in X,$$

risulta univocamente determinata. Ad essa ci riferiremo come alla rappresentazione *canonica* della funzione semplice s. Con tale rappresentazione la funzione semplice s risulta $\mathcal{S}-$misurabile se e solo se ogni insieme A_h è $\mathcal{S}-$misurabile.

TEOREMA 2.9. *Siano $\mathcal{S}$ una $\sigma-$algebra di insiemi di X ed $f\colon X \to [0, +\infty]$ una funzione. Allora, le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(a) *f è $\mathcal{S}-$misurabile;*

(b) *esistono $s_n\colon X \to [0, +\infty)$, $n \geq 1$, funzioni semplici e $\mathcal{S}-$misurabili tali che*
- *$s_n \leq s_{n+1}$ per ogni n;*
- *$s_n \to f$ puntualmente in X per $n \to +\infty$.*

Inoltre, se f è limitata superiormente, $s_n \to f$ uniformemente su X per $n \to +\infty$.

La parte significativa della tesi è l'esistenza della successione di funzioni semplici e misurabili che approssima f in modo crescente. Come vedremo, questo risultato ha innumerevoli applicazioni.

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo solo provare che (a) implica (b). Per ogni $n \geq 1$ fissato, gli insiemi

$$\begin{aligned} E_{n,k} &= \{(k-1)/2^n \leq f < k/2^n\} \qquad k = 1, \ldots, n2^n; \\ F_n &= \{f \geq n\} \end{aligned}$$

costituiscono una partizione $\mathcal{S}-$misurabile di X e le funzioni $s_n\colon X \to [0, +\infty)$ definite da

$$s_n = \sum_{1 \leq k \leq n2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{E_{n,k}} + n 1_{F_n}, \qquad n \geq 1,$$

sono semplici, non negative ed $\mathcal{S}-$misurabili. Proviamo che la successione di funzioni $\{s_n\}_n$ è crescente. A tal fine, consideriamo $x \in X$ ed $n \geq 1$ fissati e distinguiamo i tre casi seguenti a seconda del valore $f(x) \in [0, +\infty]$.
Se risulta $0 \leq f(x) < n$, esiste uno ed un solo indice $k \in \{1, \ldots, n2^n\}$ tale che risulti $x \in E_{n,k}$ e quindi si ha $s_n(x) = (k-1)/2^n$. Da $E_{n,k} = E_{n+1,2k-1} \cup E_{n+1,2k}$ segue quindi

$$s_{n+1}(x) \geq \frac{(2k-1)-1}{2^{n+1}} = \frac{k-1}{2^n} = s_n(x).$$

Se risulta invece $n \leq f(x) < n+1$, si ha $x \in F_n$ e dunque $s_n(x) = n$ mentre risulta $x \in E_{n+1,k}$ per qualche $k \in \left\{1, \ldots, (n+1)2^{n+1}\right\}$. Necessariamente, deve essere $k \geq n2^{n+1} + 1$ poiché se fosse per assurdo $k \leq n2^{n+1}$, si avrebbe $f(x) < k/2^{n+1} \leq n$ e questo contraddirebbe l'ipotesi fatta. Si ha allora

$$s_{n+1}(x) \geq \frac{k-1}{2^{n+1}} \geq n = s_n(x).$$

Infine, se risulta $f(x) \geq n+1$, si ha $x \in F_{n+1} \subset F_n$ e da questo segue che risulta $s_{n+1}(x) = n+1 > n = s_n(x)$ anche in quest'ultimo caso.
Resta poi da provare che la successione $\{s_n\}_n$ tende ad f puntualmente in X per $n \to +\infty$. Fissato $x \in X$, si ha $0 \leq f(x) < +\infty$ oppure $f(x) = +\infty$. Nel primo caso, per ogni $n > f(x)$ risulta $0 < f(x) - s_n(x) < 1/2^n$ per costruzione e nell'altro caso si ha $s_n(x) = n$ per ogni n.
Infine, se esiste $M \geq 0$ tale che risulti $0 \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in X$, si ha come prima $0 \leq f(x) - s_n(x) < 1/2^n$ per ogni $x \in X$ e $n > M$ e questo completa la dimostrazione. □

COROLLARIO 2.10. *Sia $f\colon X \to \mathbb{K}$ una funzione $\mathcal{S}$ – misurabile. Allora, esistono funzioni semplici e $\mathcal{S}$ – misurabili $s_n\colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ tali che*

(a) $|s_n| \leq |s_{n+1}|$ *e* $|s_n| \leq |f|$ *in X per ogni n;*
(b) $s_n \to f$ *puntualmente in X per $n \to +\infty$.*

DIMOSTRAZIONE. Si applica il risultato precedente alle parti positive e negative della parte reale e della parte immaginaria di f. □

Come modificare una funzione senza perdere la misurabilità. Accade frequentemente di modificare su un insieme i valori di una assegnata funzione misurabile. Esaminiamo in questa parte alcune situazioni in cui ciò si può fare senza perdere la misurabilità della funzione. Per non distinguere tra funzioni a valori reali o complessi e funzioni a valori reali estesi è conveniente considerare il caso di funzioni a valori in uno spazio topologico astratto.

PROPOSIZIONE 2.11. *Sia Y uno spazio topologico e siano $f, g\colon X \to Y$ due funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili e $E \in \mathcal{S}$ un insieme $\mathcal{S}$ – misurabile. Allora, la funzione $h\colon X \to Y$ definita da*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{per } x \in E \\ g(x) & \textit{per } x \in X \setminus E \end{cases}$$

è $\mathcal{S}$ – misurabile.

La stessa proprietà può essere formulata per una successione di funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili $f_n\colon X \to Y$ $(n \geq 1)$ e per una partizione $\mathcal{S}$ – misurabile $\{E_n : n \geq 1\}$ di X.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni insieme aperto $V \subset Y$ si ha

$$g^{-1}(V) = \big(f^{-1}(V) \setminus E\big) \cup \big(h^{-1}(V) \cap E\big) \in \mathcal{S}$$

e questo prova la tesi. □

Questo risultato mostra dunque che si possono incollare funzioni misurabili su insiemi misurabili senza perdere la misurabilità o equivalentemente che si può modificare una funzione misurabile su un insieme misurabile ponendola uguale ad un'altra funzione misurabile senza perdere la misurabilità. È importante evidenziare che a tal fine non si richiede in alcun modo che l'insieme in cui viene modificata la funzione originale sia piccolo nel senso della misura[1], ad esempio trascurabile. Quando questo accade e la misura è anche completa, allora i valori della funzione possono essere modificati in modo arbitrario come si vede nel risultato seguente.

PROPOSIZIONE 2.12. *Siano $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva e completa e Y uno spazio topologico e siano $f, g\colon X \to Y$ due funzioni tali che*

$$f(x) = g(x) \qquad \textit{per } \mu\textit{ – q.o. } x \in X.$$

Allora, f è $\mathcal{S}$ – misurabile se e solo se g è $\mathcal{S}$ – misurabile.

[1] In effetti non si richiede neppure che vi sia una misura.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni aperto $V \subset Y$ la differenza simmetrica $f^{-1}(V) \triangle g^{-1}(V)$ è $\mu-$trascurabile. $\square$

Dai risultati precedenti possiamo ricavare, come anticipato, che anche il prodotto di due funzioni a valori reali estesi $\mathcal{S}-$misurabili è ancora $\mathcal{S}-$misurabile quando si adotta la convenzione $0 \cdot \infty = 0$, convenzione che utilizzeremo sistematicamente nel prossimo capitolo.

COROLLARIO 2.13. *Siano $f, g \colon X \to \mathbb{R}_\infty$ due funzioni $\mathcal{S}-$misurabili a valori reali estesi e sia $h \colon X \to \mathbb{R}_\infty$ la funzione definita da*

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) = 0 \text{ e } g(x) = \pm\infty \text{ o viceversa} \\ f(x)g(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora, h è $\mathcal{S}-$misurabile.

DIMOSTRAZIONE. L'insieme E definito da

$$E = \big(\{f = \pm\infty\} \cap \{g = 0\}\big) \cup \big(\{f = 0\} \cap \{g = \pm\infty\}\big)$$

è $\mathcal{S}-$misurabile. Quindi, le funzioni

$$f_1 = \begin{cases} f & \text{in } X \setminus E \\ 0 & \text{in } E \end{cases} \qquad g_1 = \begin{cases} g & \text{in } X \setminus E \\ 0 & \text{in } E \end{cases}$$

sono $\mathcal{S}-$misurabili per Proposizione 2.11 e anche il loro prodotto $f_1 g_1$ è tale poiché non si ha mai il caso $[0 \cdot \infty]$. Dall'uguaglianza $h = f_1 g_1$ su X segue la conclusione. $\square$

A conclusione di questa parte, esaminiamo infine quali relazioni sussistono tra la misurabilità rispetto ad una $\sigma-$algebra e rispetto al suo completamento. Siano dunque $\mu \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi di X, $\mathcal{S}^*$ il completamento di $\mathcal{S}$ rispetto a μ e $\mu^* \colon \mathcal{S}^* \to [0, +\infty]$ l'estensione di μ a $\mathcal{S}^*$ descritta nella Proposizione 1.28.

PROPOSIZIONE 2.14. *Sia $f \colon X \to [0, +\infty]$ una funzione $\mathcal{S}^*-$misurabile. Allora, esiste una funzione $g \colon X \to [0, +\infty]$ tale che*

(a) *g è $\mathcal{S}-$misurabile;*
(b) *esiste $T \in \mathcal{S}$ $\mu-$trascurabile tale che $\{f \neq g\} \subset T$.*

In altri termini, una funzione misurabile rispetto al completamento di una $\sigma-$algebra rispetto ad una misura positiva coincide con una funzione misurabile rispetto alla $\sigma-$algebra originale al di fuori di un insieme trascurabile e misurabile per la $\sigma-$algebra originale. Vedremo un esempio significativo di questa situazione nel successivo Capitolo 5 ove $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}^*$ saranno le $\sigma-$algebre di Borel e di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$ rispettivamente. Osserviamo infine che il medesimo risultato vale ovviamente anche nel caso di funzioni a valori reali estesi $f \colon X \to \mathbb{R}_\infty$ o di funzioni a valori reali o complessi $f \colon X \to \mathbb{K}$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $s_n \colon X \to [0, +\infty)$ $(n \geq 1)$ funzioni semplici, non negative e $\mathcal{S}^*-$misurabili associate a f come in Teorema 2.9 e sia s_n della forma

$$s_n = c_{n,1} 1_{A_{n,1}} + \cdots + c_{n,i_n} 1_{A_{n,i_n}}, \qquad n \geq 1,$$

con $\{A_{n,1}, \ldots, A_{n,i_n}\}$ partizione $\mathcal{S}^*-$misurabile di X. Con riguardo alla definizione di $\mathcal{S}^*$, per ogni n e per ogni $i = 1, \ldots, i_n$ esistono allora insiemi $F_{n,i} \in \mathcal{S}$ tali che risulti $F_{n,i} \subset A_{n,i}$ e $\mu^*(A_{n,i} \setminus F_{n,i}) = 0$ per ogni i. Posto

$$T = \bigcup_n \left[\bigcup_{1 \leq i \leq i_n} (A_{n,i} \setminus F_{n,i}) \right],$$

risulta $T \in \mathcal{S}$ poiché

$$\bigcup_{1 \leq i \leq i_n} (A_{n,i} \setminus F_{n,i}) = X \setminus \left(\bigcup_{1 \leq i \leq i_n} F_{n,i} \right)$$

e $\mu(T) = \mu^*(T) = 0$ poiché T è unione numerabile di insiemi μ^*-trascurabili. Poniamo allora $E_{n,i} = F_{n,i} \setminus T \in \mathcal{S}$ $i = 1, \dots, i_n$ e definiamo

$$t_n = c_{n,1} 1_{E_{n,1}} + \cdots + c_{n,i_n} 1_{E_{n,i_n}}, \qquad n \geq 1.$$

Ogni funzione $t_n \colon X \to [0, +\infty)$ è semplice, $\mathcal{S}-$misurabile ed evidentemente tale che risulti $t_n = s_n$ su $X \setminus T$ e $t_n = 0$ su T. Quindi, si ha $0 \leq t_n \leq t_{n+1}$ su X per ogni n ed esiste $g \colon X \to [0, +\infty]$ tale che $s_n \to g$ puntualmente in X per $n \to +\infty$. Tale g è $\mathcal{S}-$misurabile poichè ogni t_n è tale e evidentemente risulta $\{f \neq g\} \subset T$. □

2.2. Integrazione di funzioni misurabili non negative

Introduciamo in questa sezione la definizione di integrale di una funzione misurabile e non negativa a valori reali estesi e ne esaminiamo le principali proprietà. In tutta la sezione denoteremo con $\mu \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva (non nulla) fissata su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi di un insieme astratto (non vuoto) X.

Integrale di funzioni misurabili non negative. Definiamo dapprima l'integrale di una funzione semplice e misurabile adottando qui e nel seguito la convenzione secondo la quale risulta $0 \cdot (\pm\infty) = 0$.
Sia $s \colon X \to [0, +\infty)$ una funzione semplice, $\mathcal{S}-$misurabile e non negativa che supponiamo rappresentata dalla formula

$$(*) \qquad s = \alpha_1 1_{A_1} + \cdots + \alpha_k 1_{A_k}$$

con coefficienti $\alpha_h \geq 0$ e insiemi $A_h \in \mathcal{S}$ $(h = 1, \dots, k)$. Dato un insieme $E \in \mathcal{S}$, il numero reale esteso non negativo definito da

$$(**) \qquad \int_E s \, d\mu = \alpha_1 \mu(E \cap A_1) + \cdots + \alpha_k \mu(E \cap A_k)$$

si dice *integrale di s su $E \in \mathcal{S}$ rispetto a μ.*
La definizione è ben posta in quanto risulta indipendente dalla rappresentazione scelta per la funzione semplice s.

LEMMA 2.15. *Sia $s \colon X \to [0, +\infty)$ una funzione semplice, $\mathcal{S}-$misurabile e non negativa rappresentata da*

$$\alpha_1 1_{A_1} + \cdots + \alpha_k 1_{A_k} = s = \beta_1 1_{B_1} + \cdots + \beta_j 1_{B_j}$$

con coefficienti $\alpha_h, \beta_i \geq 0$ e insiemi $A_h, B_i \in \mathcal{S}$ $(h = 1, \dots, k$ e $i = 1, \dots, j)$. Allora,

$$(***) \qquad \sum_{1 \leq h \leq k} \alpha_h \mu(E \cap A_h) = \sum_{1 \leq i \leq j} \beta_h \mu(E \cap B_i), \qquad E \in \mathcal{S}.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo senza perdita di generalità che l'unione degli insiemi $A_1, \dots, A_k$ e $B_1, \dots, B_j$ sia tutto X e supponiamo inoltre per semplificare le formule che sia $E = X$. Per $E \neq X$ si ragiona allo stesso modo con modifiche puramente formali.
Proviamo dapprima che dalla rappresentazione $s = \alpha_1 1_{A_1} + \cdots + \alpha_k 1_{A_k}$ si può passare a una rappresentazione $s = \beta_1 1_{B_1} + \cdots + \beta_j 1_{B_j}$ in cui gli insiemi $\{B_1, \dots, B_j\}$ costituiscono una partizione $\mathcal{S}-$misurabile di X e per la quale vale l'uguaglianza

$(***)$. A tal fine, ad ogni insieme non vuoto di indici $I \subset \{1, \dots, k\}$ associamo l'insieme $\mathcal{S}$ – misurabile

$$B_I = \left(\bigcap_{h \in I} A_h \right) \setminus \left(\bigcup_{h \notin I} A_h \right)$$

e proviamo che gli insiemi B_I non vuoti così ottenuti costituiscono una partizione di X. Infatti, per ogni punto $x \in X$, risulta $x \in B_I$ per $I = \{h : x \in A_h\}$ e inoltre, gli insiemi B_I sono tra loro disgiunti: se infatti risulta $x \in B_{I_1} \cap B_{I_2}$ con I_1 e I_2 sottoinsiemi di $\{1, \dots, k\}$, per ogni indice $h \in I_1$ risulta $x \in A_h$ e quindi h deve appartenere anche a I_2 altrimenti non si avrebbe $x \in B_{I_2}$. Deve allora essere $I_1 \subset I_2$ e scambiando i ruoli di I_1 e I_2 segue l'asserto.
Denotiamo quindi con $B_i, \dots, B_j$ gli insiemi B_I non vuoti così ottenuti e osserviamo che, per ogni $i = 1, \dots, j$ fissato, per costruzione, risulta $A_h \cap B_i = \varnothing$ oppure $A_h \cap B_i = B_i$ per ogni indice h. Posto allora

$$\beta_i = \sum \left\{ \alpha_h : \ h \text{ tale che } A_h \cap B_i = B_i \right\}, \qquad i = 1, \dots, j,$$

risulta

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \le h \le k} \alpha_h \mu(A_h) &= \sum_{1 \le h \le k} \sum_{1 \le i \le j} \alpha_h \mu(A_h \cap B_i) = \\
&= \sum_{1 \le i \le j} \sum_{1 \le h \le k} \alpha_h \mu(A_h \cap B_i) = \sum_{1 \le i \le j} \beta_i \mu(B_i)
\end{aligned}$$

e questo prova la validità di $(***)$ con $s = \beta_1 1_{B_1} + \dots + \beta_j 1_{B_j}$ rappresentata da insiemi $B_1, \dots, B_j$ costituenti una partizione $\mathcal{S}$ – misurabile di X.
Sia infine

$$\alpha_1 1_{A_1} + \dots + \alpha_k 1_{A_k} = s = \beta_1 1_{B_1} + \dots + \beta_j 1_{B_j}$$

con insiemi $A_1, \dots, A_k$ e $B_1, \dots, B_j$ costituenti due partizioni $\mathcal{S}$ – misurabili di X. Si ha evidentemente $\alpha_h = \beta_i$ quando $A_h \cap B_i \neq \varnothing$ da cui segue

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \le h \le k} \alpha_h \mu(A_h) &= \sum_{1 \le h \le k} \sum_{1 \le i \le j} \alpha_h \mu(A_h \cap B_i) = \\
&= \sum_{1 \le i \le j} \sum_{1 \le h \le k} \beta_i \mu(A_h \cap B_i) = \sum_{1 \le i \le j} \beta_i \mu(B_i)
\end{aligned}$$

e questo completa la dimostrazione. □

Possiamo ora definire l'integrale rispetto alla misura positiva μ di una funzione $\mathcal{S}$ – misurabile $f \colon X \to [0, +\infty]$ avente valori reali estesi non negativi. La necessità di considerare l'integrale di funzioni non negative che assumono valore $+\infty$ sarà chiara nella successiva Sezione 2.4.

Definizione 2.16. Sia $f \colon X \to [0, +\infty]$ una funzione $\mathcal{S}$ – misurabile. Per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$, il numero reale esteso non negativo

$$\int_E f \, d\mu = \sup \left\{ \int_E s \, d\mu : \ s \text{ semplice, } \mathcal{S}\text{ – misurabile con } 0 \le s \le f \right\}$$

si dice *integrale di f rispetto a μ su $E \in \mathcal{S}$.* □

Èevidente che nel caso di una funzione semplice, $\mathcal{S}$ – misurabile e non negativa la Definizione 2.16 coincide con $(**)$.
Riuniamo nella proposizione seguente alcune proprietà elementari dell' integrale.

Proposizione 2.17. *Siano $f, g \colon X \to [0, +\infty]$ due funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili e siano $E, F \in \mathcal{S}$ due insiemi $\mathcal{S}$ – misurabili. Allora,*

(a) $\displaystyle\int_E f\,d\mu = \int_X f 1_E\,d\mu;$

(b) $\displaystyle f \le g \text{ in } E \implies \int_E f\,d\mu \le \int_E g\,d\mu;$

(c) $\displaystyle E \subset F \implies \int_E f\,d\mu \le \int_F f\,d\mu;$

(d) $\displaystyle E \cap F = \varnothing \implies \int_{E\cup F} f\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_F f\,d\mu;$

(e) $\displaystyle f = 0 \text{ in } E \implies \int_E f\,d\mu = 0;$

(f) $\displaystyle \mu(E) = 0 \implies \int_E f\,d\mu = 0.$

La prima affermazione garantisce che l'integrale della funzione f sull'insieme E dipende solo dai valori assunti da f su E. Alla proprietà (b) si fa riferimento come alla proprietà di *monotonia* dell'integrale. Le successive proprietà (c) e (d) evidenziano come l'integrale di una funzione non negativa come funzione d'insiemi sia una misura finitamente additiva sulla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$. Si noti poi che (e) vale anche se $\mu(E) = +\infty$ e (f) vale anche se $f(x) = +\infty$ per ogni $x \in E$.

Dimostrazione. La validità di (c) e di (f) è evidente dalla definizione. Proviamo quindi le restanti affermazioni.

(a) Osserviamo per prima cosa che la funzione $f1_E$ è $\mathcal{S}-$misurabile (Corollario 2.13 o Teorema 2.9) e proviamo dapprima che risulta

$$\int_X f1_E\,d\mu \le \int_E f\,d\mu.$$

Sia dunque $s\colon X \to [0, +\infty)$ una funzione semplice e $\mathcal{S}-$misurabile come in $(*)$ tale che risulti $0 \le s \le f1_E$ in X e supponiamo senza perdita di generalità che risulti anche $A_{h'} \cap A_{h''} = \varnothing$ per $h' \ne h''$. Da $s = 0$ su $X \setminus E$, si ottiene $\alpha_h = 0$ per ogni h tale che $A_h \setminus E \ne \varnothing$ e quindi $\alpha_h \ne 0$ implica $A_h \setminus E = \varnothing$ da cui segue

$$\alpha_h \ne 0 \implies \mu(E \cap A_h) = \mu(E \cap A_h) + \mu(A_h \setminus E) = \mu(A_h).$$

Risulta allora

$$\int_E s\,d\mu = \alpha_1\mu(E \cap A_1) + \cdots + \alpha_k\mu(E \cap A_k) = \alpha_1\mu(A_1) + \cdots + \alpha_k\mu(A_k) = \int_X s\,d\mu$$

cosicché da $0 \le s \le f1_E \le f$ in X segue

$$\int_X s\,d\mu = \int_E s\,d\mu \le \int_E f\,d\mu$$

e da ciò segue la disuguaglianza cercata passando all'estremo superiore su s. Proviamo quindi che vale la disuguaglianza opposta

$$\int_E f\,d\mu \le \int_X f1_E\,d\mu.$$

Sia $s\colon X \to [0, +\infty)$ una funzione semplice e $\mathcal{S}-$misurabile come in $(*)$ e supponiamo adesso che si abbia $0 \le s \le f$ in X. Posto $t = s1_E$, si ha che $t\colon X \to [0, +\infty)$ è una funzione semplice e $\mathcal{S}-$misurabile e si ha

$$t = \alpha_1 1_{E\cap A_1} + \cdots + \alpha_k 1_{E\cap A_K}.$$

Inoltre, si ha $0 \le t \le f1_E$ in X e

$$\int_E s\,d\mu = \int_X t\,d\mu \le \int_X f1_E\,d\mu.$$

Passando all'estremo superiore su s, si ottiene la disuguaglianza cercata e quindi l'asserto.

(b) La disuguaglianza è ovvia quando $E = X$ ed il caso $E \in \mathcal{S}$ qualunque segue facilmente da questo e da (a).

(d) Sia $s\colon X \to [0, +\infty)$ una funzione semplice e $\mathcal{S}-$misurabile tale che risulti $0 \leq s \leq f$ in X. Allora, dalla definizione di integrale di una funzione semplice risulta

$$\int_{E\cup F} s\,d\mu = \int_E s\,d\mu + \int_F s\,d\mu \leq \int_E f\,d\mu + \int_F f\,d\mu$$

da cui segue, passando all'estremo superiore su s,

$$(****) \qquad \int_{E\cup F} f\,d\mu \leq \int_E s\,d\mu + \int_F s\,d\mu.$$

Viceversa, siano $s, t\colon X \to [0, +\infty)$ due funzioni semplici e $\mathcal{S}-$misurabili tali che risulti $0 \leq s, t \leq f$ in X. Allora, la funzione $r = \max\{s, t\}$ è ancora una funzione semplice, $\mathcal{S}-$misurabile tale che $0 \leq r \leq f$ in X e per la quale risulta

$$\max\left\{\int_G s\,d\mu, \int_G t\,d\mu\right\} \leq \int_G r\,d\mu, \qquad G \in \mathcal{S},$$

per (b). Si ha quindi

$$\int_E s\,d\mu + \int_F t\,d\mu \leq \int_E r\,d\mu + \int_F r\,d\mu = \int_{E\cup F} r\,d\mu \leq \int_{E\cup F} f\,d\mu$$

e, passando all'estremo superiore prima su s e poi su t, si ottiene la disuguaglianza opposta a $(****)$ da cui segue l'asserto.

(e) La funzione $f1_E = 0$ è identicamente nulla in X e quindi per (a) risulta

$$\int_E f\,d\mu = \int_X f1_E\,d\mu = 0. \qquad \square$$

Teorema di convergenza monotòna e conseguenze. Proviamo in questa parte il primo importante risultato sugli integrali: il *teorema di convergenza monotòna* di H. Lebesgue e di B. Levi sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale lungo successioni crescenti di funzioni misurabili non negative. La rilevanza di questo risultato in relazione alla definizione di integrale di una funzione misurabile a valori reali estesi non negativi risulta evidente non appena esso venga messo in relazione alla approssimazione di funzioni misurabili come limite di successioni crescenti funzioni semplici e misurabili (Teorema 2.9).

Teorema 2.18 (H. Lebesgue–B. Levi). *Siano $f_n\colon X \to [0, +\infty]$ $(n \geq 1)$ e sia $f\colon X \to [0, +\infty]$ funzioni con le seguenti proprietà:*

(a) *ogni funzione f_n è $\mathcal{S}$ –misurabile;*
(b) *$f_n \leq f_{n+1}$ in X;*
(c) *$f_n \to f$ puntualmente in X per $n \to +\infty$.*

Allora, f è $\mathcal{S}$ –misurabile e risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

La formula precedente si scrive anche nella più suggestiva forma

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right) d\mu$$

da cui il nome di teorema di *passaggio al limite sotto il segno d'integrale* per questo tipo di risultati.

Dimostrazione. La funzione f è $\mathcal{S}$ − misurabile (Teorema 2.7) e dalle ipotesi (a) e (b) segue

$$\int_X f_n\,d\mu \le \int_X f_{n+1}\,d\mu \qquad \text{e} \qquad \int_X f_n\,d\mu \le \int_X f\,d\mu$$

per ogni n. Sia quindi $L \in [0,+\infty]$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu = L \le \int_X f\,d\mu$$

e completiamo la dimostrazione provando che risulta

$$L \ge \int_X f\,d\mu.$$

A tale scopo, consideriamo una funzione semplice e $\mathcal{S}$ − misurabile $s\colon X \to [0,+\infty)$ come in $(*)$ per la quale si abbia $0 \le s \le f$ in X. Fissato $0 < c < 1$, poniamo $E_n = \{f_n \ge cs\}$ per $n \ge 1$. Chiaramente risulta $E_n \in \mathcal{S}$ e $E_n \subset E_{n+1}$ per ogni n e

$$\bigcup_n E_n = X.$$

Da ciò segue

$$\int_X f_n\,d\mu \ge \int_{E_n} f_n\,d\mu \ge \int_{E_n} cs\,d\mu = c\left\{\alpha_1\mu(E_n\cap A_1) + \cdots + \alpha_k\mu(E_n\cap A_k)\right\}$$

(Proposizioni 2.17 − (c) e 2.17 − (b)) cosicché per $n \to +\infty$ si trova

$$L \ge c\int_X s\,d\mu$$

(Proposizione 1.22 − (e)). Poiché questo vale per ogni $0 < c < 1$ e per ogni funzione semplice $\mathcal{S}$ − misurabile s tale che $0 \le s \le f$ in X, si ottiene la disuguaglianza cercata e questo completa la dimostrazione. □

Il teorema di convergenza monotòna ha molte ed importanti conseguenze a partire dalla linearità dell'integrale rispetto alla somma di funzioni misurabili e non negative.

Teorema 2.19. *Siano $f, g\colon X \to [0,+\infty]$ funzioni $\mathcal{S}$ − misurabili. Allora,*

(a) $\displaystyle\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$;

(b) $\displaystyle\int_X cf\,d\mu = c\int_X f\,d\mu$ *per ogni* $c \ge 0$.

Dimostrazione. (a) Siano $s, t\colon X \to [0,+\infty)$ due funzioni semplici, non negative e $\mathcal{S}$ − misurabili rappresentate da

$$s = \alpha_1 1_{A_1} + \cdots + \alpha_k 1_{A_k} \qquad \text{e} \qquad t = \beta_1 1_{B_1} + \cdots + \beta_j 1_{B_j}$$

con coefficienti $\alpha_h, \beta_i \ge 0$ e insiemi $\{A_1,\ldots,A_k\}$ e $\{B_1,\ldots,B_j\}$ costituenti due partizioni $\mathcal{S}$ − misurabili di X. La funzione somma $r = s + t$ è a sua volta semplice e $\mathcal{S}$ − misurabile ed è rappresentata da

$$r = \sum_{h,i} (\alpha_h + \beta_i) 1_{A_h\cap B_i}$$

ove la somma si intende estesa alle sole coppie di indici h, i per i quali risulta $A_h \cap B_i \ne \varnothing$. Si ha così

$$\begin{aligned}\int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu &= \sum_h \alpha_h\mu(A_h) + \sum_i \beta_i\mu(B_i) = \\ &= \sum_{h,i} \alpha_h\mu(A_h\cap B_i) + \sum_{h,i} \beta_i\mu(A_h\cap B_i) =\end{aligned}$$

$$= \sum_{h,i} (\alpha_h + \beta_i)\mu(A_h \cap B_i) = \int_X r\, d\mu.$$

e quindi (a) vale per funzioni semplici, $\mathcal{S}-$misurabili e non negative.
Consideriamo quindi due successioni crescenti di funzioni semplici e $\mathcal{S}-$misurabili tali che $s_n \to f$ e $t_n \to g$ puntualmente in X per $n \to +\infty$ (Teorema 2.9). Allora, $\{s_n + t_n\}_n$ è una successione crescente di funzioni $\mathcal{S}-$misurabili tali che $(s_n + t_n) \to (f + g)$ puntualmente in X per $n \to +\infty$ cosicché (a) segue dal caso precedente e dal teorema di convergenza monotòna.

(b) L'uguaglianza è ovvia per $c = 0$ poiché risulta $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ per convenzione. Per $c > 0$ e $s\colon X \to [0, +\infty)$ funzione semplice e $\mathcal{S}-$misurabile si ha chiaramente[2]

$$\int_X cs\, d\mu = c \int_x s\, d\mu.$$

Il caso generale si deduce nuovamente dal Teorema 2.9 e dal teorema di convergenza monotòna ragionando come in (a). □

Osservazione 2.20. La relazione di linearità espressa da (a) del teorema precedente si generalizza alla differenza di funzioni negative a valori reali estesi purché la differenza sia definita dappertutto, non negativa e la funzione che viene sottratta abbia integrale finito.
Siano infatti $f, g\colon X \to [0, +\infty]$ funzioni $\mathcal{S}-$misurabili tali che

(a) $0 \leq f(x) < +\infty$ per ogni $x \in X$;

(b) $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X$;

(c) $\displaystyle\int_X f\, d\mu < +\infty$.

In tal caso, la differenza $g - f$ è ben definita e non negativa per (a) e (b) e quindi essa è una funzione $\mathcal{S}-$misurabile per quanto osservato in Sezione 2.1. Quindi, da (a) del teorema precedente segue

$$\int_X (g - f)\, d\mu + \int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu$$

e, poiché l'integrale di f è finito per l'ipotesi (c), si ha anche

$$\int_X (g - f)\, d\mu = \int_X g\, d\mu - \int_X f\, d\mu.$$ □

La proprietà di linearità dell'integrale rispetto alla somma si estende alle serie di funzioni misurabili e non negative le quali possono essere sempre integrate termine a termine.

Teorema 2.21. *Siano $f_n\colon X \to [0, +\infty]$ $(n \geq 1)$ funzioni $\mathcal{S}-$misurabili e sia $f\colon X \to [0, +\infty]$ definita da*

$$f = \sum_n f_n.$$

Allora, f è $\mathcal{S}-$misurabile e si ha

$$\sum_n \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

Anche in questo caso la formula precedente si può scrivere nella forma

$$\sum_n \int_X f_n\, d\mu = \int_X \left(\sum_n f_n \right) d\mu.$$

[2] Abbiamo tacitamente già utilizzato questa osservazione nella dimostrazione del Teorema 2.18.

Dimostrazione. Sia $g_n = f_1 + \cdots + f_n$ $(n \geq 1)$. Ogni funzione g_n è $\mathcal{S}$ – misurabile e si ha $g_n \to f$ puntualmente in X per $n \to +\infty$ e

$$\int_X g_n \, d\mu = \sum_{1 \leq m \leq n} \int_X f_m \, d\mu$$

per ogni n. La tesi segue ora dal teorema di convergenza monotòna. □

Un'altra conseguenza del teorema di convergenza monotòna è il risultato seguente noto come *lemma di Fatou*.

Teorema 2.22 (P. Fatou). *Siano $f_n \colon X \to [0, +\infty]$ $(n \geq 1)$ funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili e sia $f \colon X \to [0, +\infty]$ definita da*

$$f = \liminf_{n \to +\infty} f_n.$$

Allora, f è $\mathcal{S}$ – misurabile e si ha

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Dimostrazione. La funzione f è $\mathcal{S}$ – misurabile (Teorema 2.7) e tutte le funzioni $g_m \colon X \to [0, +\infty]$ $(m \geq 1)$ definite da

$$g_m = \inf \{ f_n : \; n \geq m \} \qquad m \geq 1,$$

sono funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili tali che $g_m \leq g_{m+1}$ per ogni m e $g_m \to f$ puntualmente in X per $m \to +\infty$. Inoltre, si ha

$$\int_X g_m \, d\mu \leq \inf_{n \geq m} \int_X f_n \, d\mu, \qquad m \geq 1.$$

Dalla definizione di minimo limite e dal teorema di convergenza monotòna segue allora

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{m \to +\infty} \int_X g_m \, d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$ □

Esempio 2.23. Se esiste $E \in \mathcal{S}$ con $\mu(E) > 0$ e $\mu(E^c) > 0$, per la successione di funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili definita da $f_n = 1_E$ per n pari e pari e $f_n = 1_{E^c}$ per n dispari, risulta

$$\liminf_{n \to +\infty} f_n = 0 \qquad \text{e} \qquad \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \min \{ \mu(E), \mu(E^c) \} > 0$$

e la disuguaglianza del lemma di Fatou risulta stretta. □

Integrazione di funzioni uguali quasi ovunque. Mostriamo in questa parte che, come è lecito attendersi, l'integrale ignora ciò che accade sugli insiemi trascurabili e non distingue tra funzioni uguali quasi ovunque.

Teorema 2.24. *Siano $f, g \colon X \to [0, +\infty]$ funzioni tali che risulti $f = g$ μ – quasi ovunque in X. Valgono allora le seguenti affermazioni:*

(a) *se f e g sono $\mathcal{S}$ – misurabili, si ha* $\displaystyle\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$;

(b) *se μ è completa, f è $\mathcal{S}$ – misurabile se e solo se g è $\mathcal{S}$ – misurabile ed in tal caso si ha*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

Dimostrazione. (a) Gli insiemi $\{f = g\}$ e $\{f \neq g\}$ sono $\mathcal{S}-$misurabili (Esercizio 2.1) e per ipotesi risulta $\mu(\{f \neq g\}) = 0$. Si ha allora

$$\int_X f\,d\mu = \int_{\{f=g\}} f\,d\mu + \int_{\{f\neq g\}} f\,d\mu = \int_{\{f=g\}} g\,d\mu + \int_{\{f\neq g\}} g\,d\mu = \int_X g\,d\mu$$

(Proposizione 2.17−(d), 2.17−(a) e 2.17−(f)).
(b) La prima affermazione non è altro che Proposizione 2.12 e il resto della tesi segue da (a). □

È possibile invertire la conclusione di Teorema 2.24: una funzione misurabile e non negativa con integrale nullo è quasi ovunque nulla. A tal fine, proviamo la seguente disuguaglianza che è detta *disuguaglianza di Chebychev.*

Teorema 2.25. *Sia $f\colon X \to [0,+\infty]$ una funzione $\mathcal{S}$ −misurabile. Allora,*

$$\mu\bigl(\{f \geq t\}\bigr) \leq \frac{1}{t}\int_X f\,d\mu, \qquad 0 < t < +\infty.$$

Pertanto, se f è una funzione misurabile e non negativa con integrale finito, la misura dell'insieme di sopralivello $\{f \geq t\}$ tende a zero almeno come C/t per $t \to +\infty$.

Dimostrazione. L'insieme $\{f \geq t\}$ è $\mathcal{S}-$misurabile e si ha

$$t\mu\bigl(\{f \geq t\}\bigr) \leq \int_{\{f\geq t\}} f\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu, \qquad 0 < t < +\infty. \qquad \square$$

Corollario 2.26. *Sia $f\colon X \to [0,+\infty]$ una funzione $\mathcal{S}$ −misurabile. Allora,*

(a) $\displaystyle\int_X f\,d\mu = 0 \quad\Longrightarrow\quad f(x) = 0$ *per* μ −*q.o.* $x \in X$*;*

(b) $\mu(X) > 0$ *e* $f(x) > 0$ *per* μ −*q.o.* $x \in X \quad\Longrightarrow\quad \displaystyle\int_X f\,d\mu > 0$*;*

(c) $\displaystyle\int_X f\,d\mu < +\infty \quad\Longrightarrow\quad f < +\infty$ μ −*quasi ovunque in* X*.*

La prima affermazione è la proprietà inversa di quella espressa da Torema 2.24−(a) mentre la terza affermazione esprime una proprietà che ragionevolmente ci si attende da una funzione con integrale finito: essa non può essere troppo grande e in particolare uguale a $+\infty$, su un insieme che non sia molto piccolo ovvero trascurabile.

Dimostrazione. Se vale (a) si ha

$$\{f > 0\} = \bigcup_n \{f \geq 1/n\}$$

e ciascuno degli insiemi a destra è $\mu-$trascurabile per la disuguaglianza di Chebychev. Questo prova (a) e (b) è la contronominale di (a).
Infine, si ha $\{f = +\infty\} \subset \{f \geq n\}$ per ogni n e (c) segue dalla disuguaglianza di Chebychev. □

La disuguaglianza di Chebychev chiarisce anche il ruolo delle misure $\sigma-$finite.

Teorema 2.27. *Le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(a) *la misura positiva μ è σ −finita;*
(b) *esiste $f\colon X \to [0,+\infty)$ $\mathcal{S}$ −misurabile tale che*

$$f(x) > 0 \quad \forall\, x \in X \qquad e \qquad \int_X f\,d\mu < +\infty.$$

Dimostrazione. (a) Sia $X_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ una famiglia al più numerabile di insiemi tali che risulti $\mu(X_n) < +\infty$ per ogni n, $X_m \cap X_n = \varnothing$ per $m \neq n$ e

$$X = \bigcup_n X_n.$$

Possiamo supporre anche che risulti $\mu(X_n) > 0$ per ogni n. Allora, la funzione $f\colon X \to (0, +\infty)$ definita da

$$f(x) = \sum_n \frac{1}{2^n \mu(X_n)} 1_{X_n}(x), \qquad x \in X,$$

è $\mathcal{S}-$misurabile e l'integrale di f rispetto a μ su X è uguale a 1.

(b) Poniamo $X_1 = \{f \geq 1\}$ e $X_n = \{1/n \leq f < 1/(n-1)\}$ per $n \geq 2$. Si ha $X_n \in \mathcal{S}$ per ogni n e, poichè f è positiva, risulta $X = \bigcup_n X_n$. Dalla disuguaglianza di Chebychev si ricava

$$\mu(X_n) \leq n \int_X f \, d\mu < +\infty$$

per ogni n e questo prova l'asserto. □

Con la stessa dimostrazione di (b) si prova che, se $f\colon X \to [0, +\infty]$ è una funzione $\mathcal{S}-$misurabile con

$$\int_X f \, d\mu < +\infty,$$

l'insieme $\{f > 0\}$ è σ *–finito* cioè è unione di una famiglia al più numerabile di insiemi misurabili con misura finita. Quando μ è la misura del conteggio sulla $\sigma-$algebra delle parti di un insieme non numerabile X (Esempio 1.21 – (a)) si ritrova Teorema I–2.122.

Disuguaglianze di Hölder e Minkowski. Ricaviamo in questa parte le versioni per gli integrali delle disuguaglianze di Hölder e Minkowski per le somme (Proposizione I–3 e I–5 in Preliminari). Queste disuguaglianze svolgeranno un ruolo essenziale nel successivo Capitolo III–2.

Teorema 2.28. *Siano $f, g\colon X \to [0, +\infty]$ due funzioni $\mathcal{S}$ –misurabili. Allora, per ogni $1 < p, q < +\infty$ tali che $1/p + 1/q = 1$ risulta*

$$\int_X fg \, d\mu \leq \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X g^q \, d\mu \right)^{1/q}.$$

Questa disuguaglianza è la *disuguaglianza di Hölder per gli integrali* o *disuguaglianza di Hölder* in breve e, come nel caso dell'analoga disuguaglianza per le somme finite (Proposizione I–3 in Preliminari), i due numeri $p, q \in (1, +\infty)$ tali che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

che in essa compaiono compaiono si dicono *esponenti coniugati.* Per estensione la stessa terminologia si usa anche per $p = 1$ e $q = +\infty$ (e viceversa).

Dimostrazione. Poniamo

$$A = \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} \qquad \text{e} \qquad B = \left(\int_X g^q \, d\mu \right)^{1/q}.$$

Se $A = 0$, risulta $f = 0$ $\mu-$quasi ovunque in X (Corollario 2.25 – (a)) da cui segue $fg = 0$ $\mu-$quasi ovunque in X e quindi la disuguaglianza della tesi vale indipendentemente dal valore assunto da B. Se $A > 0$ e $B = +\infty$, la conclusione è ovvia e quindi dobbiamo provare la disuguaglianza solo nel caso $0 < A, B < +\infty$. Consideriamo allora le funzioni $\mathcal{S}-$misurabili $F, G\colon X \to [0, +\infty]$ definite da

$$F = f/A \qquad \text{e} \qquad G = g/B,$$

per le quali risulta

$$\int_X F^p\,d\mu = 1 = \int_X G^q\,d\mu.$$

Per ogni $x \in X$ con $0 < F(x), G(x) < +\infty$ risulta

$$0 \le F(x)G(x) = \mathrm{e}^{(\log [F(x)]^p)/p + (\log [G(x)]^q)/q} \le \frac{1}{p}[F(x)]^p + \frac{1}{q}[G(x)]^q$$

per la convessità della funzione esponenziale e la stessa disuguaglianza

$$0 \le F(x)G(x) \le \frac{1}{p}[F(x)]^p + \frac{1}{q}[G(x)]^q$$

vale banalmente anche per gli x per i quali uno dei due fattori $F(x)$ o $G(x)$ si annulla o vale $+\infty$. Integrando si trova

$$\int_X FG\,d\mu \le \frac{1}{p}\int_X F^p\,d\mu + \frac{1}{q}\int_X G^q\,d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

da cui segue l'asserto. $\square$

Teorema 2.29. *Siano $f, g\colon X \to [0, +\infty]$ due funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili. Allora, per ogni $1 \le p < +\infty$ risulta*

$$\left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Questa disuguaglianza prende il nome di *disuguaglianza di Minkowski per gli integrali* o *disuguaglianza di Minkowski* in breve.

Dimostrazione. Per $p = 1$ la conclusione è ovvia (Teorema 2.19 – (a)). Supponiamo quindi che sia $p > 1$ e supponiamo inoltre che sia

$$\left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{1/p} > 0 \qquad \text{e} \qquad \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p\,d\mu\right)^{1/p} < +\infty$$

altrimenti non c'è nulla da provare. Si ha allora

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

e dalla disuguaglianza di Hölder con esponenti coniugati p e $q = p/(p-1)$ risulta

$$\int_X f(f+g)^{p-1}\,d\mu \le \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{(p-1)/p}$$

assieme alla stessa disuguaglianza con i ruoli di f e g scambiati. Sommando si trova

$$\int_X (f+g)^p\,d\mu \le \left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{(p-1)/p} \left[\left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{1/p}\right]$$

da cui si ricava la disuguaglianza della tesi purché sia

$$0 < \int_X (f+g)^p\,d\mu < +\infty.$$

Per ogni $x \in X$ con $0 < f(x), g(x) < +\infty$ risulta

$$\left(\frac{f(x)+g(x)}{2}\right)^p \le \frac{1}{2}[f(x)]^p + [g(x)]^p$$

per la convessità della funzione $t \in (0, +\infty) \mapsto t^p$ e la stessa disuguaglianza vale banalmente anche per i restanti x. Integrando e tenendo conto delle ipotesi fatte all'inizio risulta allora

$$0 < \int_X (f+g)^p\,d\mu \le 2^{p-1}\left(\int_X f^p\,d\mu + \int_X g^p\,d\mu\right) < +\infty$$

e questo conclude la dimostrazione. $\square$

Le disuguaglianze precedenti valgono in forma rovesciata per esponenti $0 < p < 1$.

TEOREMA 2.30. *Siano* $0 < p < 1$ *e* $q < 0$ *tali che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

e siano $f, g\colon X \to [0, +\infty]$ *due funzioni* $\mathcal{S}$ *–misurabili tali che*

- $g(x) > 0$ *per ogni* $x \in X$*;*
- $\displaystyle\int_X g^q \, d\mu < +\infty$.

Allora,

$$\int_X fg \, d\mu \geq \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X g^q \, d\mu \right)^{1/q}.$$

Questa disuguaglianza prende il nome di *disuguaglianza di Hölder rovesciata.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo g positiva, si ha

$$(*****) \qquad 0 < \int_X g^q \, d\mu < +\infty$$

per ipotesi. I numeri

$$r = \frac{1}{p} \in (1, +\infty) \qquad \text{e} \qquad s = \frac{r}{r-1} = \frac{1}{1-p} \in (1, +\infty)$$

sono esponenti coniugati e le funzioni $F, G\colon X \to [0, +\infty]$ definite da

$$F = (fg)^p = (fg)^{1/r} \qquad \text{e} \qquad G = g^{-p} = g^{-1/r}$$

sono $\mathcal{S}$–misurabili. In particolare, G è ben definita per l'ipotesi fatta su g. Si ha allora $FG = f^p$, $F^r = fg$ e $G^s = g^{1/(1-r)} = g^q$ coisicché per la disuguaglianza di Hölder con esponenti coniugati r e s risulta

$$\begin{aligned} \int_X f^p \, d\mu = \int_X FG \, d\mu &\leq \left(\int_X F^r \, d\mu \right)^{1/r} \left(\int_X G^s \, d\mu \right)^{1/s} = \\ &= \left(\int_X fg \, d\mu \right)^p \left(\int_X g^q \, d\mu \right)^{1-p}. \end{aligned}$$

da cui, prendendo la radice p–esima, segue la tesi poiché vale $(*****)$ e risulta $(1-p)/p = -1/q$. $\square$

TEOREMA 2.31. *Siano* $f, g\colon X \to [0, +\infty]$ *due funzioni* $\mathcal{S}$ *–misurabili. Allora, per ogni* $0 < p < 1$ *risulta*

$$\left(\int_X (f+g)^p \, d\mu \right)^{1/p} \geq \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X g^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Questa disuguaglianza prende il nome di *disuguaglianza di Minkowski rovesciata.*

DIMOSTRAZIONE. Si ha $\max\{a^p, b^p\} \leq (a+b)^p$ per ogni $a, b \geq 0$ e $p > 0$ e

$$\max\{a^p, b^p\} \leq (a+b)^p \leq a^p + b^p, \qquad a, b \geq 0,$$

per $0 < p < 1$ cosicché risulta

$$\max\left\{ \int_X f^p \, d\mu, \int_X g^p \, d\mu \right\} \leq \int_X (f+g)^p \, d\mu \leq \int_X f^p \, d\mu + \int_X g^p \, d\mu.$$

Possiamo quindi supporre che sia

$$0 < \int_X f^p \, d\mu, \int_X g^p \, d\mu \leq \int_X (f+g)^p \, d\mu < +\infty$$

e possiamo supporre anche che sia $f(x) + g(x) > 0$ per ogni $x \in X$.

Procedendo come nella dimostrazione della disuguaglianza di Minkowski, si ha
$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$
e, posto $q = p/(p-1) < 0$, risulta
$$0 < \int_X \left[(f+g)^{p-1}\right]^q \, d\mu = \int_X (f+g)^p \, d\mu < +\infty.$$
Per la disuguaglianza di Hölder rovesciata con esponenti p e q si ha allora
$$\int_X (f+g)^p \, d\mu \geq \left(\int_X (f+g)^p \, d\mu\right)^{(p-1)/p} \left[\left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p \, d\mu\right)^{1/p}\right]$$
da cui, con le stesse considerazioni fatte nella dimostrazione della disuguaglianza di Minkowski, segue la tesi. □

Integrale indefinito e assoluta continuità dell'integrale. La definizione di integrale che abbiamo introdotto permette di costruire nuove misure positive mediante integrazione delle funzioni misurabili non negative.

Teorema 2.32. *Sia $f\colon X \to [0,+\infty]$ una funzione $\mathcal{S}$ – misurabile e sia*
$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu, \qquad E \in \mathcal{S}.$$
Allora,

(a) *ν è una misura positiva su $\mathcal{S}$;*
(b) *per ogni funzione $g\colon X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$ – misurabile, si ha*
$$\int_E g \, d\nu = \int_E gf \, d\mu, \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Dimostrazione. (a) Abbiamo già osservato a margine di Proposizione 2.17 che la funzione d'insiemi ν è una misura finitamente additiva sulla σ – algebra $\mathcal{S}$. Resta quindi da provare soltanto che essa è anche numerabilmente additiva su $\mathcal{S}$. A tale scopo, consideriamo una famiglia numerabile $\{E_n\}_n$ di insiemi $\mathcal{S}$ – misurabili tali che $E_m \cap E_n = \varnothing$ per $m \neq n$ e sia $E = \bigcup_n E_n$. Si ha
$$f1_E = \sum_n f1_{E_n}$$
puntualmente in X cosicché da Teorema 2.21 e da Proposizione 2.17 – (a) si ottiene
$$\nu(E) = \int_X f1_E \, d\mu = \sum_n \int_X f1_{E_n} \, d\mu = \sum_n \nu(E_n).$$
(b) Sia $s\colon X \to [0,+\infty)$ una funzione semplice, non negativa e $\mathcal{S}$ – misurabile come in $(*)$. Si ha allora
$$\int_E s \, d\nu = \alpha_1 \nu(E \cap A_1) + \cdots + \alpha_k \nu(E \cap A_k) = \alpha_1 \int_{E\cap A_1} f \, d\mu + \cdots + \alpha_k \int_{E \cap A_k} f \, d\mu$$
da cui, essendo $1_{E \cap A_h} = 1_E \cdot 1_{A_h}$, segue
$$\int_{E \cap A_h} f \, d\mu = \int_X f1_{E\cap A_h} \, d\mu = \int_X f1_{A_h} 1_E \, d\mu = \int_E f1_{A_h} \, d\mu$$
(Proposizione 2.17 – (a)). Risulta pertanto
$$\int_E s \, d\nu = \int_E fs \, d\mu$$
(Teorema 2.19) e il caso generale si ottiene da questo e dal teorema di convergenza monotòna approssimando la funzione g con una successione crescente di funzioni semplici, non negative e $\mathcal{S}$ – misurabili (Teorema 2.9). □

Il teorema precedente suggerisce suggestive analogie almeno a livello formale con altri risultati ben noti. La prima affermazione richiama in qualche modo nella forma la definizione di primitiva di una funzione come integrale della funzione stessa (teorema fondamentale del calcolo) e in questo senso la misura positiva ν sulla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ definita sopra prende il nome di *integrale indefinito di f rispetto a μ* e si denota con

$$\nu = \int f \, d\mu.$$

La seconda affermazione che richiama la formula di integrazione per sostituzione si può riscrivere nella forma $d\nu = f d\mu$ da cui formalmente segue

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}$$

cosicché, coerentemente con la definizione precedente, almeno formalmente f risulta essere la derivata del suo integrale indefinito. In questo senso, la funzione f prende il nome di *derivata di Radon-Nikodym di ν rispetto a μ.*

È necessario tuttavia essere prudenti con queste suggestioni: l'analogia tra (a) ed il teorema fondamentale del calcolo resta confinata per ora a livello di notazione e la formula $d\nu = f d\mu$ non ha altro significato se non quello espresso da (b). Ciò premesso, vedremo tuttavia più avanti nei successivi Capitoli 6 e **??** che queste analogie non sono formali ma, sotto opportune ipotesi, esprimono relazioni che effettivamente esistono tra gli oggetti considerati. In particolare, sotto ipotesi opportune, la derivata di Radon–Nikodym di una misura si calcola effettivamente come derivata cioè come limite di rapporti incrementali relativi alle misure ν e μ (Teorema **??**).

Il teorema precedente solleva in modo naturale il problema di stabilire quali misure positive ν su $\mathcal{S}$ siano l'integrale indefinito di qualche funzione $\mathcal{S}-$misurabile e non negativa rispetto ad un'assegnata misura positiva μ su $\mathcal{S}$. Esamineremo questo problema nel successivo Capitolo 4. In questa direzione ci limitiamo qui a provare il risultato seguente.

TEOREMA 2.33. *Sia $f\colon X \to [0, +\infty]$ una funzione $\mathcal{S}$ – misurabile tale che*

$$\int_X f \, d\mu < +\infty.$$

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$E \in \mathcal{S}, \quad \mu(E) \le \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \int_E f \, d\mu \le \varepsilon.$$

Alla proprietà espressa dal teorema precedente si fa riferimento dicendo che l'integrale indefinito di f rispetto a μ è *assolutamente μ – continuo* o *assolutamente continuo rispetto a μ.*

DIMOSTRAZIONE. Se risulta $0 \le f(x) \le M$ per ogni $x \in X$ per qualche $M > 0$, la tesi vale banalmente con $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/M$. Se invece f è illimitata, consideriamo le funzioni $f_n\colon X \to [0, +\infty]$ $(n \ge 1)$ definite da

$$f_n = \min\{f, n\}, \qquad n \ge 1.$$

Ogni funzione f_n è $\mathcal{S}-$misurabile e limitata. Inoltre, $f_n \le f_{n+1}$ in X per ogni n e $f_n \to f$ puntualmente in X per $n \to +\infty$ cosicché si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

per il teorema di convergenza monotòna. Fissato $\varepsilon > 0$, sia dunque $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \int_X f\, d\mu - \int_X f_n\, d\mu \leq \varepsilon/2$$

da cui segue

$$0 \leq \int_E (f - f_n)\, d\mu \leq \int_X (f - f_n)\, d\mu = \int_X f\, d\mu - \int_X f_n\, d\mu \leq \varepsilon/2$$

per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ e per ogni $n \geq n_0$ (Osservazione 2.20). Scelto dunque $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon/2n_0$, per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ tale che $\mu(E) \leq \delta$ risulta

$$0 \leq \int_E f\, d\mu = \int_E f_{n_0}\, d\mu + \int_E (f - f_{n_0})\, d\mu \leq n_0 \mu(E) + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

e questo completa la dimostrazione. □

Integrazione di funzioni definite su sottoinsiemi. Concludiamo questa sezione osservando che nelle applicazioni si incontrano frequentemente funzioni che non sono definite su tutto l'insieme ambiente X sul quale è assegnata la $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ e la misura positiva μ ma solo su sottoinsiemi propri $Y \in \mathcal{S}$ di X. A tali funzioni i risultati precedenti non sono formalmente applicabili ma questa difficoltà può essere facilmente superata. In tal caso infatti, come già evidenziato in precedenza, possiamo considerare la restrizione ad Y della $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$, cioè la $\sigma-$algebra

$$\mathcal{S}(Y) = \big\{E \in \mathcal{S} :\ E \subset Y\big\}$$

costituita da tutti gli insiemi $\mathcal{S}-$misurabili contenuti in Y e possiamo considerare la restrizione μ_Y di μ ad $\mathcal{S}(Y)$ che è a sua volta una misura positiva su $\mathcal{S}(Y)$ cosicchè tutti i risultati precedenti si applicano a funzioni $f\colon Y \to [0, +\infty]$ relativamente alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}(Y)$ ed alla misura positiva μ_Y. Poiché il sistematico ed esplicito riferimento alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}(Y)$ e alla misura μ_Y renderebbe pesanti le notazioni, quando $Y \in \mathcal{S}$ e $f\colon Y \to [0, +\infty]$ è una funzione, conveniamo di dire con abuso di linguaggio che

- f è $\mathcal{S}$ *–misurabile in* Y se f è $\mathcal{S}(Y)-$misurabile;

e, coerentemente con questo abuso di linguaggio, conveniamo di denotare ancora con μ la misura positiva μ_Y definita sulla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}(Y)$. Con queste convenzioni, tutti i risultati di questa sezione continuano a valere per funzioni definite su un insieme $Y \in \mathcal{S}$ a patto di sostituire semplicemente X con Y e di sostituire l'espressione "$\mathcal{S}-$misurabile" con l'espressione "$\mathcal{S}-$misurabile in Y" in tutti gli enunciati.
Ad esempio, se $f, g\colon Y \to [0, +\infty]$ sono due funzioni $\mathcal{S}-$misurabili in Y e $E \in \mathcal{S}$, $E \subset Y$, l'implicazione di Proposizione 2.17–(b) diviene

$$f \leq g \text{ su } E \qquad \Longrightarrow \qquad \int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$$

oppure, se $f_n\colon Y \to [0, +\infty]$ $(n \geq 1)$ e $f\colon Y \to [0, +\infty]$ sono funzioni $\mathcal{S}-$misurabili in Y tali che $f_n \leq f_{n+1}$ su Y e $f_n \to f$ puntualmente su y per $n \to +\infty$, la conclusione del teorema di convergenza monotòna diviene che f è $\mathcal{S}-$misurabile in Y e si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \int_Y f_n\, d\mu = \int_Y f\, d\mu.$$

Analogamente si procede per tutti gli altri risultati che abbiamo visto in questa sezione.
Alternativamente, anziché lasciare invariata la funzione f e stabilire delle convenzioni per cui $\mathcal{S}$ sta per $\mathcal{S}(Y)$ e μ sta per μ_Y, possiamo lasciare invariate $\mathcal{S}$ e μ e stabilire

una opportuna convenzione per f. Se $Y \subset X$ è un insieme e $f\colon Y \to [0,+\infty]$ è una funzione, conveniamo di denotare con

$$f_Y(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in Y \\ 0 & \text{se } x \notin Y \end{cases}$$

la funzione ottenuta estendendo f con zero fuori da Y. In questo modo, quando $Y \in \mathcal{S}$, si ha che f è $\mathcal{S}$ – misurabile in Y se e solo se f_Y è $\mathcal{S}$ – misurabile ed in tal caso poniamo per definizione

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f_Y\, d\mu, \qquad E \in \mathcal{S}, \quad E \subset Y.$$

In questo modo, tutti i risultati di questa sezione valgono a patto di sostituire come abbiamo già detto X con Y e di sostituire l'espressione "$\mathcal{S}$ – misurabile" con l'espressione "$\mathcal{S}$ – misurabile in Y" in tutti gli enunciati e di interpretare gli integrali rispetto a μ di funzioni definite solo su Y come integrali rispetto a μ delle estensioni nulle fuori da Y.

2.3. Integrazione di funzioni misurabili reali o complesse

Estendiamo in questa parte le definizioni ed i risultati della sezione precedente al caso di funzioni misurabili a valori reali di segno qualunque o a valori complessi. Poniamo a tal fine $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e denotiamo anche in questa sezione con $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva (non nulla) fissata su una σ – algebra $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi di un insieme astratto (non vuoto) X.

Integrale e funzioni integrabili. Definiamo l'integrale di una funzione misurabile considerando dapprima il caso di funzioni a valori reali estesi.
Sia $f\colon X \to \mathbb{R}_\infty$ una funzione $\mathcal{S}$ – misurabile per la quale risulti

$$\int_X f^+\, d\mu < +\infty \qquad \text{o} \qquad \int_X f^-\, d\mu < +\infty.$$

In tal caso, il numero reale esteso

$$(*) \qquad \int_E f\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu, \qquad E \in \mathcal{S},$$

si dice *integrale di f rispetto a μ su $E \in \mathcal{S}$*.
Questa definizione è ben posta poiché, quando f è $\mathcal{S}$ – misurabile con valori reali estesi, la sua parte positiva f^+ e la sua parte negativa f^- sono funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili a valori reali estesi non negativi tali che

$$0 \le \int_E f^\pm\, d\mu \le \int_X f^\pm\, d\mu, \qquad E \in \mathcal{S},$$

e almeno uno dei due integrali a destra è finito cosicché l'integrale di f rispetto a μ su un qualunque insieme $E \in \mathcal{S}$ è ben definito dalla formula $(*)$ come numero reale esteso.
Dopo aver definito l'integrale di una funzione $\mathcal{S}$ – misurabile a valori reali estesi, definiamo ora la classe delle funzioni a valori reali o complessi integrabili rispetto alla misura positiva μ.

Definizione 2.34. Una funzione $\mathcal{S}$ – misurabile $f\colon X \to \mathbb{K}$ tale che

$$\int_X |f|\, d\mu < +\infty$$

si dice *μ – integrabile in X*. □

Anche in questo caso la definizione è ben posta poiché, quando f è $\mathcal{S}-$misurabile, la funzione $|f|$ è a sua volta $\mathcal{S}-$misurabile e non negativa (Proposizione 2.4 $-$ (c)). Inoltre, se la funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ è $\mu-$integrabile con valori reali o se $f\colon X \to \mathbb{C}$ è $\mu-$integrabile con valori complessi con $f = u + iv$ e $u, v\colon X \to \mathbb{R}$ parte reale e parte immaginaria, la funzione f stessa (se reale) o la sua parte reale u e la sua parte immaginaria v (se complessa) risultano essere funzioni $\mathcal{S}-$misurabili reali e gli integrali di $f^{\pm}$ o di $u^{\pm}$ e $v^{\pm}$ rispetto a μ su X a seconda che f sia reale o complessa sono tutti finiti poiché si ha

$$0 \leq \int_X f^{\pm}\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu < +\infty$$

quando f è reale ovvero

$$0 \leq \int_X u^{\pm}\, d\mu \leq \int_X |u|\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu < +\infty;$$
$$0 \leq \int_X v^{\pm}\, d\mu \leq \int_X |v|\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu < +\infty;$$

quando f è complessa e l'integrale di f rispetto a μ su un qualunque insieme $E \in \mathcal{S}$ risulta essere ben definito dalla formula $(*)$ come numero reale quando f è a valori reali reale ovvero dalla formula

$$\begin{aligned}\int_E f\, d\mu &= \int_E u\, d\mu + i\int_E v\, d\mu = \\ &= \left(\int_E u^+\, d\mu - \int_E u^-\, d\mu\right) + i\left(\int_E v^+\, d\mu - \int_E v^-\, d\mu\right), \qquad E \in \mathcal{S},\end{aligned}$$

come numero complesso quando f è a valori complessi.
È importante evidenziare che, mentre l'integrale di una funzione misurabile a valori reali estesi è definito (quando possibile) come numero reale esteso, le funzioni integrabili sono per definizione funzioni a valori reali o complessi e quindi finite in tutti i punti e l'integrale di una funzione integrabile è sempre un numero reale o complesso.

Esempio 2.35. Sia # la misura del conteggio sulla $\sigma-$algebra delle parti di un insieme X (Esempio 1.21 $-$ (a)) e sia $f\colon X \to \mathbb{K}$ una funzione. Allora,

$$f \text{ è } \mu-\text{integrabile in } X \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ è sommabile in } X$$

nel senso di Definizione I–2.121 e in tal caso risulta

$$\int_X f\, d\# = \sum_{x\in X} f(x).$$

In particolare, Teorema I–2.123 risulta essere un caso particolare di Teorema 2.27. $\square$

Riuniamo nella proposizione seguente quelle proprietà dell'integrale che seguono immediatamente dalla definizione e dalle corrispondenti proprietà dell'integrale di funzioni non negative (Proposizione 2.17).

Proposizione 2.36. *Siano $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ funzioni $\mu-$integrabili e sia $E \in \mathcal{S}$ un insieme $\mathcal{S}-$misurabile. Allora*

(a) $f1_E$ *è $\mu-$integrabile in X e* $\displaystyle\int_E f\, d\mu = \int_X f1_E\, d\mu$;

(b) $f = 0$ *su* $E \implies \displaystyle\int_E f\, d\mu = 0$;

(c) $\mu(E) = 0 \implies \displaystyle\int_E f\, d\mu = 0$.

Inoltre, se f e g sono funzioni a valori reali, risulta

(d) $f \leq g$ *su* $E \implies \displaystyle\int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu.$

All'ultima proprietà si fa nuovamente riferimento come alla proprietà di *monotonia* dell'integrale. Passiamo quindi ad esaminare le proprietà di linearità delle funzioni integrabili e dell'integrale.

TEOREMA 2.37. *Siano* $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ *funzioni* μ – *integrabili in* X *e siano* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *numeri reali o complessi. Allora,*

(a) $(\alpha f + \beta g)$ *è* μ – *integrabile in* X*;*

(b) $\displaystyle\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu + \beta \int_X g\,d\mu$*;*

(c) $\displaystyle\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu.$

L'insieme delle funzioni integrabili rispetto a una misra positiva è quindi uno spazio vettoriale e l'integrale è un funzionale lineare su di esso.

DIMOSTRAZIONE. (a) La funzione $(\alpha f + \beta g)$ è $\mathcal{S}$ – misurabile con

$$\int_X |\alpha f + \beta g|\,d\mu \leq \int_X \big(|\alpha||f| + |\beta||g|\big)\,d\mu = |\alpha| \int_X |f|\,d\mu + |\beta| \int_X |g|\,d\mu < +\infty$$

(Teorema 2.19) e quindi $(\alpha f + \beta g)$ è μ – integrabile su X.
(b) Proviamo che risulta

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu \qquad \text{e} \qquad \int_X (\alpha f)\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ e, a tal fine, consideriamo dapprima il caso di funzioni $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ a valori reali e di coefficienti $\alpha \in \mathbb{R}$. Si ha per la somma[3]

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

da cui segue

$$\int_X \left[(f+g)^+ + f^- + g^-\right]\,d\mu = \int_X \left[(f+g)^- + f^+ + g^+\right]\,d\mu$$

cosicché, essendo tutti gli integrali finiti, risulta

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$$

(Teorema 2.19 – (a)). Per la seconda formula, per $\alpha \geq 0$ risulta $(\alpha f)^\pm = \alpha f^\pm$ da cui segue

$$\int_X (\alpha f)\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu$$

(Teorema 2.19 – (b)) mentre per $\alpha < 0$ risulta $(\alpha f)^\pm = |\alpha| f^\mp$ da cui segue

$$\begin{aligned}\int_X (\alpha f)\,d\mu &= \int_X (\alpha f)^+\,d\mu - \int_X (\alpha f)^-\,d\mu = \\ &= |\alpha| \int_X f^-\,d\mu - |\alpha| \int_X f^+\,d\mu = \alpha \int_X f^+\,d\mu - \alpha \int_X f^-\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu.\end{aligned}$$

Infine, nel caso complesso la formula per la somma e la seconda formula limitatamente al caso $\alpha \in \mathbb{R}$ seguono facilmente dalle corrispondenti formule per il caso reale applicate alla parte reale e alla parte immaginaria. Per la seconda formula con

[3] Attenzione: $(f+g)^+$ non è uguale a $f^+ + g^+$!

coefficiente $\alpha \in \mathbb{C}$, sia dapprima $\alpha = i$ e sia $f = u + iv$ con $u, v \colon X \to \mathbb{R}$ parte reale e parte immaginaria di f. Si ha allora

$$\int_X (if)\, d\mu = \int_X (-v + iu)\, d\mu = -\int_X v\, d\mu + i \int_X u\, d\mu = i \int_X f\, d\mu$$

e il caso generale per la seconda formula segue facilmente da questo e dal caso reale.

(c) Supponiamo che la funzione f sia a valori complessi altrimenti la conclusione è ovvia. Sia quindi $\theta \in \mathbb{C}$ un numero complesso con modulo $|\theta| \leq 1$ tale che risulti

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| = \theta \left(\int_X f\, d\mu \right)$$

e sia $u \colon X \to \mathbb{R}$ la parte reale di (θf). Si ha allora $u \leq |\theta f| \leq |f|$ da cui segue integrando

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| = \theta \left(\int_X f\, d\mu \right) = \int_X (\theta f)\, d\mu = \int_X u\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu. \qquad \square$$

Infine, avendo in mente la Definizione 2.34, possiamo rienunciare nel caso di funzioni integrabili a valori reali o complessi alcuni dei risultati della sezione precedente. Le dimostrazioni, ove non fornite esplicitamente, sono conseguenza della definizione di integrale di una funzione integrabile e delle corrispondenti proprietà dell'integrale di funzioni non negative.

Teorema 2.38. *Sia $f \colon X \to \mathbb{K}$ una funzione μ – integrabile in X. Allora,*

(a) *per ogni $E, F \in \mathcal{S}$ tali che $E \cap F = \varnothing$, si ha*

$$\int_{E \cup F} f\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_F f\, d\mu;$$

(b) *per ogni $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ con $E_m \cap E_n = \varnothing$ per $m \neq n$, posto $E = \bigcup_n E_n$ si ha*

$$\int_E f\, d\mu = \sum_n \int_{E_n} f\, d\mu.$$

Queste affermazioni, corrispondenti a Proposizione 2.17 – (d) e Teorema 2.32 – (a) rispettivamente, esprimono la finita e la numerabile additività dell'integrale di funzioni μ – integrabili.

Teorema 2.39. *Siano $f, g \colon X \to \mathbb{K}$ funzioni con $f = g$ μ – quasi ovunque in X. Allora,*

(a) *se f e g sono μ – integrabili in X, si ha*

$$\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

(b) *se μ è completa, f è μ – integrabile in X se e solo se g è μ – integrabile in X e in tal caso si ha*

$$\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso di funzioni f e g a valori reali e sia $T \subset X$ un insieme μ – trascurabile tale che $\{f \neq g\} \subset T$. Per ogni $x \in \{f^+ > 0\} \setminus T$ si ha

$$0 < f^+(x) = f^+(x) - f^-(x) = f(x) = g(x) = g^+(x) - g^-(x) = g^+(x)$$

e quindi, scambiando il ruolo di f e g, si conclude che risulta $f^+ = g^+$ μ – quasi ovunque in X. Analogamente si procede per f^- e g^- e la conclusione segue allora da Teorema 2.24 e dalla definizione di integrale. Il caso complesso segue in modo ovvio dal caso reale. $\square$

Per l'integrale di funzioni di segno qualunque non vi è ovviamente un risultato analogo a Corollario 2.26 – (a). Vale però il seguente risultato più debole.

TEOREMA 2.40. *Sia $f\colon X \to \mathbb{K}$ una funzione μ – integrabile in X tale che risulti*

$$\int_E f\,d\mu = 0 \qquad \textit{per ogni } E \in \mathcal{S}.$$

Allora, $f = 0$ μ – quasi ovunque in X.

DIMOSTRAZIONE. Sia dapprima f a valori reali. Da $|f| = f^+ + f^-$ e dalle proprietà dell'integrale segue

$$0 \leq \int_X |f|\,d\mu = \int_X f^+\,d\mu + \int_X f^-\,d\mu = \int_{\{f>0\}} f\,d\mu - \int_{\{f<0\}} f\,d\mu = 0.$$

e deve quindi essere $f = 0$ μ – quasi ovunque in X (Corollario 2.26 – (a)).
Nel caso complesso, sia $f = u + iv$ con u e v parte reale e parte immaginaria di f rispettivamente. Si ha allora per ipotesi

$$\int_E u\,d\mu = \int_E v\,d\mu = 0 \qquad \text{per ogni } E \in \mathcal{S}$$

cosicché risulta $u = 0$ e $v = 0$ μ – quasi ovunque in X per quanto provato sopra. Da $0 \leq |f| \leq |u| + |v|$ segue la conclusione. □

Concludiamo questa parte con una importante disuguaglianza integrale per funzioni a valori reali legata alla convessità al cui enunciato è conveniente premettere la notazione seguente: se $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ è una misura positiva e $E \in \mathcal{S}$ è un insieme $\mathcal{S}$ – misurabile con $0 < \mu(E) < +\infty$ e $f\colon E \to \mathbb{K}$ è una funzione integrabile in E, poniamo

$$[f]_E = \fint_E f\,d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu.$$

Il numero così definito si dice *media* o *valore di aspettazione di f in E.*

TEOREMA 2.41 (J. Jensen). *Sia μ una misura positiva finita con $\mu(X) > 0$ e siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e $u\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione con le seguenti proprietà:*

- *u è μ – integrabile in X;*
- *$u(x) \in I$ per ogni $x \in X$.*

Allora,

(a) $\displaystyle\fint_X u\,d\mu \in I$;

(b) *$f \circ u$ è $\mathcal{S}$ – misurabile con* $\displaystyle\int_X f^- \circ u\,d\mu < +\infty$;

(c) $\displaystyle f\left(\fint_X u\,d\mu\right) \leq \fint_X f \circ u\,d\mu.$

La disuguaglianza in (c) prende il nome di *diuguaglianza di Jensen.* L'integrale che compare a destra può essere uguale a $+\infty$.

DIMOSTRAZIONE. (a) Se risulta $\alpha = \inf I > -\infty$, si ha $u(x) \geq \alpha$ per ogni $x \in X$ per ipotesi e da ciò segue $[u]_X \geq \alpha$. Se fosse $\alpha \notin I$, si avrebbe $u(x) > \alpha$ per ogni x e da ciò seguirebbe $[u]_X > \alpha$. Allo stesso modo si prova che, se risulta $\beta = \sup I < +\infty$, si ha $[u]_X \leq \beta$ e $[u]_X < \beta$ quando $\beta \notin I$. Questo prova (a).
(b) La restrizione di f a $\operatorname{int}(I)$ è continua (Esercizio 23 in [14]) e quindi, per ogni aperto V di $\mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(V) \cap \operatorname{int}(I)$ è un insieme di Borel che differisce

da $f^{-1}(V)$ per al più uno o due punti. Quindi f è una funzione di Borel e $f \circ u$ risulta $\mathcal{S}-$misurabile. L'altra affermazione segue dalla dimostrazione di (c).

(c) Supponiamo dapprima che sia $\alpha = \inf I > -\infty$ e che risulti $[u]_X = \alpha$ cosicché, essendo $u(x) \geq \alpha$ per ogni x, risulta $u(x) = \alpha$ per $\mu-$q.o. $x \in X$ e quindi non è restrittivo supporre che sia $u(x) = \alpha$ per ogni $x \in X$ nel qual caso (c) è ovvia. Lo stesso accade se risulta $\beta = \sup I < +\infty$ e $[u]_X = \beta$. Possiamo quindi supporre che sia

$$t = [u]_X \in \operatorname{int}(I).$$

Essendo f convessa, risulta

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}, \qquad s, u \in I \text{ e } s < t < u,$$

(Esercizio 23 in [14]) cosicché, posto

$$l = \sup \left\{ \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \,:\, s \in I \text{ e } s < t \right\},$$

risulta

$$f(s) \geq f(t) + l(s - t), \qquad s \in I.$$

Sia ora $E^- = \{f^- \circ u > 0\}$. Ponendo $s = u(x)$ con $x \in E^-$ nella disuguaglianza precedente risulta

$$-f^- \circ u(x) = f^+ \circ u(x) - f^- \circ u(x) = f \circ u(x) \geq f(t) + l\left[u(x) - t\right]$$

e quindi integrando si trova

$$0 \leq \int_{E^-} f^- \circ u \, d\mu \leq l \left(t\mu(E^-) - \int_{E^-} u \, d\mu \right) - f(t) < +\infty.$$

Questo completa la dimostrazione di (b) e scegliendo nuovamente $s = u(x)$ e integrando su X nella disuguaglianza di prima si ottiene la tesi. $\square$

Teorema di convergenza dominata e conseguenze. Proviamo in questa parte il teorema di *convergenza dominata di Lebesgue*, il più importante teorema di passaggio al limite sotto il segno d'integrale e uno dei risultati principali di tutta la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue.

TEOREMA 2.42 (H. Lebesgue). *Siano $f_n \colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ e $f \colon X \to \mathbb{K}$ funzioni con le seguenti proprietà:*

(a) *ogni f_n è $\mu-$integrabile in X;*
(b) *$f_n \to f$ puntualmente in X per $n \to +\infty$;*
(c) *esiste una funzione $g \colon X \to [0, +\infty]$ $\mathcal{S}-$misurabile tale che*

- $|f_n(x)| \leq g(x), \qquad x \in X, \quad n \geq 1,$
- $\displaystyle\int_X g \, d\mu < +\infty.$

Allora, f è $\mu-$integrabile in X e risulta

$$(**) \qquad \lim_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

La funzione g che compare nell'ipotesi (c) prende il nome di *maggiorante integrabile*[4] per la successione $\{f_n\}_n$. Poiché si ha

$$0 \leq \left| \int_E f_n \, d\mu - \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$$

[4] Si tratta di un abuso di linguaggio poiché la funzione g può assumere valore $+\infty$ nel qual caso essa non è $\mu-$integrabile ai sensi della Definizione 2.34.

per ogni $E \in \mathcal{S}$, dal teorema si deduce in particolare che risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

uniformemente rispetto ad $E \in \mathcal{S}$.

Dimostrazione. La funzione f è $\mathcal{S}$ − misurabile (Teorema 2.7 − (b)) e verifica $|f| \le g$ in X. Quindi f è μ − integrabile in X. Applicando il lemma di Fatou alla successione di funzioni $\mathcal{S}$ − misurabili e non negative $h_n\colon X \to [0,+\infty]$ definite da

$$h_n(x) = 2g(x) - |f_n(x) - f(x)|, \qquad x \in X \quad (n \ge 1),$$

e tenendo conto di Osservazione 2.20 e delle proprietà del massimo limite, si ottiene

$$\int_X 2g \, d\mu \le \liminf_{n\to+\infty} \int_X \bigl(2g - |f_n - f|\bigr) \, d\mu = \int_X 2g \, d\mu - \limsup_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu.$$

Poiché l'integrale di g rispetto a μ in X è finito, deve essere

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$$

e questo completa la dimostrazione. □

Nel caso di una misura completa il teorema di convergenza dominata vale con la sola ipotesi di convergenza quasi ovunque.

Corollario 2.43. *Sia μ una misura completa e siano $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ $(n \ge 1)$ e $f\colon X \to \mathbb{K}$ funzioni con le seguenti proprietà:*

(a) *ogni f_n è μ − integrabile in X;*
(b) *$f_n \to f$ μ − quasi ovunque in X per $n \to +\infty$;*
(c) *esiste una funzione $g\colon X \to [0,+\infty)$ μ − integrabile in X tale che*

$$|f_n(x)| \le g(x), \qquad \text{per } \mu\text{ − q.o. } x \in X$$

per ogni n.

Allora, f è μ − integrabile in X e risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

Nel caso delle serie di funzioni, il teorema di convergenza dominata prende la forma seguente.

Teorema 2.44. *Siano $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ $(n \ge 1)$ e $f\colon X \to \mathbb{K}$ funzioni con le seguenti proprietà:*

(a) *ogni f_n è μ − integrabile in X;*
(b) $\displaystyle\sum_n f_n = f$ *puntualmente in X;*
(c) $\displaystyle\sum_n \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty$.

Allora, f è μ − integrabile in X e risulta

$$\int_X f \, d\mu = \sum_n \int_X f_n \, d\mu.$$

Dimostrazione. Sia $g\colon X \to [0,+\infty]$ la funzione definita da

$$g(x) = \sum_n |f_n(x)|, \qquad x \in X.$$

Essa è $\mathcal{S}-$misurabile e tale che

$$\int_X g\, d\mu = \sum_n \int_X |f_n|\, d\mu < +\infty$$

(Teorema 2.21). La funzione g è una maggiorante integrabile per la successione delle somme parziali della serie che compare in (b) e la conclusione segue quindi dal teorema di convergenza dominata. □

Osservazione 2.45. Nel teorema precedente l'ipotesi di convergenza della serie di funzioni in (b) è in effetti contenuta nell'ipotesi (c). Se infatti si omette l'ipotesi (b), l'enunciato del teorema continua a valere con la tesi seguente: esiste una funzione $f\colon X \to \mathbb{K}$ $\mu-$integrabile in X tale che

- $f(x) = \sum_n f_n(x)$ per $\mu-$q.o. $x \in X$;
- $\int_X f\, d\mu = \sum_n \int_X f_n\, d\mu.$

Infatti, la funzione g della dimostrazione di Teorema 2.44 precedente è finita $\mu-$quasi ovunque (Corollario 2.26− (b)) e quindi la serie di funzioni

$$\sum_n f_n$$

converge assolutamente $\mu-$quasi ovunque in X. Pertanto, l'insieme $T = \{g = +\infty\}$ è $\mathcal{S}-$misurabile e $\mu-$trascurabile e, posto

$$f(x) = \begin{cases} \sum_n f_n(x) & x \in X \setminus T \\ 0 & x \in T, \end{cases}$$

si procede come nel caso precedente. □

Il teorema di convergenza dominata di Lebesgue merita qualche commento ulteriore, segnatamente a riguardo del ruolo dell'ipotesi di esistenza di una maggiorante integrabile per la successione di funzioni. Tale ipotesi fornisce infatti una condizione che è solo sufficiente affinché dalle ipotesi (a) e (b) dell'enunciato segua la tesi e tuttavia essa non può essere omessa neanche qualora si assuma in aggiunta alle ipotesi (a) e (b) che la funzione limite stessa f sia $\mu-$integrabile[5] come provano gli esempi seguenti.

Esempio 2.46. Sia # la misura del conteggio sulla $\sigma-$algebra delle parti di $\mathbb{N}_+$ (Esempio 1.21 − (a)).

(a) Siano $f_n\colon \mathbb{N}_+ \to [0,+\infty)$ $(n \geq 1)$ le funzioni definite da

$$f_n(m) = \begin{cases} 1/n & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases} \qquad m \geq 1, \quad (n \geq 1).$$

Chiaramente, $f_n \to 0$ puntualmente su $\mathbb{N}_+$ per $n \to +\infty$ e così pure risulta

$$\int_{\mathbb{N}_+} f_n\, d\# = \frac{1}{n} \to 0$$

[5] A differenza di quanto accade per l'integrale di Riemann (Teorema **XXX** in []).

per $n \to +\infty$. Ma la più piccola maggiorante g per la successione $\{f_n\}_n$ è evidentemente la funzione g definita da $g(m) = 1/m$ per $m \geq 1$ per la quale si ha

$$\int_{\mathbb{N}_+} g\, d\# = \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m} = +\infty.$$

(b) Siano $f_n \colon \mathbb{N}_+ \to [0, +\infty)$ $(n \geq 1)$ le funzioni definite da

$$f_n(m) = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases} \qquad m \geq 1, \quad (n \geq 1).$$

Come prima, $f_n \to 0$ puntualmente su $\mathbb{N}_+$ per $n \to +\infty$ ma in questo caso risulta

$$\int_{\mathbb{N}_+} f_n\, d\# = 1$$

per ogni n. □

Queste considerazioni sollevano in modo naturale il problema di caratterizzare le successioni di funzioni $\{f_n\}_n$ che verificano le ipotesi (a) e (b) del teorema di convergenza dominata per le quali sia vera la tesi del teorema stesso, ovvero si abbia f $\mu-$integrabile e valga $(**)$. Tale caratterizzazione è fornita dal seguente teorema di *convergenza di Vitali.*

TEOREMA 2.47 (G. Vitali). *Siano $f_n \colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ e $f \colon X \to \mathbb{K}$ funzioni con le seguenti proprietà:*

- *ogni f_n è $\mu-$integrabile in X;*
- *$f_n \to f$ puntualmente in X per $n \to +\infty$;*

Allora, le affermazioni seguenti sono equivalenti:

(a) *la successione $\{f_n\}_n$ verifica le seguenti proprietà:*
- *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $E_\varepsilon \in \mathcal{S}$ con $\mu(E_\varepsilon) < +\infty$ tale che*

$$\sup_{n\geq 1} \int_{X\setminus E_\varepsilon} |f_n|\, d\mu \leq \varepsilon;$$

- *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che*

$$E \in \mathcal{S} \text{ e } \mu(E) \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{n\geq 1} \int_E |f_n|\, d\mu \leq \varepsilon;$$

(b) *f è $\mu-$integrabile in X e risulta* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0.$

L'esistenza di una maggiorante integrabile g per la successione $\{f_n\}_n$ evidentemente assicura la validità di (a).

DIMOSTRAZIONE. Siano

$$X_n = \{f_n \neq 0\} \quad (n \geq 1) \qquad \text{e} \qquad X_\infty = \bigcup\nolimits_n X_n.$$

Ogni funzione f_n e di conseguenza anche f è nulla al di fuori di X_∞ e inoltre ogni insieme X_n è $\sigma-$finito (Teorema 2.27) cosicché lo stesso vale per X_∞. Pertanto, la restrizione di μ alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}(X_\infty) = \{E \in \mathcal{S} :\ E \subset X_\infty\}$ è una misura positiva $\sigma-$finita tale che

$$\int_E f_n\, d\mu = \int_{E\cap X_\infty} f_n\, d\mu \quad \text{e} \quad \int_E |f|\, d\mu = \int_{E\cap X_\infty} |f|\, d\mu$$

per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ e per ogni n. Conseguentemente, non è restrittivo supporre che μ stessa sia una misura positiva $\sigma-$finita.

(a) Sia $\varepsilon > 0$. Per la prima proprietà in (a) esiste $E_\varepsilon \in \mathcal{S}$ con $\mu(E_\varepsilon) < +\infty$ tale che risulti

$$\int_{X\setminus E_\varepsilon} |f_n - f_m|\, d\mu \le \varepsilon/3, \qquad m, n \ge 1,$$

e per la seconda proprietà (a) esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che risulti

$$E \in \mathcal{S} \text{ e } \mu(E) \le \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \int_E |f_n - f_m|\, d\mu \le \varepsilon/3, \quad m, n \ge 1.$$

Conseguentemente, per il teorema di Severini–Egorov (Teorema 2.76), esiste un insieme $F_\varepsilon \in \mathcal{S}$ con $F_\varepsilon \subset E_\varepsilon$ e $\mu(E_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \le \delta$ tale che $f_n \to f$ uniformemente su F_ε per $n \to +\infty$. Scegliamo quindi $n_0 = n_0(\varepsilon) \ge 1$ tale che si abbia

$$m, n \ge n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - f_m(x)| \le \frac{\varepsilon}{3\left[\mu(F_\varepsilon) + 1\right]}, \quad x \in F_\varepsilon.$$

Si ha quindi per $m, n \ge n_0$

$$\int_X |f_n - f_m|\, d\mu = \int_{F_\varepsilon} |f_n - f_m|\, d\mu + \int_{E_\varepsilon\setminus F_\varepsilon} |f_n - f_m|\, d\mu + \int_{X\setminus E_\varepsilon} |f_n - f_m|\, d\mu \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{3\left[\mu(F_\varepsilon) + 1\right]}\mu(F_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \le \varepsilon.$$

Dal lemma di Fatou (Teorema 2.22) segue dunque

$$\int_X |f_n - f|\, d\mu \le \varepsilon$$

per ogni $n \ge n_0$ e questo prova che f è $\mu-$integrabile in X e che risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

(b) Essendo μ una misura $\sigma-$finita, esiste una successione di insiemi $\mathcal{S}-$misurabili $\{X_h\}_h$ tali che si abbia $X_h \subset X_{h+1}$ e $\mu(X_h) < +\infty$ per ogni h e $X = \bigcup_h X_h$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $n_0 = n_0(\varepsilon) \ge 2$ tale che risulti

$$(***) \qquad \int_X |f_n - f|\, d\mu \le \varepsilon/2$$

per $n \ge n_0$. Poiché gli integrali indefiniti

$$\nu = \int |f|\, d\mu \quad \text{e} \quad \nu_n = \int |f_n|\, d\mu$$

sono misure positive finite su $\mathcal{S}$, esiste h tale che

$$\int_{X\setminus X_h} |f|\, d\mu \le \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad \int_{X\setminus X_h} |f_n|\, d\mu \le \varepsilon$$

per $n = 1, \ldots, n_0 - 1$. Pertanto, posto $E_\varepsilon = X_h$, si ha $\mu(E_\varepsilon) < +\infty$ e

$$\int_{X\setminus E_\varepsilon} |f_n|\, d\mu \le \varepsilon$$

per tutti gli indici n compresi tra 1 ed $n_0 - 1$ e

$$\int_{X\setminus E_\varepsilon} |f_n|\, d\mu \le \int_{X\setminus E_\varepsilon} |f|\, d\mu + \int_{X\setminus E_\varepsilon} |f_n - f|\, d\mu \le \varepsilon$$

per i restanti $n \ge n_0$ e questo prova la prima parte di (a). Per provare la seconda parte di (a), sia ancora $n_0 = n_0(\varepsilon) \ge 2$ associato a $\varepsilon > 0$ in modo che valga $(***)$ e, per Teorema 2.33, sia $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che risulti

$$E \in \mathcal{S} \text{ e } \mu(E) \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_E |f_n|\, d\mu \leq \varepsilon, & n = 1, \dots n_0 - 1 \\ \displaystyle\int_E |f|\, d\mu \leq \varepsilon/2. \end{cases}$$

Per ogni insieme E siffatto risulta

$$\int_E |f_n|\, d\mu \leq \varepsilon, \qquad n = 1, \dots, n_0 - 1,$$

e al contempo risulta

$$\int_E |f_n|\, d\mu \leq \int_E |f|\, d\mu + \int_E |f_n - f|\, d\mu \leq \varepsilon$$

per i restanti $n \geq n_0$ e questo completa la dimostrazione. □

2.4. Misura e integrazione in spazi prodotto

Costruiamo in questa sezione una misura sul prodotto cartesiano di due insiemi a partire da due misure definite su $\sigma-$algebre di insiemi dei due fattori ed esaminiamo l'integrazione di funzioni rispetto a tale misura prodotto.

Prodotto di $\sigma-$algebre e misure. Siano X e Y due insiemi (non vuoti) che supponiamo fissati in tutta questa parte e siano $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ due $\sigma-$algebre di insiemi di X e di Y rispettivamente. La $\sigma-$algebra di $X \times Y$ definita da

$$\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{N})$$

si dice *$\sigma-$algebra prodotto di $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$.*
Gli insiemi che generano la $\sigma-$algebra prodotto $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ ovvero gli insiemi R di $X \times Y$ della forma

$$R = A \times B$$

con $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$ si dicono *rettangoli misurabili di $X \times Y$.* La collezione di tali rettangoli verifica le ipotesi di Proposizione 1.6 e quindi la collezione di insiemi

$$\mathcal{E}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) = \big\{E = R_1 \cup \dots \cup R_n : \ R_1, \dots, R_n \text{ rettangoli misurabili disgiunti}\big\}$$

formata dalle unioni finite di rettangoli misurabili disgiunti è un'algebra di insiemi di $X \times Y$ i cui elementi si dicono *insiemi misurabili elementari di $X \times Y$.* Nel seguito scriveremo brevemente $\mathcal{E}$ in luogo di $\mathcal{E}(\mathcal{M} \times \mathcal{N})$ quando il riferimento all'insieme $X \times Y$ sia superfluo. La $\sigma-$algebra prodotto $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ coincide quindi con la $\sigma-$algebra generata dagli insiemi misurabili elementari di $X \times Y$.
Consideriamo ora due misure positive $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ e $\nu\colon \mathcal{N} \to [0, +\infty]$ sulle $\sigma-$algebre $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ di insiemi di X e di Y rispettivamente e definiamo la funzione $\mu \otimes \nu\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ ponendo

$$\mu \otimes \nu(R) = \mu(A)\nu(B),$$

per ogni rettangolo misurabile $R = A \times B$ ($A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$) con l'usuale convenzione per cui risulta $0 \cdot \infty = 0$ e

$$(*) \qquad \mu \otimes \nu(E) = \sum_{1 \leq m \leq n} \mu \otimes \nu(R_m),$$

per ogni insieme misurabile elementare $E = R_1 \cup \dots \cup R_n \in \mathcal{E}$. La funzione $\mu \otimes \nu$ è effettivamente ben definita su $\mathcal{E}$ anche se la rappresentazione degli insiemi di $\mathcal{E}$ come unione di rettangoli misurabili disgiunti non è unica. Siano infatti $R_m = A_m \times B_m$

$(m = 1, \dots, n)$ e $S_h = C_h \times D_h$ $(h = 1, \dots, k)$ due famiglie di rettangoli misurabili disgiunti tali che

$$E = R_1 \cup \cdots \cup R_n = S_1 \cup \cdots \cup S_k.$$

Si ha allora

$$\sum_{1 \le m \le n} 1_{A_m}(x) 1_{B_m}(y) = 1_E(x, y) = \sum_{1 \le h \le k} 1_{C_h}(x) 1_{D_h}(y),$$

per ogni $(x, y) \in X \times Y$ e integrando prima rispetto a μ per ogni y fissato e poi rispetto a ν risulta

$$\sum_{1 \le m \le n} \mu(A_m)\nu(B_m) = \sum_{1 \le h \le k} \mu(C_h)\nu(D_h).$$

TEOREMA 2.48. *Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ due spazi con misura. Allora, la funzione $\mu \otimes \nu \colon \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ definita da $(*)$ è una premisura su $\mathcal{E}$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $E = R_1 \cup \cdots \cup R_n$ e $F = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ due insiemi misurabili elementari disgiunti. Si ha allora

$$\begin{aligned}\mu \otimes \nu(E \cup F) &= \mu \otimes \nu(R_1) + \cdots + \mu \otimes \nu(R_n) + \mu \otimes \nu(S_1) + \cdots + \mu \otimes \nu(S_k) = \\ &= \mu \otimes \nu(E_1) + \mu \otimes \nu(E_2)\end{aligned}$$

e quindi $\mu \otimes \nu$ è una misura finitamente additiva su $\mathcal{E}$. Resta quindi da provare che $\mu \otimes \nu$ è numerabilmente additiva su $\mathcal{E}$. Siano quindi $E_n \in \mathcal{E}$ $(n \ge 1)$ insiemi misurabili elementari disgiunti tali che $E = \bigcup_n E_n \in \mathcal{E}$. Non è restrittivo supporre che sia $E_n \ne \varnothing$ per ogni n. Esiste allora una successione di rettangoli misurabili disgiunti $R_k = A_k \times B_k$ $(k \ge 1)$ ed una successione strettamente crescente di interi k_n $(n \ge 0)$ con $k_0 = 1$ tale che

$$E_n = R_{k_{n-1}} \cup \cdots \cup R_{k_n}, \qquad n \ge 1.$$

Non è inoltre restrittivo supporre che l'insieme E sia un rettangolo misurabile $R = A \times B$. Si ha allora

$$1_A(x) 1_B(y) = 1_{A \times B}(x, y) = \sum_k 1_{A_k \times B_k}(x, y) = \sum_k 1_{A_k}(x) 1_{B_k}(y)$$

per ogni x e y e integrando termine a termine prima rispetto a μ per ogni y fissato e poi rispetto a ν si ottiene

$$\mu \otimes \nu(E) = \sum_n \mu \otimes \nu(E_n)$$

e questo prova l'asserto. $\square$

Essendo $\mu \otimes \nu$ una premisura sull'algebra $\mathcal{E}$, essa si estende ad una misura positiva sulla $\sigma-$algebra $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ definita come restrizione a $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ della misura indotta dalla premisura $\mu \otimes \nu$ (Teorema 1.46). Denotiamo tale estensione con lo stesso simbolo $\mu \otimes \nu$. Si ha quindi per definizione

$$(**) \quad \mu \otimes \nu(E) = \inf \left\{ \sum_n \mu(A_n)\nu(B_n) : \ A_n \in \mathcal{M},\ B_n \in \mathcal{N} \text{ e } E \subset \bigcup\nolimits_n A_n \times B_n \right\}$$

per ogni insieme $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ e risulta in particolare

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

per ogni rettangolo misurabile $A \times B$ $(A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N})$. Inoltre, se le misure positive μ e ν sono $\sigma-$finite, tale è anche la premisura $\mu \otimes \nu$ e in tal caso la misura prodotto è univocamente determinata su $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ dalla formula precedente. (Teorema 1.47). Formalizziamo tutto ciò nella definizione seguente.

DEFINIZIONE 2.49. Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ due spazi con misura. La misura positiva

$$\mu \otimes \nu \colon \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \to [0, +\infty]$$

definita da $(**)$ si dice *misura prodotto di* μ *e* ν. □

Esaminiamo ora come ridurre il calcolo della misura prodotto alla misura di sottoinsiemi dei due fattori. Richiamiamo a tal fine le seguenti notazioni[6]: dato un insieme $A \subset X \times Y$, denotiamo con

$$A_x = \{y \in \mathbb{R}^N : (x, y) \in A\} \qquad \text{e} \qquad A^y = \{x \in \mathbb{R}^M : (x, y) \in A\}$$

le sezioni di A ad $x \in X$ e $y \in Y$ fissati ed illustriamo nel risultato seguente la relazione tra misurabilità di un insieme rispetto alla $\sigma-$algebra prodotto e misurabilità delle sezioni.

PROPOSIZIONE 2.50. *Siano* $\mathcal{M}$ *e* $\mathcal{N}$ *due* $\sigma-$*algebre di* X *e di* Y *rispettivamente e sia* $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ *un insieme* $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}-$*misurabile. Allora,*

(a) $E_x \in \mathcal{N}$ *per ogni* $x \in X$*;*
(b) $E^y \in \mathcal{M}$ *per ogni* $y \in Y$*.*

L'implicazione precedente non può essere invertita: la misurabilità delle sezioni non implica in genere la misurabilità dell'insieme rispetto alla $\sigma-$algebra prodotto (Esempio 2.52).

DIMOSTRAZIONE. La collezione degli insiemi $E \subset X \times Y$ tali che $E_x \in \mathcal{N}$ per ogni $x \in X$ è una $\sigma-$algebra di insiemi che contiene i rettangoli misurabili di $X \times Y$. Questo prova (a) e la dimostrazione di (b) è uguale. □

TEOREMA 2.51. *Siano* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *due spazi con misurae* $\sigma-$*finita e sia* $E \subset X \times Y$ *un insieme* $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}-$*misurabile. Allora, la funzione*

$$x \in X \mapsto \nu(E_x) \in [0, +\infty]$$

è $\mathcal{M}-$*misurabile e si ha*

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x).$$

Questa formula per il calcolo della misura prodotto prende il nome di *formula di riduzione*. Vale inoltre ovviamente un enunciato speculare con i ruoli di X ed Y scambiati cosicché risulta

$$\int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \mu \otimes \nu(E) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y).$$

DIMOSTRAZIONE. (a) La collezione degli insiemi $E \subset X \times Y$ tali che $E_x \in \mathcal{N}$ per ogni $x \in X$ è una $\sigma-$algebra di insiemi che contiene i rettangoli misurabili di $X \times Y$.

(b) Supponiamo dapprima che sia

$$\mu(X) < +\infty \qquad \text{e} \qquad \nu(Y) < +\infty.$$

Denotiamo quindi con $\mathcal{S}$ la collezione degli insiemi $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ per i quali valgono le affermazioni in (b) e proviamo che

- $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$;
- $\mathcal{S}$ è una classe monotòna.

[6] Queste notazioni sono già state utilizzate in Corollario I–2.46.

Relativamente alla prima affermazione, sia $E \in \mathcal{E}$ un insieme misurabile elementare della forma $E = R_1 \cup \cdots \cup R_n$ con $R_m = A_m \times B_m$ rettangoli misurabili disgiunti ($A_m \in \mathcal{M}$ e $B_m \in \mathcal{N}$ per $m = 1, \ldots, n$). Si ha allora

$$E_x = \bigcup_{m:\, x \in A_m} B_m$$

e per $x \in A_{m_1} \cap A_{m_2}$ con $m_1 \neq m_2$ risulta $B_{m_1} \cap B_{m_2} = \varnothing$. Risulta quindi

$$\nu(E_x) = \sum_{1 \leq m \leq n} \nu(B_m) 1_{A_m}(x), \qquad x \in X,$$

da cui segue $E \in \mathcal{S}$ e questo prova l'inclusione di $\mathcal{E}$ in $\mathcal{S}$.
Siano quindi $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ insiemi tali che $E_n \subset E_{n+1}$ per ogni n e sia $E = \bigcup_n E_n$. Risulta allora $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ con $E_x = \bigcup_n (E_n)_x$ e $(E_n)_x \subset (E_{n+1})_x$ per ogni x cosicché si ha

$$\nu(E_x) = \lim_{n \to +\infty} \nu((E_n)_x)$$

per ogni x (Proposizione 1.22 – (b)). La funzione $x \in X \mapsto \nu(E_x)$ è quindi $\mathcal{M}$ – misurabile e si ha

$$\mu \otimes \nu(E) = \lim_{n \to +\infty} \mu \otimes \nu(E_n) = \lim_{n \to +\infty} \int_X \nu((E_n)_x)\, d\mu(x) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x)$$

per il teorema di convergenza monotòna cosicché risulta $E \in \mathcal{S}$. In maniera analoga, utilizzando il teorema di convergenza dominata e l'ipotesi che μ e ν siano misure positive finite, si prova che, se $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ sono insiemi tali che $E_{n+1} \subset E_n$ per ogni n, risulta $E = \bigcap_n E_n \in \mathcal{S}$ e questo completa la dimostrazione della seconda affermazione.
Denotata infine con $m(\mathcal{E})$ la classe monotòna generata da $\mathcal{E}$ risulta

$$\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{E}) = m(\mathcal{E}) \subset \mathcal{S}$$

(Teorema 1.16) e questo conclude la dimostrazione nell'ipotesi che μ e ν siano misure positive finite.
Siano quindi $\{X_m\}_m$ e $\{Y_n\}_n$ due partizioni $\mathcal{M}$ – misurabili e $\mathcal{N}$– misurabili di X e Y ripettivamente tali che $\mu(X_m) < +\infty$ e $\nu(Y_n) < +\infty$ per ogni m e n e consideriamo le restrizioni

$$\mu_m = \mu \llcorner X_m \qquad \text{e} \qquad \nu_n = \nu \llcorner Y_n$$

di μ a X_m e di ν a Y_n rispettivamente. Si allora

$$\nu(E_x) = \sum_n \nu(E_x \cap Y_n) = \sum_n \nu_n(E_x)$$

per ogni x cosicché, essendo ν_n una misura positiva finita, la funzione $x \in X \mapsto \nu(E_x)$ risulta $\mathcal{M}$ – misurabie per la prima parte della dimostrazione.
Consideriamo quindi la restrizione

$$(\mu \otimes \nu)_{m,n} = (\mu \otimes \nu) \llcorner (X_m \times Y_n)$$

di $\mu \otimes \nu$ a $X_m \times Y_n$ e proviamo che essa coincide con la misura prodotto delle restrizioni μ_m e ν_n. Si ha infatti

$$\begin{aligned}
(\mu \otimes \nu)_{m,n}(A \times B) &= \mu \otimes \nu((A \times B) \cap (X_m \cap Y_n)) = \\
&= \mu \otimes \nu((A \times X_m) \cap (B \cap Y_n)) = \\
&= \mu(A \cap X_m)\nu(B \cap Y_n) = \\
&= \mu_m(A)\nu_n(B) = \\
&= \mu_m \otimes \nu_n(A \times B)
\end{aligned}$$

per ogni rettangolo misurabile ($A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$) e quindi, essendo μ_m e ν_n misure positive finite, la loro misura prodotto è univocamente individuata dai valori assunti sui rettangoli misurabili coiscché risulta

$$(\mu \otimes \nu)_{m,n}(E) = \mu_m \otimes \nu_n(E), \qquad E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}\mu \otimes \nu(E) = \sum_{m,n} \mu \otimes \nu(E \cap (X_m \times Y_n)) &= \sum_{m,n} (\mu \otimes \nu)_{m,n}(E) = \\ &= \sum_{m,n} \mu_m \otimes \nu_n(E) =\end{aligned}$$

e quindi, poiché μ_m e ν_n sono misure positive finite, per la prima parte della dimostrazione risulta

$$\begin{aligned}&= \sum_{m,n} \int_X \nu_n(E_x)\, d\mu_m(x) = \\ &= \sum_{m,n} \int_X \nu(E_x \cap Y_n) 1_{X_m}(x)\, d\mu(x) = \\ &= \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x)\end{aligned}$$

e questo conclude la dimostrazione di (b). □

Nel teorema precedente l'ipotesi di misurabilità dell'insieme E rispetto alla $\sigma-$algebra prodotto $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ e l'ipotesi che le misure positive μ e ν siano $\sigma-$finite non possono essere eliminate: può infatti accadere che tutte le sezioni E_x e E^y siano $\mathcal{N}-$misurabili e $\mathcal{M}-$misurabili rispettivamente e che le misure delle sezioni $x \in X \mapsto \nu(E_x)$ e $y \in Y \mapsto \mu(E^y)$ siano a loro volta $\mu-$integrabili in X e $\nu-$integrabili in Y rispettivamente senza che i relativi integrali siano uguali come illustrato negli esempi seguenti.

Esempio 2.52. Con le notazioni di Sezione I–1.4, siano Ω il più piccolo numero ordinale non numerabile e P_Ω l'insieme ben ordinato dei numeri ordinali minori di Ω (Teorema I–1.18). Siano inoltre

- $\mathcal{S}$ la $\sigma-$algebra degli insiemi di P_Ω numerabili o conumerabili (Esempio 1.9);
- $\mu \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ la misura positiva definita da

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } E^{\mathrm{c}} \text{ al più numerabile} \\ 0 & \text{se } E \text{ al più numerabile} \end{cases} \qquad E \in \mathcal{S},$$

e $A \subset P_\Omega \times P_\Omega$ l'insieme definito da

$$A = \big\{(\alpha, \beta) : \ \beta < \alpha\big\}.$$

Tutte le sezioni di A sono $\mathcal{S}-$misurabili poiché risulta $A_\alpha = P_\alpha$ e $(A^\beta)^{\mathrm{c}} = P_\beta \cup \{\beta\}$ per ogni α e β e tutti gli insiemi P_γ sono al più numerabili per $\gamma < \Omega$ (Teorema I–1.18). Risulta quindi

$$\begin{aligned}\mu(A_\alpha) = 0 \quad \forall\, \alpha \in P_\Omega \qquad &\Longrightarrow \qquad \int_{P_\Omega} \mu(A_\alpha)\, d\mu(\alpha) = 0; \\ \mu(A^\beta) = 1 \quad \forall\, \beta \in P_\Omega \qquad &\Longrightarrow \qquad \int_{P_\Omega} \mu(A^\beta)\, d\mu(\beta) = 1.\end{aligned}$$

L'insieme A non è dunque $\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}-$misurabile altrimenti gli integrali delle misure delle sezioni sarebbero entrambi uguali a $\mu \otimes \mu(A)$ (Teorema 2.51). □

ESEMPIO 2.53. Sia $\nu = \#$ la misura del conteggio sulla $\sigma-$algebra delle parti di $[0,1]$ e sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva di Borel su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di $[0,1]$ tale che risulti $\mu(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$ e $\mu([0,1] = 1$. Come vedremo nel successivo Capitolo 5, la restrizione all'intervallo $[0,1]$ della $\sigma-$algebra e della misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ hanno tali proprietà.
La diagonale

$$\Delta = \big\{(x,y) : \; x = y\big\}$$

del quadrato $[0,1] \times [0,1]$ è un insieme $\mathcal{S} \otimes \mathcal{P}([0,1])-$misurabile poiché è della forma

$$\Delta = \bigcap_n \big(Q_{n,1} \cup \cdots \cup Q_{n,n}\big)$$

e gli insiemi $Q_{m,n}$ sono i cubi

$$Q_{n,m} = [(m-1)/n, m/n] \times [(m-1)/n, m/n], \qquad m = 1,\dots,n$$

che sono $\mathcal{S} \otimes \mathcal{P}([0,1])-$misurabili. Risulta allora

$$\#(\Delta_x) = 1 \quad \forall\, x \in [0,1] \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{[0,1]} \#(\Delta_x)\, d\mu(x) = 1;$$

$$\mu(\Delta^y) = 0 \quad \forall\, y \in [0,1] \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{[0,1]} \mu(\Delta^y)\, d\#(y) = 0.$$

In questo caso la non validità di Teorema 2.51 è conseguenza del fatto che la misura del conteggio in $[0,1]$ non è una misura $\sigma-$finita. □

Teoremi di Fubini–Tonelli. La formula di riduzione per la misura prodotto di un insieme $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}-$misurabile (Teorema 2.51) ha un corrispettivo per gli integrali che illustriamo in questa parte. A tal fine, data una funzione $f\colon E \to Z$ a valori in un insieme arbitrario Z, conveniamo di denotare con

$$f_x\colon Y \to Z \qquad f_x(y) = f(x,y), \quad y \in Y;$$
$$f^y\colon X \to Z \qquad f_x(y) = f(x,y), \quad y \in X;$$

le sezioni di f ad $x \in X$ e $y \in Y$ fissati rispettivamente. Dalle uguaglianze

$$(f_x)^{-1}(V) = [f^{-1}(V)]_x \qquad \text{e} \qquad (f^y)^{-1}(V) = [f^{-1}(V)]^y$$

$(x \in X,\, y \in Y$ e $V \subset Z)$ segue immediatamente la misurabilità delle sezioni di una funzione misurabile rispetto alla $\sigma-$algebra prodotto.

PROPOSIZIONE 2.54. *Siano $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ due $\sigma-$algebre di X e di Y rispettivamente e Z uno spazio topologico e sia $f\colon X \times Y \to Z$ una funzione $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}-$misurabile. Allora,*

(a) $f_x\colon Y \to [0,+\infty]$ *è $\mathcal{N}-$misurabile per ogni $x \in X$;*
(b) $f^y\colon X \to [0,+\infty]$ *è $\mathcal{M}-$misurabile per ogni $Y \in Y$.*

La formula di riduzione per gli integrali di funzioni misurabili e non negative assume allora la forma seguente.

TEOREMA 2.55 (G. Fubini–L. Tonelli I). *Siano $(X,\mathcal{M},\mu)$ e $(Y,\mathcal{N},\nu)$ due spazi con misura $\sigma-$finita e sia $f\colon X \times Y \to [0,+\infty]$ una funzione $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}-$misurabile. Allora,*

(a) *la funzione $\varphi\colon X \to [0,+\infty]$ definita da*

$$\varphi(x) = \int_Y f_x(y)\, d\nu(y), \qquad x \in X;$$

è $\mathcal{N}-$misurabile;

(b) *si ha*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X \varphi(x)d\mu(x).$$

L'uguaglianza in (b) si riscrive in maniera più suggestiva nella forma

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x).$$

L'integrale a sinistra che è fatto rispetto alla misura prodotto è detto integrale doppio di f mentre i due integrali a destra sono detti integrali iterati di f rispetto a ν e μ nell'ordine. Vale ovviamente un analogo risultato in cui i ruoli dei due fattori X e Y sono scambiati e quindi nelle ipotesi del teorema risulta

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x).$$

Gli integrali iterati di una funzione $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}-$misurabile e non negativa sono quindi uguali indipendentemente dall'ordine di integrazione e coincidono con l'integrale della funzione rispetto alla misura prodotto.
Gli esempi del paragrafo precedente relativi alla formula di riduzione per la misura prodotto (Esempi 2.52 e 2.53) mostrano che nessuna delle ipotesi del teorema può essere indebolita anche se, nel caso della misura del conteggio, il teorema vale per ogni funzione non negativa indipendentemente dall'ipotesi che la misura sia $\sigma-$finita (Esercizio I–2.29).

Dimostrazione. Sia $s\colon X\times Y\to[0,+\infty)$ una funzione semplice, non negativa e $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}-$misurabile della forma

$$s(x,y) = \alpha_1 1_{E_1}(x,y) + \cdots + \alpha_k 1_{E_k}(x,y), \qquad (x,y)\in X\times Y,$$

($\alpha_h \geq 0$ e $E_h\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ $h=1,\dots,k$). L'integrale rispetto a ν della sua sezione ad x fissato è

$$\int_Y s_x(y)\,d\nu(y) = \alpha_1\nu((E_1)_x + + \cdots + \alpha_k\nu((E_k)_x).$$

e risulta quindi essere una funzione $\mathcal{M}-$misurabile di x (Teorema 2.51). Integrando rispetto a μ risulta infine

$$\begin{aligned}\int_X \left(\int_Y s_x(y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) &= \sum_{1\leq h\leq k} \alpha_h \int_X \nu((E_h)_x)\,d\mu(x) = \\ &= \sum_{1\leq h\leq k} \alpha_h \mu\otimes\nu(E_h) = \int_{X\times Y} s\,d(\mu\otimes\nu)\end{aligned}$$

(Teorema 2.51) e questo prova la tesi nel caso di una funzione semplice, non negativa e $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}-$misurabile. Infine nel caso di una funzione $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}-$misurabile $f\colon X\times Y\to[0,+\infty]$ si procede per approssimazione mediante una successione crescente di funzioni semplici, non negative e $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}-$misurabili (Teorema 2.9) utilizzando il teorema di convergenza monotòna. □

Nel caso di funzioni complesse la formula di riduzione assume la forma seguente.

Teorema 2.56 (G. Fubini–L. Tonelli II). *Siano $(X,\mathcal{M},\mu)$ e $(Y,\mathcal{N},\nu)$ due spazi con misura $\sigma-$finita e sia $f\colon X\times Y\to\mathbb{K}$ una funzione $(\mu\otimes\nu)-$integrabile. Allora, esiste $T\subset X$ insieme $\mu-$trascurabile tale che*

(a) *la sezione $y\in Y\mapsto f_x(y)\in\mathbb{K}$ è $\nu-$integrabile per ogni $x\in X\setminus T$;*

(b) *la funzione* $\varphi \colon X \to \mathbb{K}$ *definita da*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_Y f_x(y)\, d\nu(y) & \text{se } x \in X \setminus T \\ 0 & \text{se } x \in T \end{cases}$$

è $\mu-$*integrabile e si ha*

$$(***) \qquad \int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X \varphi(x)\, d\nu(x).$$

Con abuso di notazione l'uguaglianza in $(***)$ si riscrive in maniera più suggestiva nella forma seguente

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

con la stessa terminologia già introdotta per le funzioni non negative. Vale ovviamente un analogo enunciato in cui i ruoli delle due misure μ e ν sono scambiati cosicché nelle ipotesi del teorema si ha l'uguaglianza degli integrali iterati

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

che coincidono con l'integrale di f rispetto alla misura prodotto $\mu\otimes\nu$.

Dimostrazione. È sufficiente considerare il caso di una funzione f a valori reali, il caso complesso segue in modo ovvio.

(a) Si ha $|f|_x = |f_x|$ per ogni x e quindi da

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X\times Y} |f|\, d(\mu\otimes\nu) < +\infty$$

(Teorema 2.55) segue che la funzione $y \in Y \mapsto f_x(y)$ deve essere $\nu-$integrabile per $\mu-$q.o. $x \in X$.

(b) Essendo f e $f^{\pm}$ funzioni $(\mu\otimes\nu)-$integrabili, esiste un insieme $\mu-$trascurabile T contenuto in X tale che f_x e $(f^{\pm})_x$ siano $\nu-$integrabili per ogni $x \in X \setminus T$. Si ha evidentemente $(f^{\pm})_x = (f_x)^{\pm}$ per ogni x e quindi le funzioni $\varphi^{\pm} \colon X \to [0,+\infty]$ definite da

$$\varphi^{\pm}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_Y f_x^{\pm}(y)\, d\nu(y) & \text{se } x \in X \setminus T \\ 0 & \text{se } x \in T \end{cases}$$

sono $\mathcal{M}-$ misurabili con

$$\int_X \varphi^{\pm}\, d\mu = \int_{X\times Y} f^{\pm}\, d(\mu\otimes\nu) < +\infty$$

(Teorema 2.55). Per la funzione φ definita in (b) risulta quindi $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ cosicché essa è $\mu-$integrabile con

$$\begin{aligned} \int_X \varphi\, d\mu &= \int_X \varphi^+\, d\mu - \int_X \varphi^-\, d\mu = \\ &= \int_{X\times Y} f^+\, d(\mu\otimes\nu) - \int_{X\times Y} f^-\, d(\mu\otimes\nu) \qquad = \int_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\nu) \end{aligned}$$

e questo completa la dimostrazione. □

Gli esempi seguenti mostrano che l'insieme $\mu-$trascurabile $T \subset X$ dei punti x per i quali la sezione f_x di f non è $\nu-$integrabile può effettivamente essere non vuoto e che, se f non è una funzione $(\mu\otimes\nu)-$integrabile, gli integrali iterati possono esistere entrambi ma essere diversi.

Esempio 2.57. (a) Sia $\#$ la misura del conteggio su $\mathbb{N}$ (Esempio 1.21) e siano μ e ν le misure positive su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definite da

$$\mu(E) = \nu(E) = \#(E \cap \mathbb{N}_+), \qquad E \subset \mathbb{N},$$

e sia $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da

$$f(m,n) = \begin{cases} (-1)^{m+n} & \text{se } mn = 0 \\ 1/(mn)^2 & \text{se } mn \neq 0. \end{cases}$$

Allora,

$$\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |f| d(\mu \otimes \nu) = \sum_{m,n\geq 1} \frac{1}{(mn)^2} < +\infty$$

ma le sezioni $m \in \mathbb{N} \mapsto f(m,0) = (-1)^m$ e $n \in \mathbb{N} \mapsto f(0,n) = (-1)^n$ non sono $\nu-$integrabili e $\mu-$integrabili rispettivamente.

(b) La serie doppia $\{a_{m,n}\}_{m,n}$ definita da

$$a_{m,n} = \sum_{k\geq 0} (\delta_{k,m} - \delta_{k+1,m})\delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ -1 & \text{se } m = n+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per ogni $m,n \in \mathbb{N}$ non è sommabile (Sezione I–2.4) poiché risulta

$$\sum_{m,n} |a_{m,n}| = +\infty$$

e per le serie doppie corrispondenti agli integrali iterati rispetto alla misura del conteggio su $\mathbb{N}$ risulta

$$\sum_n \sum_m a_{m,n} = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_m \sum_n a_{m,n} = 1. \qquad \square$$

I due teoremi di Fubini–Tonelli sono solitamente utilizzati in coppia per stabilire l'integrabilità rispetto alla misura prodotto e quindi calcolare l'integrale di una funzione $f\colon X \times Y \to \mathbb{K}$ nella maniera seguente: a partire dall'ipotesi che f sia $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}-$misurabile, si verifica che risulti

$$\int_{X\times Y} |f(x,y)|\, d(\mu \otimes \nu)(x,y) < +\infty$$

calcolando tale integrale come uno dei due integrali iterati nell'ordine più conveniente sulla base del teorema di Fubini–Tonelli per funzioni non negative (Teorema 2.55). A questo punto, per il teorema di Fubini–Tonelli per funzioni integrabili reali o complesse (Teorema 2.56), l'integrale

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y)$$

può essere calcolato mediante uno dei due integrali iterati

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

nell'ordine più conveniente per il calcolo. Un esempio di applicazione di questa considerazione è fornito dalla seguente formula per l'integrale del prodotto tensoriale di funzioni.

Corollario 2.58. *Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ due spazi con misura $\sigma-$finita e siano $f\colon X \to \mathbb{K}$ e $g\colon Y \to \mathbb{K}$ due funzioni $\mu-$ e $\nu-$integrabili rispettivamente. Allora, la funzione*

$$f \otimes g(x,y) = f(x)g(y), \qquad (x,y) \in X \times Y,$$

è $(\mu\otimes\nu)$ – integrabile in $X\times Y$ e risulta

$$\int_{X\times Y} f(x)g(y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y)=\int_X f(x)\,d\mu(x)\cdot\int_Y g(y)\,d\nu(y).$$

Questo risultato si estende per induzione al caso di un numero qualunque di fattori.

DIMOSTRAZIONE. Per la definizione di σ – algebra prodotto le funzioni

$$(x,y)\in X\times Y\mapsto f(x)\qquad\text{e}\qquad(x,y)\in X\times Y\mapsto g(y)$$

sono $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ – misurabili e quindi per il teorema di Fubini–Tonelli per funzioni non negative (Teorema 2.55) risulta

$$\int_{X\times Y}|f(x)g(y)|\,d(\mu\otimes\nu)=\int_X|f(x)|\,d\mu(x)\cdot\int_Y|g(y)|\,d\nu(y)<+\infty$$

da cui seguono l'integrabilità di $f\otimes g$ rispetto alla misura prodotto $\mu\otimes\nu$ e la restante uguaglianza (Teorema 2.56). □

Completamento di misure prodotto. Siano $(X,\mathcal{M},\mu)$ e $(Y,\mathcal{N},\nu)$ due spazi con misura. La misura prodotto $\mu\otimes\nu$ così come definita (Definizione 2.49) non è quasi mai una misura completa anche se tali sono le due misure μ e ν: se infatti esistono un insieme $A\notin\mathcal{M}$ ed un insieme $B\in\mathcal{N}$ non vuoto con $\nu(B)=0$, il rettangolo $A\times B$ non risulta $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ – misurabile (Proposizione 2.50) pur essendo contenuto nel rettangolo misurabile $X\times B$ che è $(\mu\otimes\nu)$ – trascurabile.
Consideriamo quindi il completamento della misura prodotto $\mu\otimes\nu$ che denotiamo con

$$(\mu\otimes\nu)^*\colon(\mathcal{M}\times\mathcal{N})^*\to[0,+\infty]$$

in accordo con la notazione di Poposizione 1.28. Nell'ipotesi che μ e ν siano misure positive σ – finite, tale misura coincide con la misura positiva indotta dalla premisura $\mu\otimes\nu$ definita sull'algebra degli insiemi elementari $\mathcal{E}$ da $(*)$ e quindi $(\mu\otimes\nu)^*(E)$ si calcola ancora mediante la formula $(**)$ per ogni insieme $E\in(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})^*$ e risulta in particolare

$$(\mu\otimes\nu)^*(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$$

per ogni rettangolo misurabile $A\times B$ ($A\in\mathcal{M}$ e $B\in\mathcal{N}$).
Per il completamento $(\mu\otimes\nu)^*$ della misura prodotto $\mu\otimes\nu$ la formula di riduzione (Teorema 2.51) e i teoremi di Fubini–Tonelli (Teoremi 2.55 e 2.56) assumono la forma illustrata nei teoremi seguenti. Di tutti questi risultati esiste ovviamente la versione con i ruoli di X e Y scambiati.

TEOREMA 2.59. *Siano $(X,\mathcal{M},\mu)$ e $(Y,\mathcal{N},\nu)$ due spazi con misura σ – finita e completa e sia $E\subset X\times Y$ un insieme $(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})^*$ – misurabile. Allora, esiste $T\subset X$ insieme μ – trascurabile tale che*

(a) *$E_x\in\mathcal{N}$ per ogni $x\in X\setminus T$;*
(b) *la funzione*

$$m_E(x)=\begin{cases}\nu(E_x) & \text{se } x\in X\setminus T\\ 0 & \text{se } x\in T\end{cases}$$

è $\mathcal{M}$ – misurabile e si ha

$$(\mu\otimes\nu)^*(E)=\int_X m_E(x)\,d\mu(x).$$

Dimostrazione. (a) Osserviamo preliminarmente che, se $T \in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ è un insieme $(\mu\otimes\nu)-$trascurabile, si ha

$$0 = \mu\otimes\nu(T) = \int_X \nu(T_x)\,d\mu(x)$$

per la formula di riduzione (Teorema 2.51) e quindi deve essere $\nu(T_x) = 0$ per $\mu-$q.o. $x \in X$.
Consideriamo ora $E \in (\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})^*$. Esistono allora $A, B \in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ tali che $A \subset E \subset B$ e $\mu\otimes\nu(B\setminus A) = 0$. Si ha allora $E = A\cup(E\setminus A)$ con $E\setminus A \subset B\setminus A$ e $\mu\otimes\nu(B\setminus A) = 0$. Per la completezza di ν risulta $(E\setminus A)_x \in \mathcal{N}$ per $\mu-$q.o. $x \in X$ e quindi da $E_x = A_x \cup (E\setminus A)_x$ per ogni x si conclude che risulta $E_x \in \mathcal{N}$ per $\mu-$q.o. $x \in X$ e questo prova (a).
(b) Con le notazioni di (a), si ha $\nu(A_x) = m_E(x)$ per $\mu-$q.o. $x \in X$ cosicché la funzione $x \in X \mapsto m_E(x)$ è $\mathcal{M}-$misurabile per la completezza di μ (Proposizione 2.12) e risulta

$$(\mu\otimes\nu)^*(E) = \mu\otimes\nu(A) = \int_X \nu(A_x)\,d\mu(x) = \int_X m_E(x)\,d\mu(x)$$

per la definizione di $(\mu\otimes\nu)^*$ e per la formula di riduzione e questo completa la dimostrazione. □

Teorema 2.60 (G. Fubini–L. Tonelli I). *Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ due spazi con misura $\sigma-$finita e completa e sia $f\colon X\times Y \to [0,+\infty]$ una funzione $(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})^*-$misurabile. Allora, esiste $T \subset X$ insieme $\mu-$trascurabile tale che*

(a) *la sezione $y \in Y \mapsto f_x(y) \in [0,+\infty]$ è $\mathcal{N}-$misurabile per ogni $x \in X\setminus T$;*
(b) *la funzione $\varphi\colon X \to [0,+\infty]$ definita da*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_Y f_x(y)\,d\nu(y) & \textit{se } x \in X\setminus T \\ 0 & \textit{se } x \in T \end{cases}$$

è $\mathcal{M}-$misurabile e si ha

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)^*(x,y) = \int_X \varphi(x)\,d\mu(x).$$

Dimostrazione. (a) Siano $g\colon X\times Y \to [0,+\infty]$ una funzione $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}-$misurabile e $S \subset X\times Y$ un insieme $\mu\otimes\nu-$trascurabile tali che $\{f \neq g\} \subset S$ (Proposizione 2.14). Si ha allora

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu)^* &= \int_{X\times Y} g d(\mu\otimes\nu)^* = \\ &= \int_{X\times Y} g d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y g(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x)\end{aligned}$$

(Esercizio 2.6). Si ha inoltre $\{f \neq g\}_x = \{f_x \neq g_x\}$ per ogni x e quindi, ragionando come nella dimostrazione di Teorema 2.59$-$(a) si conclude che esiste un insieme $\mu-$trascurabile $T \subset X$ tale che $\{f_x \neq g_x\}$ sia $\nu-$trascurabile per ogni $x \in X\setminus T$. Essendo g_x una funzione $\mathcal{N}-$misurabile per ogni x, tale è anche f_x per gli stessi x per la completezza di ν e questo prova (a).
(b) Con le notazioni di (a) per la funzione φ definita in (b) risulta quindi

$$\int_Y g_x(y)\,d\nu(y) = \int_Y f_x(y)\,d\nu(y) = \varphi(x)$$

per $\mu-$q.o. x cosicché, essendo la funzione

$$x \in X \mapsto \int_X \left(\int_Y g_x(y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x)$$

$\mathcal{M}-$ misurabile, per la completezza di μ tale è anche φ. Si ha infine

$$\int_X \left(\int_Y g_x(y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_X \varphi(x)\, d\mu(x)$$

e questo completa la dimostrazione. □

Teorema 2.61 (G. Fubini–L. Tonelli II). *Siano $(X\,,\mathcal{M}\,,\mu)$ e $(Y\,,\mathcal{N}\,,\nu)$ due spazi con misura σ – finita e completa e sia $f\colon X\times Y\to\mathbb{K}$ una funzione $(\mu\otimes\nu)^*$ – integrabile in $X\times Y$. Allora, esiste $T\subset X$ insieme μ – trascurabile tale che*

(a) *la sezione $y\in Y\mapsto f_x(y)\in\mathbb{K}$ è ν – integrabile in Y per ogni $x\in X\setminus T$;*
(b) *la funzione $\varphi\colon X\to\mathbb{K}$ definita da*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_Y f_x(y)\, d\nu(y) & \textit{se } x\in X\setminus T \\ 0 & \textit{se } x\in T \end{cases}$$

è μ – integrabile in X e si ha

$$\int_{X\times Y} f(x\,,y)\, d(\mu\otimes\nu)^*(x\,,y) = \int_X \varphi(x)\, d\mu(x).$$

Di quest'ultimo risultato omettiamo la dimostrazione che si ricava facilmente dal corrispondente risultato per le funzioni non negative.

2.5. Modi di convergenza di funzioni misurabili

Esaminiamo in questa sezione alcune nozioni di convergenza per successioni di funzioni collegate alla presenza di una misura con particolare riguardo alle relazioni tra di esse. A tal fine, denotiamo con $\mu\colon\mathcal{S}\to[0\,,+\infty]$ una misura positiva (non nulla) fissata su una σ – algebra $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi di un insieme astratto (non vuoto) X che supporremo fissata in tutta questa sezione e poniamo come al solito $\mathbb{K}=\{\mathbb{R}\,,\mathbb{C}\}$.

Convergenza quasi ovunque e quasi uniforme. Introduciamo in questa parte due tipi di convergenza di successioni di funzioni collegati rispettivamente alla nozione di convergenza puntuale e di convergenza uniforme per le cui definizioni e proprietà rinviamo a [4] o [14].

Definizione 2.62. Siano $f_n\colon X\to\mathbb{K}$ $(n\ge 1)$ e $f\colon X\to\mathbb{K}$ funzioni. La successione $\{f_n\}_n$

- *converge a f μ – quasi ovunque in X* se esiste un insieme μ – trascurabile T tale che risulti

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x), \qquad x\in X\setminus T;$$

nel qual caso scriviamo $f_n\to f$ μ – quasi ovunque in X per $n\to+\infty$ e

- *converge a f μ – quasi uniformemente in X* se, per ogni $\varepsilon>0$, esiste un insieme $E_\varepsilon\in\mathcal{S}$ tale che risulti $\mu(X\setminus E_\varepsilon)\le\varepsilon$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\big\{|f_n(x)-f(x)| : \, x\in E_\varepsilon\big\} = 0;$$

nel qual caso scriviamo $f_n\to f$ μ – quasi uniformemente in X per $n\to+\infty$. □

In maniera equivalente scriveremo che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f$$

μ – quasi ovunque in X o μ – quasi uniformemente in X e nel seguito parleremo brevemente di convergenza quasi ovunque o quasi uniforme omettendo il riferimento esplicito alla misura sottesa in tutti i casi in cui non vi sia ambiguità.

Esplicitamente dunque, la successione di funzioni $\{f_n\}_n$ converge alla funzione f quasi ovunque in X per $n \to +\infty$ se esiste un insieme trascurabile T con la seguente proprietà: per ogni $x \in X \setminus T$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \geq 1$ tale che risulti

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

e converge invece a f quasi uniformemente in X per $n \to +\infty$ se, per ogni $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$, esistono un insieme $E_\varepsilon \in \mathcal{S}$ con $\mu(X \setminus E_\varepsilon) \leq \varepsilon$ e $n_0 = n_0(\varepsilon, \eta) \geq 1$ tali che risulti

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \eta \qquad \forall\, x \in E_\varepsilon.$$

La convergenza quasi ovunque consiste quindi nella convergenza puntuale al di fuori di un insieme trascurabile e la convergenza quasi uniforme nell'esistenza di una famiglia di insiemi di misura arbitrariamente piccola sul complementare di ciascuno dei quali la convergenza sia uniforme. Entrambe queste nozioni di convergenza sono evidentemente invarianti a meno di cambiamenti delle funzioni su insiemi trascurabili ed entrambe implicano la convergenza nel medesimo senso di ogni sottosuccesisione. Proviamo nei risultati seguenti che per entrambi i tipi di convergenza il limite è univocamente determinato nel senso dell'uguaglianza quasi ovunque e che, come accade per la convergenza puntuale e per la convergenza uniforme, la convergenza quasi uniforme implica la convergenza quasi ovunque con lo stesso limite (a meno di insiemi trascurabili).

Proposizione 2.63. *Siano $f_n \colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ e $f, g \colon X \to \mathbb{K}$ funzioni tali che*

$$f_n \to f \qquad e \qquad f_n \to g$$

quasi uniformemente (ovunque) in X per $n \to +\infty$. Allora, $f = g$ quasi ovunque in X.

Dimostrazione. Proviamo la tesi solo nel caso della convergenza quasi uniforme, essendo la conclusione ovvia nell'altro caso.
Fissato $\varepsilon > 0$, siano E_ε e F_ε due insiemi $\mathcal{S}-$misurabili tali che si abbia

$$\mu(X \setminus E_\varepsilon) \leq \varepsilon/2 \text{ e } f_n \to f \text{ uniformemente in } E_\varepsilon$$
$$\mu(X \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon/2 \text{ e } f_n \to g \text{ uniformemente in } F_\varepsilon$$

per $n \to +\infty$. Deve allora essere $f = g$ in $E_\varepsilon \cap F_\varepsilon$ ovvero $\{f \neq g\} \subset X \setminus (E_\varepsilon \cap F_\varepsilon)$ e da

$$\mu\big(X \setminus (E_\varepsilon \cap F_\varepsilon)\big) = \mu\big((X \setminus E_\varepsilon) \cup (X \setminus F_\varepsilon)\big) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

e dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue $f = g$ $\mu-$quasi ovunque. □

Proposizione 2.64. *Siano $f_n \colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ e $f \colon X \to \mathbb{K}$ funzioni tali che $f_n \to f$ quasi uniformemente in X per $n \to +\infty$. Allora, $f_n \to f$ quasi ovunque in X per $n \to +\infty$.*

Facili esempi mostrano che l'implicazione precedente non può essere in genere rovesciata (si vedano le considerazioni di Esempio 2.77). Vedremo tuttavia più avanti che ciò è possibile quando la misura μ è finita (Teorema 2.76).

Dimostrazione. Sia

$$A = \big\{x \in X : \{f_n(x)\}_n \text{ non converge a } f(x)\big\}$$

e per ogni $k \geq 1$ sia E_k un insieme $\mathcal{S}-$misurabile tale che si abbia $\mu(X \setminus E_k) \leq 1/k$ e $f_n \to f$ uniformemente in E_k per $n \to +\infty$ da cui segue $A \subset X \setminus E_k$ per ogni k. L'insieme $T = \bigcap_k (X \setminus E_k)$ risulta allora trascurabile e tale che $A \subset T$ da cui segue $f_n(x) \to f(x)$ per $n \to +\infty$ per ogni $x \in X \setminus T$. □

Il risultato seguente illustra le proprietà della convergenza quasi uniforme in relazione alle operazioni algebriche sulle funzioni. Ne omettiamo la ovvia dimostrazione.

TEOREMA 2.65. *Siano $f_n, g_n \colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ e $f, g \colon X \to \mathbb{K}$ funzioni tali che*

$$f_n \to f \qquad e \qquad g_n \to g$$

quasi uniformemente in X per $n \to +\infty$. Allora, valgono le seguenti affermazioni:

(a) *se la successione $\{f_n\}_n$ è uniformemente limitata quasi ovunque in X, la funzione f è limitata quasi ovunque in X;*

(b) *per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ si ha $(\alpha f_n + \beta g_n) \to (\alpha f + \beta g)$ quasi uniformemente in X per $n \to +\infty$;*

(c) *se le successioni $\{f_n\}_n$ e $\{g_n\}_n$ sono uniformemente limitate quasi ovunque in X, si ha $f_n g_n \to fg$ quasi uniformemente in X per $n \to +\infty$.*

Le proprietà (a) e (b) valgono evidentemente anche per la convergenza quasi ovunque mentre (c) vale per la convergenza quasi ovunque anche senza l'ipotesi che le successioni $\{f_n\}_n$ e $\{g_n\}_n$ siano uniformemente limitate quasi ovunque in X.
È chiaro cosa significhi che una successione di funzioni verifica la condizione di Cauchy ovvero è una successione di Cauchy per uno dei due tipi di convergenza introdotti ed è evidente altresì che ogni successione di funzioni che converge in uno dei due modi considerati è una successione di Cauchy nello stesso senso. Proviamo quindi che la completezza della convergenza puntuale e della convergenza uniforme implicano anche la completezza della convergenza quasi ovunque e quasi uniforme.

TEOREMA 2.66. *Siano $f_n \colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ funzioni tali che la successione $\{f_n\}_n$ sia di Cauchy quasi uniformemente* (*ovunque*) *in X. Allora,*

(a) *esiste una funzione $f \colon X \to \mathbb{K}$ tale che $f_n \to f$ quasi uniformemente* (*ovunque*) *in X per $n \to +\infty$;*

(b) *se ogni funzione f_n è $\mathcal{S}$ –misurabile, esiste una funzione $f \colon X \to \mathbb{K}$ $\mathcal{S}$ –misurabile tale che $f_n \to f$ quasi uniformemente* (*ovunque*) *in X per $n \to +\infty$.*

DIMOSTRAZIONE. Proviamo solo (b) nel caso della convergenza quasi uniforme, le altre affermazioni essendo ovvie.
Siano $E_h \in \mathcal{S}$, $h \geq 1$, insiemi tali che risulti $E_h \subset E_{h+1}$ e $\mu(X \setminus E_h) \leq 1/h$ per ogni h e tali che la successione $\{f_n\}_n$ sia uniformemente di Cauchy in ciascun insieme E_h. Per ogni h esiste dunque una funzione $g_h \colon E_h \to \mathbb{K}$ tale che $f_n \to g_h$ uniformemente in E_h per $n \to +\infty$. Poichè le funzioni della successione $\{f_n\}_n$ sono $\mathcal{S}-$misurabili, le loro restrizioni a ciascun insieme E_h sono $\mathcal{S}_h-$misurabili ove $\mathcal{S}_h = \mathcal{S}(E_h)$ denota la restrizione della $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ a ciascun insieme E_h. Conseguentemente, ogni funzione g_h è $\mathcal{S}_h-$misurabile ed inoltre è chiaro che risulta $g_{h+1} = g_h$ su E_h. Allora, l'insieme $T = X \setminus (\bigcup_h E_h)$ è trascurabile e la funzione $f \colon X \to \mathbb{K}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} g_h(x) & \text{se } x \in E_h \text{ per qualche } h \\ 0 & \text{se } x \in T \end{cases}$$

è a sua volta $\mathcal{S}-$misurabile (Proposizione 2.11$-$(b)) e chiaramente risulta che $f_n \to f$ quasi uniformemente in X per $n \to +\infty$ per costruzione. □

Convergenza in misura. Introduciamo in questa parte un ulteriore tipo di convergenza per successioni di funzioni misurabili oltre a quelli considerati nel paragrafo precedente.

DEFINIZIONE 2.67. Siano $f_n \colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ e $f \colon X \to \mathbb{K}$ funzioni $\mathcal{S}-$misurabili. La successione $\{f_n\}_n$ *converge a f in μ –misura in X* se per ogni $\eta > 0$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \mu\big(\{|f_n - f| \geq \eta\}\big) = 0.$$

In tal caso scriviamo $f_n \to f$ in $\mu-$misura in X per $n \to +\infty$ o equivalentemente

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f \qquad \text{in } \mu-\text{misura in } X. \qquad \square$$

Come al solito, nel seguito ometteremo il riferimento esplicito alla misura sottesa in tutti i casi in cui possa essere sottintesa senza ambiguità.
Esplicitamente dunque, la successione di funzioni $\mathcal{S}-$misurabili $\{f_n\}_n$ converge alla funzione $\mathcal{S}-$misurabile f in misura su X per $n \to +\infty$ se, per ogni $\eta > 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_0 = n_0(\eta, \varepsilon) \geq 1$ tale che risulti

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \mu\big(\{|f_n - f| \geq \eta\}\big) \leq \varepsilon.$$

La nozione di convergenza in misura è evidentemente invariante a meno di cambiamenti delle funzioni della successione su insiemi trascurabili purché questi cambiamenti preservino la misurabilità delle funzioni e implica la convergenza in misura di ogni sottosuccesisione.
Proviamo preliminarmente che il limite di una successione convergente in misura è univocamente determinato a meno di insiemi trascurabili.

Proposizione 2.68. *Siano $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ e $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ funzioni $\mathcal{S}$ –misurabili tali che*

$$f_n \to f \qquad e \qquad f_n \to g$$

in misura in X per $n \to +\infty$. Allora, $f = g$ quasi ovunque in X.

Dimostrazione. Per ogni $k \geq 1$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 = n_0(k, \varepsilon) \geq 1$ tale che risulti

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \mu\big(\{|f_n - f| \geq 1/2k\}\big) \leq \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad \mu\big(\{|f_n - g| \geq 1/2k\}\big) \leq \varepsilon/2$$

e da

$$\{|f - g| \geq 1/k\} \subset \{|f_n - f| \geq 1/2k\} \cup \{|f_n - g| \geq 1/2k\}$$

segue

$$\mu\big(\{|f - g| \geq 1/k\}\big) \leq \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ risulta $\mu\left(\{|f - g| \geq 1/k\}\right) = 0$ per ogni k e da

$$\{f \neq g\} = \bigcup_{k\geq 1} \{|f - g| \geq 1/k\}$$

segue l'asserto. $\square$

La proposizione seguente riunisce alcune proprietà della convergenza in misura.

Teorema 2.69. *Siano $f_n, g_n\colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ e $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ funzioni $\mathcal{S}$ –misurabili tali che*

$$f_n \to f \qquad e \qquad g_n \to g$$

in misura in X per $n \to +\infty$. Allora, valgono le seguenti affermazioni:

(a) *se la successione $\{f_n\}_n$ è uniformemente limitata quasi ovunque in X, la funzione f è limitata quasi ovunque in X;*
(b) *per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ si ha $(\alpha f_n + \beta g_n) \to (\alpha f + \beta g)$ in misura in X per $n \to +\infty$;*
(c) *se le successioni $\{f_n\}_n$ e $\{g_n\}_n$ sono uniformemente limitate quasi ovunque in X, si ha $f_n g_n \to fg$ in misura in X per $n \to +\infty$.*

Se $\mu(X) < +\infty$ l'affermazione (c) vale anche senza l'ipotesi che le successioni $\{f_n\}_n$ e $\{g_n\}_n$ siano uniformemente limitate quasi ovunque in X (Esercizio 2.18).

DIMOSTRAZIONE. (a) Sia $M \geq 0$ tale che risulti $|f_n(x)| < M$ per ogni $n \geq 1$ e per $\mu-$quasi ogni $x \in X$ e, fissato $\varepsilon > 0$, sia $n_0 = n_0(M, \varepsilon) \geq 1$ tale che risulti

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \mu\big(\{|f_n - f| \geq M\}\big) \leq \varepsilon.$$

Si ha allora

$$\{|f| \geq 2M\} \subset \{|f_n - f| \geq M\} \cup \{|f_n| \geq M\}$$

per ogni n e quindi, scegliendo $n \geq n_0$, risulta $\mu(\{|f| \geq 2M\}) \leq \varepsilon$. Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue l'asserto.

(b) Per ogni $\eta > 0$ e per ogni n si ha

$$\{|(f_n + g_n) - (f + g)| \geq \eta\} \subset \{|f_n - f| \geq \eta/2\} \cup \{|g_n - g| \geq \eta/2\}$$

e da questo segue che $(f_n + g_n) \to (f + g)$ in misura in X per $n \to +\infty$.
Sia quindi $\alpha \neq 0$. Per ogni $\eta > 0$ e per ogni n si ha

$$\{|\alpha f_n - \alpha f| \geq \eta\} = \{|f_n - f| \geq \eta/|\alpha|\}$$

e da questo segue che $\alpha f_n \to \alpha f$ in misura in X per $n \to +\infty$.

(c) Sia $M > 0$ tale che risulti $|f_n(x)| + |g_n(x)| < M$ per ogni $n \geq 1$ e per $\mu-$quasi ogni $x \in X$ cosicché ragionando come in (a) si ricava che risulta $|f(x)| \leq 2M$ per $\mu-$quasi ogni $x \in X$. Fissati allora $\eta > 0$ e $\varepsilon > 0$, sia $n_0 = n_0(M, \eta, \varepsilon) \geq 1$ tale che risulti

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \mu\big(\{|f_n - f| \geq \eta/2M\}\big) \leq \varepsilon/2 \\ \mu\big(\{|g_n - g| \geq \eta/4M\}\big) \leq \varepsilon/2. \end{cases}$$

A meno di insiemi trascurabili per ogni n risulta

$$\begin{aligned}\{|(f_n g_n) - (fg)| \geq \eta\} &\subset \{|(f_n - f)g_n| \geq \eta/2\} \cup \{|f(g_n - g)| \geq \eta/2\} \subset \\ &\subset \{|(f_n - f)| \geq \eta/2M\} \cup \{|(g_n - g)| \geq \eta/4M\}\end{aligned}$$

e da ciò segue $\mu(\{|(f_n g_n) - (fg)| \geq \eta\}) \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$. □

L'implicazione in Teorema 2.69 – (a) non può essere invertita né è possibile sostituire l'ipotesi che la successione $\{f_n\}_n$ sia uniformemente limitata quasi ovunque con la più debole richiesta che ogni funzione f_n sia limitata quasi ovunque come risulta dagli esempi seguenti.

ESEMPIO 2.70. Siano $X = \mathbb{N}_+$ e p la probabilità su $\mathcal{P}(\mathbb{N}_+)$ definita da

$$p(E) = \sum_{n \in E} 1/2^n, \qquad E \subset \mathbb{N}_+,$$

(Esempio 1.21 – (a)).

(a) Siano $f_n : \mathbb{N}_+ \to [0, +\infty)$ $(n \geq 1)$ le funzioni definite da

$$f_n(m) = \begin{cases} 0 & \text{se } m \leq n \\ m & \text{se } m \geq n + 1 \end{cases} \qquad n \geq 1.$$

Allora, $f_n \to 0$ in misura in $\mathbb{N}_+$ per $n \to +\infty$ ma nessuna funzione f_n è limitata quasi ovunque in $\mathbb{N}_+$.

(b) Siano $f_n : \mathbb{N}_+ \to [0, +\infty)$ $(n \geq 1)$ le funzioni definite da

$$f_n(m) = \min\{m, n\}, \qquad m \geq 1 \quad (n \geq 1),$$

e sia $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}$ la funzione identità $f(m) = m$ per ogni $m \geq 1$. Allora, ogni funzione f_n è limitata quasi ovunque in $\mathbb{N}_+$ e $f_n \to f$ in misura su $\mathbb{N}_+$ per $n \to +\infty$ ma f non è limitata quasi ovunque in $\mathbb{N}_+$. □

Siano $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ funzioni $\mathcal{S}-$misurabili. È chiaro cosa significhi che la successione $\{f_n\}_n$ verifica la condizione di Cauchy in $\mu-$misura in X ovvero è una successione di Cauchy in $\mu-$misura in X, locuzioni che, come al solito, abbrevieremo omettendo il riferimento esplicito alla misura quando non vi sia ambiguità. Anche per la convergenza in misura la validità della condizione di Cauchy è condizione necessaria per la convergenza nello stesso senso.

Proposizione 2.71. *Siano $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ e $f\colon X \to \mathbb{K}$ funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili tali che $f_n \to f$ in misura in X per $n \to +\infty$. Allora, la successione $\{f_n\}_n$ è di Cauchy in misura in X.*

Dimostrazione. Per ogni $\eta > 0$ e per ogni $m, n \geq 1$ si ha

$$\{|f_n - f_m| \geq \eta\} \subset \{|f_n - f| \geq \eta/2\} \cup \{|f_m - f| \geq \eta/2\}\,. \qquad \square$$

Non insistiamo ulteriormente sulle altre proprietà della convergenza in misura e passiamo quindi a esaminare nei risultati che seguono le relazioni che sussistono tra convergenza in misura e convergenza quasi ovunque e quasi uniforme.

Teorema 2.72. *Siano $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ e $f\colon X \to \mathbb{K}$ funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili tali che $f_n \to f$ quasi uniformemente su X per $n \to +\infty$. Allora, $f_n \to f$ in misura in X per $n \to +\infty$.*

Dimostrazione. Proviamo che, per ogni $\eta > 0$ e $\varepsilon > 0$, esiste $n_0 = n_0(\eta, \varepsilon) \geq 1$ tale che risulti

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu\big(\{|f_n - f| \geq \eta\}\big) \leq \varepsilon$$

per ogni $n \geq n_0$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $E_\varepsilon \in \mathcal{S}$ tale che sia $\mu(X \setminus E_\varepsilon) \leq \varepsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente in E_ε per $n \to +\infty$. Esiste allora $n_0 = n_(\eta, \varepsilon) \geq 1$ tale che risulti $|f_n(x) - f(x)| < \eta$ per ogni $x \in E_\varepsilon$ per $n \geq n_0$. Pertanto, per ogni n siffatto risulta

$$\{|f_n - f| \geq \eta\} \subset X \setminus E_\varepsilon$$

e questo completa la dimostrazione. $\square$

La relazione precedente tra convergenza in misura e convergenza quasi uniforme può essere invertita a meno del passaggio a una sottosuccessione.

Teorema 2.73 (F. Riesz). *Siano $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili tali che tali che la successione $\{f_n\}_n$ sia di Cauchy in misura in X. Allora, esiste una sottosuccessione $f_k = f_{n_k}$ $(k \geq 1)$ tale che $\{f_k\}_k$ è di Cauchy quasi uniformemente su X.*

Dimostrazione. Sia $\{n_h\}_h$ una successione strettamente crescente di interi tale che si abbia

$$m, n \geq n_h \quad \Longrightarrow \quad \mu\big(\{|f_n - f_m| \geq 1/2^h\}\big) \leq 1/2^h$$

per ogni $h \geq 1$. Posto allora

$$F_h = \big\{|f_{n_{h+1}} - f_{n_h}| \geq 1/2^h\big\}\,, \qquad h \geq 1,$$

si ha $\mu(F_h) \leq 1/2^h$ per ogni h. Consideriamo quindi la successione crescente di insiemi $\mathcal{S}$-- misurabili definita da

$$E_h = X \setminus \left(\bigcup_{k \geq h} F_k\right), \qquad h \geq 1.$$

Si ha

$$X \setminus E_h = \bigcup_{k \geq h} F_k, \qquad h \geq 1,$$

da cui segue $\mu(X \setminus E_h) \leq 1/2^{h-1}$ per ogni h.

Proviamo che la sottosuccessione della successione $\{f_n\}_n$ definita da $f_k = f_{n_k}$ $(k \geq 1)$ è di Cauchy quasi uniformemente in X. A tal fine, fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo $h \geq 1$ tale che risulti $1/2^{h-1} \leq \varepsilon$ e poniamo $E_\varepsilon = E_h$ cosicché risulta

$$\mu(X \setminus E_\varepsilon) = \mu(X \setminus E_h) \leq 1/2^{h-1} \leq \varepsilon.$$

Fissato $\eta > 0$, scegliamo quindi $k_0 = k_0(\eta, \varepsilon) \geq 1$ tale che sia $k_0 \geq h$ e $1/2^{k_0-1} \leq \eta$. Allora, per ogni $x \in E_\varepsilon$ si ha $x \notin F_k$ per ogni $k \geq h$ da cui segue

$$|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < 1/2^k, \qquad x \in E_\varepsilon, \quad k \geq h.$$

Pertanto, per ogni $k \geq k_0$ e $j \geq 1$ si ha

$$|f_{n_{k+j}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \sum_{0 \leq i \leq j-1} |f_{n_{k+i+1}}(x) - f_{n_{k+i}}(x)| < \sum_{0 \leq i \leq j-1} \frac{1}{2^{k+i}} \leq 1/2^{k-1} \leq \eta$$

per ogni $x \in E_\varepsilon$ e questo completa la dimostrazione. □

COROLLARIO 2.74. *Siano $f_n \colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ e $f \colon X \to \mathbb{K}$ funzioni $\mathcal{S}-$misurabili tali che $f_n \to f$ in misura in X per $n \to +\infty$. Allora, esiste una sottosuccessione $f_k = f_{n_k}$ $(k \geq 1)$ tale che $f_k \to f$ quasi uniformemente in X per $k \to +\infty$.*

DIMOSTRAZIONE. La successione $\{f_n\}_n$ verifica la condizione di Cauchy in misura in X e quindi esiste una sua sottosuccessione $f_k = f_{n_k}$, $k \geq 1$ che verifica la condizione di Cauchy quasi uniformemente in X (Teorema 2.73). Conseguentemente esiste una funzione $\mathcal{S}-$misurabile $g \colon X \to \mathbb{K}$ tale che $f_k \to g$ quasi uniformemente in X per $k \to +\infty$ (Teorema 2.66−(b)). Allora, $f_k \to g$ in misura in X per $k \to +\infty$ (Teorema 2.72) e quindi deve essere $f = g$ quasi ovunque in X (Proposizione 2.68) e questo conclude la dimostrazione. □

Dal corollario precedente sembrerebbe potersi pertanto dedurre che, se una successione di funzioni misurabili converge in misura, allora tutta la successione e non solo una sottosuccessione converge quasi uniformemente (proprietà di Urysohn della convergenza) e che conseguentemente convergenza in misura e convergenza quasi uniforme sarebbero tra loro equivalenti. Tuttavia, ciò non accade come prova l'esempio cosidetto degli *intervalli mobili.* La sua esposizione richiede però l'utilizzo della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$ che presenteremo solo nel successivo Capitolo 5 e conseguentemente lo presentiamo qui supponendo che esista una misura di Borel in $\mathbb{R}$ con alcune delle proprietà che sono proprie della misura di Lebesgue.

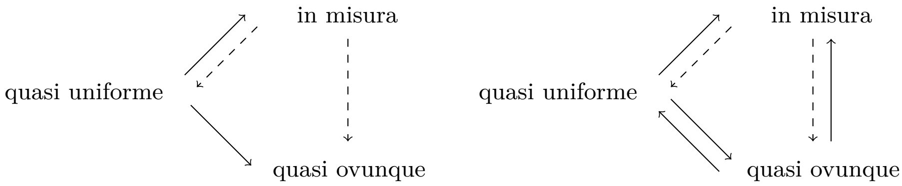
ESEMPIO 2.75. Sia $\mathcal{S}$ una $\sigma-$algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ contenente tutti gli insiemi di Borel di $\mathbb{R}$ e sia $\mu \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva di Borel su $\mathcal{S}$ tale che, per ogni intervallo $[a, b)$, si abbia

$$\mu([a, b)) = b - a, \qquad -\infty < a < b < +\infty.$$

Come vedremo nel successivo Capitolo 5, la $\sigma-$algebra e la misura di Lebesgue possiedono queste proprietà.
Per $n \geq 0$ e $m = 1, \ldots, 2^n$, siano $I_{n,m}$ i sottointervalli dell' intervallo $[0, 1)$ definiti da

$$I_{n,m} = \left[\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}\right), \qquad m = 1, \ldots, 2^n, \quad n \geq 0,$$

ciascuno dei quali ha misura $\mu(I_{n,m}) = 1/2^n$ per ogni $m = 1, \ldots, 2^n$ e per ogni $n \geq 0$ e siano inoltre $f_k = 1_{I_k}$, $k \geq 1$ le funzioni caratteristiche degli intervalli I_k ottenuti numerando gli intervalli $I_{n,m}$ secondo l'ordinamento lessicografico. È allora chiaro che $f_k \to 0$ in misura ma che le funzioni f_k non convergono a zero quasi ovunque in $[0, 1)$ poiché per ogni $x \in [0, 1)$ la successione $f_k(x) = 1_{I_k}(x)$ è frequentemente uguale a 1. □



(a) (b)

FIGURA 2.1. Relazioni tra tipi di convergenza: (a) caso $\mu(X) = +\infty$; (b) caso $\mu(X) < +\infty$. Le frecce tratteggiate indicano il passaggio a sottosuccesisoni.

La spiegazione di questa apparente contraddizione risiede nel fatto che la convergenza quasi uniforme non è una convergenza topologica. In altri termini, in genere non esiste alcuna topologia sull'insieme delle funzioni misurabili per la quale la convergenza indotta dalla topologia stessa sia proprio la convergenza quasi uniforme. La stessa conclusione vale evidentemente anche per la convergenza quasi ovunque.
Le relazioni tra i tipi di convergenza che abbiamo introdotto sono riassunte nello schema di Figura 2.1 – (a) dove le frecce tratteggiate rappresentano implicazioni che valgono a meno di sottosuccessioni.
Nel caso speciale in cui la misura μ è finita, il *teorema di Severini–Egorov* assicura che la convergenza quasi ovunque è in effetti equivalente alla convergenza quasi uniforme.

TEOREMA 2.76 (C. Severini–D. Egorov). *Sia $\mu(X) < +\infty$ e siano $f_n \colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ e $f \colon X \to \mathbb{K}$ funzioni $\mathcal{S}$ –misurabili tali che $f_n \to f$ quasi ovunque in X per $n \to +\infty$. Allora, $f_n \to f$ quasi uniformemente su X per $n \to +\infty$.*

Quando μ è una misura finita, le relazioni che sussistono tra i tipi di convergenza introdotte sono rappresentate nello schema di Figura 2.1 – (b).

DIMOSTRAZIONE. Sia T un insieme μ – trascurabile tale che si abbia $f_n(x) \to f(x)$ per $n \to +\infty$ per ogni $x \in X \setminus T$ e poniamo

$$E_m^\eta = \bigcap_{n \geq m} \{|f_n - f| \leq \eta\}, \qquad m \geq 1, \quad \eta > 0.$$

Si ha allora $E_m^\eta \in \mathcal{S}$ e $E_m^\eta \subset E_{m+1}^\eta$ per ogni m e $\eta > 0$ e inoltre risulta

$$X \setminus T \subset \bigcup_m E_m^\eta \qquad \text{ovvero} \qquad \bigcap_m (X \setminus E_m^\eta) = X \setminus \left(\bigcup_m E_m^\eta \right) \subset T$$

per ogni $\eta > 0$. Essendo $\mu(X) < +\infty$ e $X \setminus E_{m+1}^\eta \subset X \setminus E_m^\eta$ per ogni m e $\eta > 0$, deve essere $\mu(X \setminus E_m^\eta) \to 0$ per $m \to +\infty$ per ogni $\eta > 0$ fissato (Proposizione 1.22 – (c)). Fissato $\varepsilon > 0$, esiste allora una successione strettamente crescente di interi positivi $\{m_k\}_k$ tale che si abbia

$$\mu\left(X \setminus E_{m_k}^{1/k}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$$

per ogni k. Posto allora

$$E_\varepsilon = \bigcap_k E_{m_k}^{1/k},$$

risulta $E_\varepsilon \in \mathcal{S}$ e $\mu(X \setminus E_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Inoltre, per ogni $k \geq 1$ e per ogni $n \geq m_k$, si ha $E_\varepsilon \subset E_{m_k}^{1/k} \subset E_n^{1/k}$ da cui segue infine

$$n \geq m_k \quad \Longrightarrow \quad \sup\left\{|f_n(x) - f(x)| : \, x \in E_\varepsilon\right\} \leq 1/k$$

e questo completa la dimostrazione. □

L'esempio seguente mostra che nel teorema di Severini–Egorov l'ipotesi $\mu(X) < +\infty$ non può essere eliminata.

Esempio 2.77. Sia $\#$ la misura del conteggio sulla $\sigma-$algebra delle parti di $\mathbb{N}_+$ (Esempio 1.21−(a)). Poiché $\#$ non ha insiemi di misura minore di uno diversi dall'insieme vuoto, la convergenza $\#-$quasi ovunque e la convergenza $\#-$quasi uniforme coincidono esattamente con la convergenza puntuale e con la convergenza uniforme rispettivamente.
Consideriamo allora le funzioni $f_n \colon \mathbb{N}_+ \to [0,+\infty)$ $(n \geq 1)$ definite da

$$f_n(m) = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases} \qquad m \geq 1, \quad (n \geq 1).$$

Allora, $f_n \to 0$ puntualmente in $\mathbb{N}_+$ per $n \to +\infty$ ma la successione $\{f_n\}_n$ non converge a zero uniformemente in $\mathbb{N}_+$. In particolare, per ogni $0 < \eta < 1$ si ha $\#\left(\{f_n \geq \eta\}\right) = 1$ per ogni n. □

Lo spazio metrico della convergenza in misura. Alla nozione di convergenza in misura introdotta nel paragrafo precedente possiamo dare un più significativo contenuto topologico nella maniera seguente. Denotiamo con

$$\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \big\{f \colon X \to \mathbb{K} \text{ funzione } \mathcal{S}-\text{misurabile}\big\}$$

lo spazio vettoriale complesso delle funzioni $\mathcal{S}-$misurabili da X a valori complessi e, per ogni coppia di funzioni $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, definiamo

$$(*) \qquad d(f,g) = \Phi\Big(\inf\big\{t + \mu\left(\{|f-g| \geq t\}\right) \;:\; t > 0\big\}\Big)$$

ove $\Phi \colon [0,+\infty] \to [0,m]$ $(M > 0)$ è un qualunque fissato omeomorfismo subadditivo e crescente dell'intervallo $[0,+\infty]$ su $[0,M]$. Ciò significa esplicitamente che Φ è una funzione continua e biettiva da $[0,+\infty]$ su $[0,M]$ tale che risulti

$$\Phi(s+t) \leq \Phi(s) + \Phi(t), \quad s,t \geq 0; \qquad\qquad \Phi(s) < \Phi(t), \quad 0 \leq s < t \leq +\infty.$$

Alcune possibili scelte di Φ sono illustrate nell'esempio seguente.

Esempio 2.78. Se $\mu(X) = +\infty$ si può scegliere come Φ una delle seguenti funzioni:

$$\Phi_1(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{1+t} & \text{se } 0 \leq t < +\infty \\ 1 & \text{se } t = +\infty; \end{cases} \qquad \Phi_2(t) = \begin{cases} \arctan t & \text{se } 0 \leq t < +\infty \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } t = +\infty; \end{cases}$$

corrispondenti a $M = 1$ e $M = \pi/2$ rispettivamente. Se invece risulta $\mu(X) < +\infty$, si ha

$$\inf\big\{t + \mu\left(\{|f-g| \geq t\}\right) \;:\; t > 0\big\} \leq \mu(X)$$

per ogni coppia di funzioni $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ cosicché scegliendo

$$\Phi_3(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq \mu(X) \\ \mu(X) + \Phi_i(t - \mu(X)) & \text{se } \mu(X) \leq t \leq +\infty, \end{cases} \qquad (i = 1,2),$$

la definizione di $d(f,g)$ si riduce semplicemente a

$$d(f,g) = \inf\big\{t + \mu\left(\{|f-g| \geq t\}\right) \;:\; t > 0\big\}$$

per ogni coppia di funzioni $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$. □

Proviamo quindi che la funzione d definita da $(*)$ è una semimetrica[7] sullo spazio vettoriale $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ e che la convergenza ad essa associata coincide con la convergenza in misura in X.

PROPOSIZIONE 2.79. *Siano $f, g, h \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili. Allora,*

(a) $d(f, g) = 0 \iff f = g$ *quasi ovunque in* X*;*
(b) $d(f, g) = d(g, f)$*;*
(c) $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$.

La semimetrica d è evidentemente invariante per traslazioni ma si avrà in genere $d(\lambda f, \lambda g) \neq |\lambda| d(f, g)$ per $\lambda \neq 0$ e per qualche coppia di funzioni $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ cosicché la semimetrica d non risulta essere una seminorma nel senso della definizione della successiva Sezione III–4.2.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo solo le affermazioni (a) e (c), essendo (b) evidente.
(a) È evidente dalla definizione che da $f = g$ quasi ovunque in X segue $d(f, g) = 0$. Viceversa, sia $d(f, g) = 0$ cosicché deve essere

$$\inf \big\{ t + \mu\big(\{|f - g| \geq t\}\big) \,:\, t > 0 \big\} = 0.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $n \geq 1$ esiste allora $t_n = t_n(\varepsilon) > 0$ tale che risulti

$$t_n + \mu\big(\{|f - g| \geq t_n\}\big) \leq \varepsilon/2^n,$$

cosicché, essendo $0 < t_n \leq \varepsilon/2^n$ per ogni n, risulta

$$\{f \neq g\} = \bigcup_n \{|f - g| \geq t_n\},$$

da cui segue $\mu(\{f \neq g\}) \leq \varepsilon$. Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue $f = g$ quasi ovunque in X.
(c) Per ogni $s, t > 0$ si ha

$$\{|f - h| \geq s + t\} \subset \{|f - g| \geq s\} + \{|g - h| \geq t\}$$

che implica

$$\inf \big\{ r + \mu(\{|f - h| \geq r\}) \,:\, r > 0 \big\} \leq$$
$$\leq \inf \big\{ s + \mu(\{|f - g| \geq s\}) \,:\, s > 0 \big\} + \inf \big\{ t + \mu(\{|g - h| \geq t\}) \,:\, t > 0 \big\}$$

da cui segue $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$ essendo Φ strettamente crescente e subadditiva. $\square$

TEOREMA 2.80. *Siano $f_n \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ $(n \geq 1)$ e $f \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) $f_n \to f$ *in misura in* X *per* $n \to +\infty$*;*
(b) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} d(f_n, f) = 0$.

Analogamente si prova che la successione $\{f_n\}_n$ è una successione di Cauchy in misura in X se e solo se è tale per la metrica d.

DIMOSTRAZIONE. (a) Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tale che risulti $0 \leq \Phi(t) \leq \varepsilon$ per ogni $0 \leq t \leq \eta$. Esiste allora $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che risulti

$$n \geq n_0 \implies \mu\big(\{|f_n - f| \geq \eta/2\}\big) \leq \eta/2$$

da cui segue

$$n \geq n_0 \implies 0 < \eta/2 + \mu\big(\{|f_n - f| \geq \eta/2\}\big) \leq \eta.$$

[7] Una semimetrica è una funzione d che verifica le stesse proprietà di una metrica su X per la quale però da $d(x, y) = 0$ non segue $x = y$.

Risulta quindi $d(f_n, f) \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$ e questo prova (b).
(b) Siano $\eta > 0$ e $0 < \varepsilon \leq \eta$ fissati. Essendo Φ un omeomorfismo, esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni $t \in [0, +\infty]$ per il quale risulti $0 \leq \Phi(t) < \delta$ si abbia $0 \leq t < \varepsilon$. Scegliamo quindi $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che risulti $d(f_n, f) < \delta$ per ogni $n \geq n_0$ cosicché deve essere

$$\inf \big\{ t + \mu\left(\{|f_n - f| \geq t\}\right) \,:\, t > 0 \big\} < \varepsilon$$

per gli stessi n. Pertanto, per ogni $n \geq n_0$ esiste $t_n \in (0, \varepsilon)$ tale che risulti

$$\mu\big(\{|f_n - f| \geq t_n\}\big) < t_n + \mu\big(\{|f_n - f| \geq t_n\}\big) < \varepsilon.$$

Da $0 < t_n < \varepsilon \leq \eta$ segue a maggior ragione che si ha

$$n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \mu\big(\{|f_n - f| \geq \eta\}\big) < \varepsilon$$

e questo conclude la dimostrazione. □

La convergenza indotta dalla semimetrica d su $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ è quindi indipendente dalla scelta dell'omemomorfismo crescente e subadditivo Φ che compare nella definizione $(*)$ di d.
Attraverso un'opportuna operazione di passaggio al quoziente è possibile ottenere dalla coppia formata dallo spazio vettoriale $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ delle funzioni $\mathcal{S}-$misurabili e dalla semimetrica d una genuina struttura di spazio metrico.
L'insieme N delle funzioni $\mathcal{S}-$misurabili $f\colon X \to \mathbb{K}$ che sono $\mu-$quasi ovunque nulle è infatti un sottospazio di $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ e conseguentemente, l'insieme quoziente

$$L(\mu) = \mathcal{L}(\mathcal{S})/N$$

è a sua volta uno spazio vettoriale complesso i cui elementi sono le classi d'equivalenza di funzioni $\mathcal{S}-$misurabili $\mu-$quasi ovunque uguali tra loro. Denoteremo come al solito con

$$[f] = \big\{ f' \in \mathcal{L}(\mathcal{S}) \,:\, f' = f \ \mu-\text{quasi ovunque in } X \big\}\,,$$

la classe d'equivalenza della funzione $f \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$. Da Proposizione 2.79 − (a) si deduce che la semimetrica d definita sullo spazio vettoriale $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ delle funzioni $\mathcal{S}-$misurabili a valori complessi induce sullo spazio vettoriale $L(\mu)$ una metrica invariante per traslazioni che indicheremo ancora con d ponendo per ogni $[f], [g] \in L(\mu)$

$$d([f], [g]) = d(f', g'), \qquad f' \in [f], \quad g' \in [g].$$

In conseguenza di Teorema 2.80, la metrica d così definita su $L(\mu)$ si chiama *metrica della convergenza in $\mu-$misura* o più brevemente *metrica della convergenza in misura* quando non vi sia ambiguità.
Lo spazio $L(\mu)$ è quindi lo spazio vettoriale delle classi d'equivalenza di funzioni $\mathcal{S}-$misurabili da X a valori complessi che sono $\mu-$quasi ovunque uguali tra loro. Come è consuetudine, nel seguito faremo sistematicamente riferimento allo spazio $L(\mu)$ identificandone gli elementi con funzioni $\mathcal{S}-$misurabili e parleremo quindi degli elementi di $L(\mu)$ come di funzioni $\mathcal{S}-$misurabili piuttosto che come classi di equivalenza di funzioni $\mathcal{S}-$misurabili uguali $\mu-$quasi ovunque relegando l'identificazione precedente ad una tacita convenzione. Nelle rare occasioni in cui sarà necessario considerare in luogo della classe di equivalenza $f \in L(\mu)$ una specifica funzione $\mathcal{S}-$misurabile $f\colon X \to \mathbb{K}$ definita puntualmente in X, ci riferiremo ad essa come ad un *rappresentativo* della classe di equivalenza $f \in L(\mu)$. A seguito di questa convenzione sarà necessario aver cura che ogni nozione che viene introdotta relativamente a (classi di equivalenza di) funzioni di $L(\mu)$ sia in effetti invariante a meno di cambiamenti su insiemi $\mu-$trascurabili.
Ad esempio, così come non ha senso in genere[8] parlare di valore $f(x)$ di f in un punto $x \in X$ di una funzione misurabile $f \in L(\mu)$ proprio perché f è in

[8] A meno che sia $\{x\} \in \mathcal{S}$ e $\mu(\{x\}) > 0$.

effetti una classe d'equivalenza di funzioni $\mu-$quasi ovunque uguali tra loro e non uno specifico rappresentativo definito puntualmente sull'insieme X, ha invece senso parlare dell'insieme $\{f \neq 0\}$ dove $f \in L(\mu)$ risulta non nulla: tale insieme $\mathcal{S}-$misurabile è infatti ben definito a meno di insiemi $\mu-$trascurabili.
Come ulteriore esempio, consideriamo cosa corrisponde in $L(\mu)$ alla nozione di funzione semplice: una funzione $s \in L(\mu)$ è semplice se esistono un suo rappresentativo $s \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ ed un insieme $\mu-$trascurabile T tale che l'immagine $s(X \setminus T)$ sia un insieme finito. È facile controllare che se $s \in L(\mu)$ ha un rappresentativo con questa proprietà, allora anche ogni altro rappresentativo di s gode della stessa proprietà.
Terminate queste considerazioni possiamo provare che lo spazio $L(\mu)$ è completo rispetto alla metrica della convergenza in misura.

Teorema 2.81 (F. Riesz). *Lo spazio metrico $(L(\mu), d)$ è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}_n$ una successione funzioni di $L(\mu)$ di Cauchy rispetto alla metrica d cosicché essa è di Cauchy in misura in X. Pertanto, essa ha una sottosuccessione che è di Cauchy quasi uniformente in X (Teorema 2.73) e che dunque converge ad una qualche funzione $f \in L(\mu)$ quasi uniformemente in X. Tale sottosuccessione converge allora ad f anche in misura in X (Teorema 2.72). Ogni successione di Cauchy avente una sottosuccessione convergente è convergente e questo prova l'asserto. $\square$

Esercizi

2.1. Sia $\mathcal{S}$ una $\sigma-$algebra di insiemi di un insieme astratto (non vuoto) X e siano $f, g\colon X \to \mathbb{R}_\infty$ e $f_n\colon X \to \mathbb{R}_\infty$ $(n \geq 1)$ funzioni $\mathcal{S}-$misurabili. Provate che gli insiemi

(a) $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$, $\{f \neq g\}$ e $\{f = g\}$;

(b) $\left\{x \in X : \exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right\}$.

sono $\mathcal{S}-$misurabili.

2.2. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X e siano $f_n\colon X \to [0, +\infty]$ $(n \geq 1)$ e $f\colon X \to [0, +\infty]$ funzioni $\mathcal{S}-$misurabili tali che

(a) $f_{n+1} \leq f_n$ in X per ogni n;

(b) $f_n \to f$ puntualmente su X per $n \to +\infty$;

(c) $\displaystyle\int_X f_1\, d\mu < +\infty$.

Provate che risulta
$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$
e che la conclusione può essere falsa se l'ipotesi (c) viene omessa.

2.3. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva continua su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X e sia $f\colon X \to [0, +\infty]$ una funzione $\mathcal{S}-$misurabile tale che
$$\int_X f\, d\mu < +\infty.$$
Provate che la misura positiva
$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu, \qquad E \in \mathcal{S},$$

è continua.

2.4. Siano $\#$ la misura del conteggio sulla $\sigma-$algebra delle parti $\mathcal{P}(X)$ di un insieme X (non vuoto) e $f\colon X \to \mathbb{K}$ una funzione. Provate che

$$f \text{ è sommabile in } X \qquad \iff \qquad f \text{ è } \#-\text{integrabile in } X$$

e in tal caso risulta

$$\sum_{x \in X} f(x) = \int_X f\, d\#.$$

2.5. Sia X un insieme non numerabile e siano

$$\mathcal{S} = \big\{E \subset X : \ E \text{ o } E^{\mathrm{c}} \text{ è al più numerabile}\big\}\,;$$

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } E \text{ al più numerabile} \\ 1 & \text{se } E^{\mathrm{c}} \text{ al più numerabile} \end{cases} \qquad E \in \mathcal{S}.$$

(a) Provate che $\mathcal{S}$ è una $\sigma-$algebra di insiemi di X e che μ è una misura positiva su $\mathcal{S}$.

(b) Determinate le funzioni $\mathcal{S}-$misurabili $f\colon X \to \mathbb{K}$ ed i loro integrali.

2.6. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X con completamento $\mu^*\colon \mathcal{S}^* \to [0, +\infty]$ e siano $f\colon X \to [0, +\infty]$ e $g\colon X \to \mathbb{K}$ due funzioni. Provate che

(a) f $\mathcal{S}-$misurabile $\qquad \Longrightarrow \qquad \displaystyle\int_X f\, d\mu^* = \int_X f\, d\mu;$

(b) g è $\mu-$integrabile se e solo se è μ^*-integrabile nel qual caso si ha

$$\int_X g\, d\mu = \int_X g\, d\mu^*.$$

2.7. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X e sia $\Phi\colon X \to \mathbb{R}^N$ una funzione $\mathcal{S}-$misurabile. Provate che la funzione

$$\mu_\Phi(B) = \mu\big(\Phi^{-1}(B)\big)\,, \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N),$$

è una misura positiva di Borel in $\mathbb{R}^N$ e che valgono le seguenti affermazioni:

$$f\colon \mathbb{R}^N \to [0, +\infty] \text{ Borel misurabile in } \mathbb{R}^N \qquad \Longrightarrow \qquad f \circ \Phi \ \mathcal{S}-\text{misurabile};$$

$$f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K} \ \mu_\Phi-\text{integrabile} \qquad \Longrightarrow \qquad f \circ \Phi \ \mu-\text{integrabile};$$

e in entrambi i casi si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} d\mu_\Phi = \int_X f \circ \Phi\, d\mu.$$

La misura di Borel μ_Φ in $\mathbb{R}^N$ prende il nome di *push–forward* di μ mediante Φ.

2.8. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X tale che $\mu(X) < +\infty$ e siano $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ funzioni $\mathcal{S}-$misurabili e $f\colon X \to \mathbb{K}$ una funzione tali che

- ogni f_n è limitata;
- $f_n \to f$ uniformemente su X per $n \to +\infty$.

Provate che ogni f_n e f sono $\mu-$integrabili su X e che risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X |f_n - f|\,d\mu = 0$$

e che la conclusione può essere falsa se l'ipotesi $\mu(X) < +\infty$ viene omessa.

2.9. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X e siano $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ e $f\colon X \to \mathbb{K}$ funzioni tali che

- f e ogni f_n sono $\mu-$integrabili;
- $f_n \to f$ puntualmente in X per $n \to +\infty$.

Provate che risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X |f_n - f|\,d\mu = 0 \qquad\iff\qquad \lim_{n\to+\infty}\int_X |f_n|\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu.$$

2.10. Siano $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X e $f\colon X \to [0,+\infty]$ una funzione $\mathcal{S}-$misurabile tale che

$$0 < \int_X f\,d\mu < +\infty.$$

Calcolate

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X n\log\bigl(1 + (f/n)^\alpha\bigr)\,d\mu \qquad (0 < \alpha < +\infty).$$

2.11. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X tale che $\mu(X) < +\infty$ e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione $\mu-$integrabile su X. Calcolate

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_X \log\bigl(1 + e^{nf}\bigr)\,d\mu.$$

2.12. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X tale che $\mu(X) = 1$ e siano $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ funzioni positive $\mathcal{S}-$misurabili tali che $f(x)g(x) \geq 1$ per $\mu-$q.o. $x \in X$. Provate che risulta

$$\int_X f\,d\mu \cdot \int_X g\,d\mu \geq 1.$$

2.13. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X tale che $\mu(X) = 1$ e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione $\mu-$integrabile in X tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in X$. Supponendo che anche le funzioni $\log f$ e $f\log f$ siano $\mu-$integrabili in X, quale tra i due numeri

$$\int_X f\log f\,d\mu \qquad \text{e} \qquad \int_X f\,d\mu \cdot \int_X \log f\,d\mu$$

è più grande?

2.14. Siano $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di Ω e (X, d) uno spazio metrico e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione con le seguenti proprietà:

- per ogni $x \in X$ la funzione $\omega \in \Omega \mapsto f(x,\omega)$ è $\mu-$integrabile in Ω;
- per $\mu-$q.o. $\omega \in \Omega$ la funzione $x \in X \mapsto f(x,\omega)$ è continua in $x_0 \in X$;

- esistono $r > 0$ e una funzione $g\colon \Omega \to [0, +\infty]$ $\mathcal{S}-$misurabile con
$$\int_\Omega g(\omega)\, d\mu(\omega) < +\infty$$
tali che
$$|f(x, \omega)| \le g(\omega), \qquad x \in B_r(x_0) \text{ e } \omega \in \Omega.$$

Provate che la funzione

$$(*) \qquad F(x) = \int_\Omega f(x, \omega)\, d\mu(\omega), \qquad x \in X,$$

è ben definita e continua in x_0.

2.15. Siano $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di Ω, $U \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione con le seguenti proprietà:

- per ogni $x \in U$ la funzione $\omega \in \Omega \mapsto f(x, \omega)$ è $\mu-$integrabile in Ω;
- esiste un insieme $\mu-$trascurabile T tale che la funzione $x \in U \mapsto f(x, \omega)$ è di classe $C^1(U)$ per ogni $\omega \in \Omega \setminus T$;
- per ogni $x_0 \in U$ esistono $r > 0$ con $B_r(x_0) \subset U$ e una funzione $g\colon \Omega \to [0, +\infty]$ $\mathcal{S}-$misurabile con
$$\int_\Omega g(\omega)\, d\mu(\omega) < +\infty$$
tali che
$$\|\nabla_x f(x, \omega)\| \le g(\omega), \qquad x \in B_r(x_0) \text{ e } \omega \in \Omega \setminus T,$$
ove $\nabla_x f(x, \omega)$ denota il gradiente di f rispetto alle componenti di $x = (x^1, \dots, x^N)$.

Provate che

(a) per ogni $x \in U$ le funzioni
$$(**) \qquad \omega \in \Omega \mapsto \begin{cases} \partial_{x^n} f(x, \omega) & \text{se } \omega \in \Omega \setminus T \\ 0 & \text{se } \omega \in T \end{cases}$$
sono $\mu-$integrabili in Ω $(n = 1, \dots, N)$;

(b) la funzione $F\colon U \to \mathbb{K}$ definita da $(*)$ di Esercizio 2.14 per $X = U$ è di classe $C^1(U)$ e, denotate con abuso di notazione con ∂_{x^n} le funzioni definite in $(**)$, le sue derivate parziali sono
$$\partial_n F(x) = \int_\Omega \partial_{x^n} f(x, \omega)\, d\mu(\omega), \qquad x \in U \quad (n = 1, \dots, N).$$

2.16. Siano X e Y spazi topologici a base numerabile di aperti. Provate che risulta
$$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y).$$

2.17. Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ due spazi con misura $\sigma-$finita e $(\mu \otimes \nu)^*$ il completamento della misura prodotto $\mu \otimes \nu$ e siano $f\colon X \to \mathbb{K}$ e $g\colon Y \to \mathbb{K}$ due funzioni $\mu-$ e $\nu-$integrabili rispettivamente. Allora, la funzione
$$f \otimes g(x, y) = f(x) g(y), \qquad (x, y) \in X \times Y,$$
è $(\mu \otimes \nu)^*-$integrabile in $X \times Y$ e risulta
$$\int_{X \times Y} f(x, y)\, d(\mu \otimes \nu)^*(x, y) = \int_X f(x)\, d\mu(x) \cdot \int_Y g(y)\, d\nu(y).$$

2.18. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva tale che $\mu(X) < +\infty$ e siano $f_n, g_n\colon X \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ e $f, g\colon X \to \mathbb{R}_\infty$ funzioni $\mathcal{S}-$misurabili tali che

$$f_n \to f \qquad \text{e} \qquad g_n \to g$$

in misura su X per $n \to +\infty$. Provate che $f_n g_n \to fg$ in misura su X per $n \to +\infty$.

CAPITOLO 3

Misure di Radon e funzioni continue

La teoria della misura e dell'integraziane svolta nei capitoli precedenti si applica a insiemi astratti e privi di struttura ma il caso di maggior interesse per le applicazioni si ha ovviamente quando lo spazio con misura è anche uno spazio topologico nel qual caso si può realizzare una feconda interazione tra topologia da una parte e misura e integrazione dall'altra. Uno dei possibili quadri topologici in cui questa interazione si può sviluppare in maniera appropriata è quello degli spazi topologici di Hausdorff localmente compatti. Tale ambiente risulta infatti dotato di una struttura topologica che è adeguata per lo sviluppo di una ricca teoria della misura e dell'integrazione e al contempo sufficientemente generale da includere (quasi) tutti gli spazi topologici significativi per le applicazioni, a partire dal caso dello spazio euclideo $\mathbb{R}^N$.
In questo capitolo, a partire dal legame tra funzionali lineari positivi definiti sullo spazio delle funzioni continue a supporto compatto e misure positive, esaminiamo le proprietà delle misure di Borel definite su spazi topologici di Hausdorff localmente compatti con particolare riguardo alla possibilità di approssimare la misura di un insieme mediante la misura di aperti o di compatti unitamente al corrispondente problema di approssimazione di funzioni misurabili mediante funzioni continue.

3.1. Misure di Radon

Esaminiamo in questa sezione alcuni aspetti della teoria della misura e dell'integrazione nell'ambito degli spazi topologici di Hausdorff localmente compatti.
Denotiamo in tutta questa sezione con $(X\,,\mathcal{T})$ uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto le cui eventuali ulteriori proprietà saranno specificate di volta in volta e denotiamo con $C_{\mathrm{c}}(X)$ lo spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ formato dalle funzioni continue con supporto compatto in X a valori in $\mathbb{K}$ senza distinguere nella notazione tra funzioni a valori reali o complessi. In assenza di un'esplicita indicazione diversa, tutti i risultati che vedremo valgono senza modifiche per entrambi i casi e, solo quando necessario, scriveremo esplicitamente $C(X\,,\mathbb{R})$ per distinguere il caso reale dal caso generale.

Funzionali lineari positivi e misure. Sia $(X\,,\mathcal{T})$ uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto. Un funzionale lineare $L\colon C_{\mathrm{c}}(X) \to \mathbb{K}$ tale che

$$\varphi \in C_{\mathrm{c}}(X\,,\mathbb{R}) \text{ e } \varphi \geq 0 \text{ in } X \qquad \Longrightarrow \qquad L\varphi \in \mathbb{R} \text{ e } L\varphi \geq 0$$

si dice *positivo* e si scrive in tal caso $L \geq 0$ su $C_{\mathrm{c}}(X)$.
Se $\mu\colon \mathcal{S} \to [0\,,+\infty]$ è una misura positiva di Borel in X tale che sia $\mu(K) < +\infty$ per ogni insieme $K \subset X$ compatto, ogni funzione $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$ è Borel misurabile in X e $\mu-$integrabile e l'integrale

$$f \in C_{\mathrm{c}}(X) \mapsto \int_X f\,d\mu \in \mathbb{K}$$

risulta essere un funzionale lineare positivo su $C_{\mathrm{c}}(X)$.
Proviamo in questa parte che ogni funzionale lineare positivo sullo spazio $C_{\mathrm{c}}(X)$ delle funzioni continue a supporto compatto si ottiene come integrale rispetto ad

un'opportuna misura positiva. A tal fine, introduciamo la terminologia seguente. Una misura positiva di Borel $\mu\colon \mathcal{S} \to [0\,,+\infty]$ in X si dice

- *esternamente regolare su* $E \in \mathcal{S}$ se risulta
$$\mu(E) = \inf\left\{\mu(V) :\ E \subset V \text{ e } V \text{ aperto}\right\};$$
- *internamente regolare su* $E \in \mathcal{S}$ se risulta
$$\mu(E) = \sup\left\{\mu(K) :\ K \subset E \text{ e } K \text{ compatto}\right\};$$
- *regolare su* $E \in \mathcal{S}$ se è internamente ed esternamente regolare in E.

La misura μ si dice poi internamente (esternamente) regolare ovvero regolare se è tale su ogni insieme di $\mathcal{S}$.

DEFINIZIONE 3.1. Una misura positiva di Borel $\mu\colon \mathcal{S} \to [0\,,+\infty]$ su X finita sui compatti, esternamente regolare e internamente regolare sugli insiemi aperti si dice *misura di Radon* in X. □

Possiamo ora enunciare il celebre teorema di *rappresentazione di Riesz.*

TEOREMA 3.2 (F. Riesz). *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e sia $L\colon C_c(X) \to \mathbb{K}$ un funzionale lineare positivo su $C_c(X)$. Allora, esiste una misura positiva di Radon in X completa $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ tale che*
$$Lf = \int_X f\,d\mu, \qquad f \in C_c(X).$$
Inoltre, μ è univocamente determinata sugli insiemi di Borel di X.

DIMOSTRAZIONE. Con le notazioni di Sezione 2.5, sia
$$\lambda(V) = \sup\left\{L\varphi :\ \varphi \prec V\right\}, \qquad V \subset X \text{ aperto.}$$
Si ha $\lambda(\varnothing) = 0$ e quindi la funzione $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ definita da
$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_k \lambda(V_k) :\ A \subset \bigcup_k V_k \text{ e } V_k \text{ aperti}\right\}, \qquad A \subset X,$$
risulta essere una misura esterna su X (Teorema 1.40). Conseguentemente la collezione $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mu^*)$ degli insiemi μ^*-misurabili è una $\sigma-$algebra di insiemi di X e la restrizione $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ di μ^* alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ è una misura positiva completa (Teorema 1.37). Articoliamo il resto della dimostrazione nei passi che seguono.

Passo 1. Per tutti gli insiemi aperti $V\,,V_k$ $(k \geq 1)$ si ha
$$(*) \qquad V \subset \bigcup_k V_k \quad \Longrightarrow \quad \lambda(V) \leq \sum_k \lambda(V_k).$$
Sia $\varphi \prec V$ e sia $K = \operatorname{supp}(\varphi)$. Essendo K compatto, si ha $K \subset V_1 \cup \cdots \cup V_n$ per n opportuno ed esistono funzioni $\varphi_m \prec V_m$ $(m = 1, \ldots, n)$ tali che $\varphi_1 + \cdots + \varphi_n = 1$ su K (Teorema I–2.186). Si ha $\varphi \leq \varphi_1 + \cdots + \varphi_n$ e quindi risulta
$$L\varphi \leq L\varphi_1 + \cdots + L\varphi_n \leq \lambda(V_1) + \cdots + \lambda(V_n) \leq \sum_k \lambda(V_k)$$
da cui, passando all'estremo superiore tra tutte le funzioni $\varphi \prec V$, segue l'asserto.

Passo 2. Si ha $\mu^*(V) = \lambda(V)$ per ogni insieme aperto $V \subset X$ e risulta
$$(**) \qquad \mu^*(A) = \inf\left\{\lambda(V) :\ A \subset V \text{ e } V \text{ aperto}\right\}, \qquad A \subset X.$$
Da questo seguirà in particolare la regolarità esterna di μ una volta provato che μ è una misura di Borel in X (Passo 5).

Da $\lambda(\varnothing) = 0$ segue $\mu^*(V) \le \lambda(V)$ per ogni insieme aperto V. Viceversa siano V_k $(k \ge 1)$ insiemi aperti tali che $V \subset \bigcup_k V_k$. Si ha allora

$$\lambda(V) \le \sum_k \lambda(V_k)$$

per $(*)$ e, passando all'estremo inferiore tra tutti i ricoprimenti aperti $\{V_k\}_k$ di V, si ottiene $\lambda(V) \le \mu^*(V)$. Infine, dato un insieme $A \subset X$ e un ricoprimento aperto $\{V_k\}_k$ di A e posto $V = \bigcup_k V_k$, si ha

$$\mu^*(A) \le \mu^*(V) = \lambda(V) \le \sum_k \lambda(V_k)$$

da cui segue

$$\mu^*(A) \le \inf\big\{\lambda(V) :\ A \subset V \text{ e } V \text{ aperto}\big\} \le \sum_k \lambda(V_k).$$

Dall'arbitrarietà del ricoprimento aperto $\{V_k\}_k$ di A segue $(**)$.

Passo 3. Per ogni insieme compatto $K \subset X$ si ha

$$(***) \qquad \mu^*(K) = \inf\big\{L\varphi :\ K \prec \varphi\big\} < +\infty.$$

Da questo seguirà in particolare che μ è finita sui compatti, una volta provato che μ è una misura di Borel in X (Passo 5).

Siano $K \subset X$ un insieme compatto e $\varphi \in C_c(X)$ una funzione tale che $K \prec \varphi$. Per $0 < \varepsilon < 1$, l'insieme $V_\varepsilon = \{x :\ \varphi(x) > 1 - \varepsilon\}$ è aperto e tale che $K \subset V_\varepsilon$. Per ogni funzione $\psi \in C_c(X)$ con $\psi \prec V_\varepsilon$ risulta

$$\frac{1}{1-\varepsilon}\varphi \ge \psi \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{1-\varepsilon}L\varphi \ge L\psi$$

da cui segue

$$\lambda(V_\varepsilon) \le \frac{1}{1-\varepsilon}L\varphi$$

per l'arbitrarietà di $\psi \prec V_\varepsilon$. Pertanto si ha

$$\mu^*(K) \le \lambda(V_\varepsilon) \le \frac{1}{1-\varepsilon}L\varphi$$

e per $\varepsilon \to 0^+$ si ottiene $\mu^*(K) \le L\varphi$ per ogni funzione $K \prec \varphi$ da cui segue

$$\mu^*(K) \le \inf\big\{L\varphi :\ K \prec \varphi\big\}.$$

Viceversa, per ogni insieme aperto $V \subset X$ tale che $K \subset V$, esiste $\varphi \in C_c(X)$ tale che $K \prec \varphi \prec V$ (Teorema I–2.184). Si ha quindi $L\varphi \le \lambda(V)$ da cui segue

$$\inf\big\{L\varphi :\ K \prec \varphi\big\} \le \lambda(V)$$

per ogni insieme aperto V tale che $K \subset V$ e questo completa la dimostrazione di $(***)$.

Passo 4. Per ogni insieme aperto $V \subset X$, si ha

$$\mu^*(V) = \sup\big\{\mu^*(K) :\ K \subset V \text{ e } K \text{ compatto}\big\}$$

Da questo seguirà che μ è internamente regolare sugli insiemi aperti, una volta provato che μ è una misura di Borel in X (Passo 5).

Sia $\mu^*(V) > 0$ altrimenti non cè nulla da provare e sia $t < \mu^*(V)$. Esiste allora una funzione $\varphi \in C_c(X)$ con $\varphi \prec V$ tale che

$$t < L\varphi \le \lambda(V) = \mu^*(V).$$

L'insieme $K = \operatorname{supp}(\varphi)$ è compatto e tale che $K \subset V$. Per ogni funzione $\psi \in C_c(X)$ con $K \prec \psi$ si ha $\varphi \le \psi$ da cui segue $t < L\varphi \le L\psi$. Per l'arbitrarietà di $K \prec \psi$ e per quanto provato al passo precedente risulta $t < L\varphi \le \mu^*(K)$ e questo prova l'asserto.

Passo 5. Per ogni insieme aperto $V \subset X$ si ha

$$V \in \mathcal{S}(\mu^*).$$

Questo prova che $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ è una misura positiva di Borel in X.
Sia $V \subset X$ un insieme aperto. Occorre provare che vale la condizione di misurabilità di Carathéodory

$$(****) \qquad \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap V) + \mu^*(A \setminus V)$$

per ogni insieme A con $0 < \mu^*(A) < +\infty$.
Sia dapprima $A = U$ un insieme aperto con $\mu^*(A) < +\infty$. Se è $V \cap U = \varnothing$, risulta

$$\mu^*(U) \geq \mu^*(U \setminus V) \geq \mu^*(U \cap V) + \mu^*(U \setminus V)$$

e non c'è altro da provare. Altrimenti, sia $U \cap V \neq \varnothing$ cosicché, essendo $U \cap V$ aperto, per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste una funzione $\varphi \in C_c(X)$ tale che

$$\varphi \prec U \cap V \qquad \text{e} \qquad L\varphi > \mu^*(U \cap V) - \varepsilon/2.$$

L'insieme $U \setminus \operatorname{supp}(\varphi)$ è a sua volta aperto e quindi come prima esiste una funzione $\psi \in C_c(X)$ tale che

$$\varphi \prec U \setminus \operatorname{supp}(\varphi) \qquad \text{e} \qquad L\psi > \mu^*(U \setminus \operatorname{supp}(\varphi)) - \varepsilon/2.$$

Allora, $\varphi + \psi \prec U$ e quindi risulta

$$\begin{aligned}\mu^*(U) \geq L(\varphi+\psi) = L\varphi + L\psi > \mu^*(U \cap V) + \mu^*(U \setminus \operatorname{supp}(\varphi)) - \varepsilon \geq \\ \geq \mu^*(U \cap V) + \mu^*(U \setminus V) - \varepsilon.\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue $(****)$ con $A = U$ aperto e $\mu^*(U) < +\infty$.
Sia quindi $A \subset X$ un insieme qualunque con $\mu^*(A) < +\infty$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste U aperto tale che $A \subset U$ e $\mu^*(U) < \mu^*(A) + \varepsilon$. Si ha allora

$$\mu^*(A) + \varepsilon > \mu^*(U) \geq \mu^*(U \cap V) + \mu^*(U \setminus V) \geq \mu^*(U \cap V) + \mu^*(A \setminus U)$$

per quanto provato sopra e dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue $(****)$.

Passo 6. Si ha

$$Lf = \int_X f\, d\mu, \qquad f \in C_c(X).$$

Basta provare l'uguaglianza per le funzioni reali $f = u \in C_c(X,\mathbb{R})$. Inoltre, per ogni funzione $u \in C_c(X)$ reale si ha $u = u^+ - u^-$ con $u^\pm \in C_c(X)$ e $u^\pm \geq 0$ e quindi, essendo L positivo, risulta $Lu = Lu^+ - Lu^- \in \mathbb{R}$. Conseguentemente, la restrizione di L al sottospazio $C_c(X,\mathbb{R})$ è un funzionale lineare a valori reali e quindi basta provare solo che risulta

$$Lu \leq \int_X u\, d\mu, \qquad u \in C_c(X) \text{ reale.}$$

Sia $u \in C_c(X)$ e siano $K = \operatorname{supp}(u)$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < u(x) \leq b$ per ogni $x \in X$. Fissato $\varepsilon > 0$, siano $a = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b$ con $y_m - y_{m-1} \leq \varepsilon$ per ogni $m = 1, \dots, n$. Gli insiemi

$$B_m = \big\{x \in K : \ y_{m-1} < u(x) \leq y_m\big\} \cap K, \qquad m = 1, \dots, n,$$

sono insiemi Borel misurabili, disgiunti e tali che $B_1 \cup \cdots B_n = K$. Siano quindi V_m $(m = 1, \dots, n)$ insiemi aperti tali che si abbia

- $B_m \subset V_m$ e $\mu(V_m) \leq \mu(B_m) + \varepsilon/n$;
- $u(x) \leq y_m + \varepsilon$ per ogni $x \in V_m$;

per ogni m e siano $\varphi_m \in C_c(X)$ altrettante funzioni tali che $\varphi_m \prec V_m$ e tali che risulti $\varphi_1 + \cdots + \varphi_n = 1$ su K (Teorema I–2.186). In particolare si ha

$$\mu(K) \leq L\varphi_1 + \cdots + L\varphi_n$$

e risulta

- $u = u\varphi_1 + \cdots + u\varphi_n$ e $\operatorname{supp}(u\varphi_m) \subset V_m$;
- $u(x)\varphi_m(x) \leq (y_m + \varepsilon)\varphi_m(x)$ per ogni $x \in X$;
- $u(x) > y_{m-1} \geq y_m - \varepsilon$ per ogni $x \in B_m$;

per ogni m. Si ha allora

$$\begin{aligned} Lu = L(u\varphi_1) + \cdots + L(u\varphi_n) &\leq \sum_{1\leq m\leq n} (y_m + \varepsilon)L\varphi_m \leq \\ &\leq \sum_{1\leq m\leq n} (|a| + y_m + \varepsilon)L\varphi_m - |a| \sum_{1\leq m\leq n} L\varphi_m \end{aligned}$$

e quindi, essendo $|a|+y_m+\varepsilon \geq |a|+y_0+\varepsilon = |a|+a+\varepsilon > 0$ per ogni m e tenendo conto delle relazioni sopra evidenziate, la catena di disuguaglianze precedenti prosegue con

$$\begin{aligned} Lu &\leq \sum_{1\leq m\leq n} (|a| + y_m + \varepsilon)L\varphi_m - |a| \sum_{1\leq m\leq n} L\varphi_m \leq \\ &\leq \sum_{1\leq m\leq n} (|a| + y_m + \varepsilon)\left[\mu(B_m) + \varepsilon/n\right] - |a|\mu(K) = \\ &= \sum_{1\leq m\leq n} (y_m + \varepsilon)\left[\mu(B_m) + \varepsilon/n\right] + |a|\varepsilon = \\ &= \sum_{1\leq m\leq n} (y_m - \varepsilon)\left[\mu(B_m) + \varepsilon/n\right] + \varepsilon\left[2\mu(K) + |a| + b + \varepsilon\right] \leq \\ &\leq \int_X u\,d\mu + \varepsilon\left[2\mu(K) + |a| + b + \varepsilon\right]. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di di $\varepsilon > 0$ segue la disuguaglianza cercata.

Passo 7. La misura μ è univocamente determinata sulla $\sigma-$algebra di Borel $\mathcal{B}(X)$. Proviamo che, se $\mu_i\colon \mathcal{S}_i \to [0, +\infty]$ $(i = 1, 2)$ sono misure di Radon tali che sia

$$Lu = \int_X u\,d\mu_i, \qquad u \in C_c(X) \quad (i = 1, 2),$$

risulta $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ per ogni insieme di Borel $B \in \mathcal{B}(X)$ e a tal fine, alla luce delle proprietà di regolarità delle misure di Radon, è sufficiente provare che risulta

$$K \text{ compatto} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu_1(K) = \mu_2(K).$$

Per K compatto e V aperto tali che $K \subset V$, sia $\varphi \in C_c(X)$ una funzione tale che $K \prec \varphi \prec V$ (Teorema I–2.184). Si ha allora

$$\mu_1(K) = \int_X 1_K\,d\mu_1 \leq \int_X \varphi\,d\mu_1 = L\varphi = \int_X \varphi\,d\mu_2 \leq \int_X 1_V\,d\mu_2 = \mu_2(V)$$

e per regolarità esterna di μ_2 riesce $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$. Scambiando i ruoli di μ_1 e μ_2 si ricava l'asserto. □

Regolarità delle misure di Radon. Esaminiamo in questa parte le proprietà di regolarità delle misure di Radon.

Teorema 3.3. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e siano*

- $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ *misura positiva di Radon in X;*

- *$E \in \mathcal{S}$ insieme di misura σ – finita.*

Allora, μ è regolare su E.

DIMOSTRAZIONE. Sia dapprima $E \in \mathcal{S}$ con $\mu(E) < +\infty$. Fissato $\varepsilon > 0$ esistono allora U insieme aperto tale che $E \subset U$ e $\mu(U) < \mu(E) + \varepsilon/2$ e K insieme compatto tale che $K \subset U$ e $\mu(K) > \mu(U) - \varepsilon/2$. Si ha quindi

$$\mu(K \setminus E) \leq \mu(U \setminus E) \leq \varepsilon/2.$$

L'insieme $H = K \setminus V$ è compatto e $H \subset E$ poiché risulta

$$x \in H \quad \Longrightarrow \quad x \in K \text{ e } x \notin V \quad \Longrightarrow \quad x \in K \text{ e } x \notin K \cap E \quad \Longrightarrow \quad x \in K \cap E.$$

Inoltre risulta

$$\mu(H) = \mu(K) - \mu(K \cap V) > \mu(U) - \varepsilon/2 - \mu(V) > \mu(U) - \varepsilon \geq \mu(E) - \varepsilon$$

e questo prova l'asserto quando $\mu(E) < +\infty$.
Sia quindi $E \in \mathcal{S}$ con $\mu(E_n) = +\infty$ e $E = \bigcup_n E_n$ con $E_n \in \mathcal{S}$ e $\mu(E_n) < +\infty$ per ogni n. Possiamo supporre che sia $E_n \subset E_{n+1}$ per ogni n cosicché $\mu(E_n) \to +\infty$ per $n \to +\infty$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste allora n tale che $\mu(E_n) > t$ cosicché esiste K_n insieme compatto con $K_n \subset E_n$ e $\mu(K_n) > t$ per quanto provato all'inizio e questo completa la dimostrazione. □

COROLLARIO 3.4. *Siano X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e $\mu\colon \mathcal{S} \to [0\,,+\infty]$ una misura positiva di Radon in X. Allora,*

(a) *μ σ – finita $\quad\Longrightarrow\quad$ μ regolare;*
(b) *X σ – compatto $\quad\Longrightarrow\quad$ μ regolare.*

TEOREMA 3.5. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e siano $\mu\colon \mathcal{S} \to [0\,,+\infty]$ una misura positiva di Radon in X σ – finita e $E \in \mathcal{S}$ un insieme $\mathcal{S}$ – misurabile. Allora,*

(a) *per ogni $\varepsilon > 0$ esistono F_ε chiuso e V_ε aperto tali che*

$$F_\varepsilon \subset E \subset V_\varepsilon \qquad e \qquad \mu(V_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon;$$

(b) *esistono $H \in \mathcal{F}_\sigma$ e $G \in \mathcal{G}_\delta$ tali che*

$$H \subset E \subset G \qquad e \qquad \mu(G \setminus H) = 0.$$

Se $\mu(E) < \infty$, in (a) si può scegliere $F_\varepsilon = K_\varepsilon$ compatto. Inoltre, in (b) l'insieme H si può prendere σ – compatto (Esercizio 3.2). Poiché gli insiemi di tipo $\mathcal{F}_\sigma$ e $\mathcal{G}_\delta$ sono insiemi di Borel, nelle ipotesi del teorema ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ è della forma

$$E = B_1 \cup T_1 \qquad \text{o} \qquad E = B_2 \setminus T_2$$

per opportuni insiemi di Borel $B_i \in \mathcal{B}(X)$ e opportuni insiemi μ – trascurabili T_i $(i = 1\,, 2)$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $X_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ insiemi tali che $X = \bigcup_n X_n$ e $\mu(X_n) < +\infty$ per ogni n.
(a) Si ha $E = \bigcup_n (E \cap X_n)$ e $\mu(E \cap X_n) < +\infty$ per ogni n e quindi, fissato $\varepsilon > 0$, per ogni n esiste un insieme aperto V_n tale che

$$E \cap X_n \subset V_n \qquad \text{e} \qquad \mu(V_n \setminus (E \cap X_n)) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Allora, l'insieme aperto $V_\varepsilon = \bigcup_n V_n$ contiene E e risulta

$$V_\varepsilon \setminus E \subset \bigcup_n \big(V_n \setminus (E \cap X_n)\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(V_\varepsilon \setminus E) \leq \varepsilon/2.$$

Ripetendo il medesimo ragionamento con E^c si determina un insieme aperto W tale che $E^c \subset W$ e $\mu(W \setminus E^c) \le \varepsilon/2$. L'insieme $F_\varepsilon = W^c$ è quindi chiuso e tale che $F_\varepsilon \subset E$ con $E \setminus F_\varepsilon = W \setminus E^c$ da cui segue $\mu(E \setminus F_\varepsilon) \le \varepsilon/2$.

(b) Per ogni $n \ge 1$ sia V_n aperto tale che $E \subset V_n$ e $\mu(V_n \setminus E) \le 1/n$. Allora $G = \bigcap_n V_n$ è un insieme di tipo $\mathcal{G}_\delta$ tale che $E \subset G$ e $\mu(G \setminus E) \le \mu(V_n \setminus E) \le 1/n$ per ogni n da cui segue $\mu(G \setminus E) = 0$. Ripetendo lo stesso ragionamento con E^c si determina un insieme G' di tipo $\mathcal{G}_\delta$ tale che $E^c \subset G'$ e $\mu(G' \setminus E^c) = 0$. Allora, $H = (G')^c$ è un insieme di tipo $\mathcal{F}_\sigma$ tale che $E \setminus H = E^c \setminus G'$ da cui segue $\mu(E \setminus H) = 0$. □

Nel caso di una misura di Radon completa ciascuna delle proprietà elencate nel teorema precedente caratterizza gli insiemi $\mathcal{S}-$misurabili. Formalizziamo questa osservazione nel corollario seguente di ovvia dimostrazione.

Corollario 3.6. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e siano $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva di Radon in X σ –finita e completa e $E \subset X$ un insieme. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) $E \in \mathcal{S}$;

(b) *per ogni $\varepsilon > 0$ esistono F_ε chiuso e V_ε aperto tali che*
$$F_\varepsilon \subset E \subset V_\varepsilon \qquad e \qquad \mu(V_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \le \varepsilon;$$

(c) *esistono $B_i \in \mathcal{B}(X)$ $(i = 1, 2)$ tali che*
$$B_1 \subset E \subset B_2 \qquad e \qquad \mu(B_2 \setminus B_1) = 0.$$

In particolare, da (c) segue che una misura positiva di Radon $\sigma-$finita e completa μ in X risulta essere il completamento della sua restrizione alla $\sigma-$algebra di Borel (Proposizione 1.28).

Concludiamo questa parte esaminando alcuni risultati che stabiliscono che misure positive dotate di qualche grado di regolarità sono in effetti misure di Radon.

Teorema 3.7. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e σ –compatto e sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva di Borel in X tale che*

- *μ è finita sui compatti;*
- *μ è esternamente regolare.*

Allora, μ è una misura positiva di Radon in X regolare.

Dimostrazione. Sia $E \in \mathcal{S}$ un insieme fissato. Ragionando come nella dimostrazione di Teorema 3.5[1] si conclude che risulta
$$\mu(E) = \sup\left\{\mu(F) : \ F \subset E \text{ e } F \text{ chiuso}\right\}.$$
Siano quindi K_n $(n \ge 1)$ insiemi compatti tali che $X = \bigcup_n K_n$ e $K_n \subset K_{n+1}$ per ogni n cosicché per ogni insieme chiuso F risulta
$$\mu(F) = \lim_{n\to+\infty} \mu(F \cap K_n) = \sup_{n\ge1} \mu(F \cap K_n)$$
con $F \cap K_n$ compatto. Questo prova che μ è una misura positiva di Radon in X e la restante affermazione segue da Teorema 3.5. □

Una misura positiva di Borel $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ con la seguente proprietà: per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ esiste un insieme di Borel $B \in \mathcal{B}(X)$ tale che
$$E \subset B \qquad \text{e} \qquad \lambda(E) = \lambda(B)$$
si dice *Borel – regolare in X*.

[1] La dimostrazione di Teorema 3.5 non utilizza l'ipotesi che μ sia internamente regolare su alcun insieme.

Ogni misura positiva di Radon $\sigma-$finita è quindi finita sui compatti e Borel$-$regolare (Teorema 3.5$-$(b)) e questa relazione può essere invertita per le misure positive di Borel finite sui compatti in spazi topologici di Hausdorff localmente compatti aventi aperti $\sigma-$compatti.

TEOREMA 3.8. *Siano X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0\,,+\infty]$ una misura positiva di Borel in X tali che*

- *ogni aperto di X è $\sigma-$compatto;*
- *λ è finita sui compatti e Borel$-$regolare.*

Allora,

(a) *λ è una misura di Radon in X regolare;*
(b) *esiste una misura di Radon in X completa e regolare $\mu\colon \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ che estende λ.*

Inoltre, se λ è anche completa, risulta $\mathcal{S} = \mathcal{M}$ e $\lambda = \mu$.

DIMOSTRAZIONE. Essendo λ una misura positiva di Borel finita sui compatti, ogni funzione $\varphi \in C_c(X)$ è $\lambda-$integrabile e quindi

$$Lu = \int_X u\, d\lambda, \qquad u \in C_c(X),$$

risulta essere un funzionale lineare positivo su $C_c(X)$. Esiste allora una misura positiva di Radon in X completa e regolare $\mu\colon \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ tale che

$$\int_X u\, d\lambda = \int_X u\, d\mu, \qquad u \in C_c(X).$$

Proviamo che risulta $\lambda(V) = \mu(V)$ per ogni insieme aperto V. Siano infatti K_n $(n \geq 1)$ insiemi compatti tali che $V = \bigcup_n K_n$ con $K_n \subset K_{n+1}$ per ogni n e siano $\varphi_n \in C_c(X)$ $(n \geq 1)$ le funzioni ricorsivamente definite da

$$K_1 \prec \varphi_1 \prec V \qquad \text{e} \qquad K_{n+1} \cup \operatorname{supp}(\varphi_n) \prec \varphi_{n+1} \prec V \text{ per } n \geq 1$$

Allora, $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ in X per ogni n e $\varphi_n \to 1_V$ puntualmente in X per $n \to +\infty$ e quindi per il teorema di convergeneza monotòna risulta

$$\lambda(V) = \lim_{n\to+\infty} \int_X \varphi_n\, d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_X \varphi_n\, d\mu = \mu(V).$$

Proviamo che la stessa uguaglianza vale per ogni insieme di Borel di X. Sia $B \in \mathcal{B}(X)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono F_ε chiuso e V_ε aperto tali che $F_\varepsilon \subset B \subset V_\varepsilon$ e $\mu(V_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$ (Teorema 3.5$-$(a)). Da $\lambda(V_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) = \mu(V_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$ segue

$$\lambda(B) \leq \lambda(V_\varepsilon) \leq \lambda(B) + \lambda(V_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq \lambda(B) + \varepsilon.$$

Pertanto λ è esternamente regolare sugli insiemi di Borel e da ciò segue

$$\begin{aligned}\lambda(B) &= \inf\big\{\lambda(V) :\ B \subset V \text{ e } V \text{ aperto}\big\} = \\ &= \inf\big\{\mu(V) :\ B \subset V \text{ e } V \text{ aperto}\big\} = \mu(B)\end{aligned}$$

per la regolarità esterna di μ.
Risulta quindi $\lambda = \mu$ su $\mathcal{B}(X)$ cosicché, essendo λ Borel$-$regolare, dato $E \in \mathcal{S}$ esiste $B \in \mathcal{B}(X)$ tale che $E \subset B$ e $\lambda(E) = \lambda(B)$ e, utilizzando nuovamente la regolarità esterna di λ sugli insiemi di Borel, da ciò segue

$$\begin{aligned}\lambda(E) &\leq \inf\big\{\lambda(V) :\ E \subset V \text{ e } V \text{ aperto}\big\} \leq \\ &\leq \inf\big\{\lambda(V) :\ B \subset V \text{ e } V \text{ aperto}\big\} = \lambda(B).\end{aligned}$$

Abbiamo così provato che λ è una misura positiva di Borel finita sui compatti e esternamente regolare e dunque λ risulta essere una misura di Radon regolare in X (Teorema 3.7).
Resta ancora da provare che μ estende λ. Sia quindi $E \in \mathcal{S}$ e siano $B_i \in \mathcal{B}(X)$ $(i = 1, 2)$ insiemi di Borel tali che $B_1 \subset E \subset B_2$ e $\lambda(B_2 \setminus B_1) = 0$. Poiché μ e λ coincidono su $\mathcal{B}(X)$ l'insieme $B_2 \setminus B_1$ è anche $\mu-$trascurabile cosicché E differisce da un insieme di Borel per un insieme $\mu-$trascurabile. Essendo μ completa risulta $E \in \mathcal{M}$. Infine, se anche λ è completa, questo stesso argomento a ruoli scambiati fornisce l'inclusione di $\mathcal{M}$ in $\mathcal{S}$ e questo completa la dimostrazione. □

Un caso particolare del risultato precedente che merita di essere evidenziato è il seguente.

Corollario 3.9. *Sia* $\lambda\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \to [0, +\infty]$ *una misura positiva di Borel in* $\mathbb{R}^N$ *finita sui compatti. Allora,*

(a) λ *è una misura di Radon in* $\mathbb{R}^N$ *regolare;*
(b) *il completamento di* λ *è una misura positiva di Radon in* $\mathbb{R}^N$ *regolare e completa.*

Regolarità di misure di Borel non finite sui compatti. Nel caso di misure positive Borel−regolari ma non finite sui compatti in spazi topologici di Hausdorff localmente compatti aventi aperti $\sigma-$compatti è possibile recuperare almeno parzialmente i risultati di regolarità del paragrafo precedente pur di considerare la restrizione della misura ad insiemi di misura finita.

Proposizione 3.10. *Sia* X *uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto avente aperti* σ *−compatti e siano*

- $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ *una misura positiva Borel−regolare in* X*;*
- $Y \in \mathcal{S}$ *con* $\mu(Y) < +\infty$.

Allora, la restrizione $\mu \llcorner Y\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ *di* μ *a* Y *definita da*

$$\mu \llcorner Y(E) = \mu(E \cap Y), \qquad E \in \mathcal{S},$$

è una misura positiva di Radon in X *finita e regolare.*

Nelle ipotesi del teorema la restrizione di μ ad Y non è in genere completa.

Dimostrazione. Proviamo preliminarmente che possiamo supporre che sia $Y = B$ con B insieme di Borel di X. Sia infatti $B \in \mathcal{B}(X)$ tale che $Y \subset B$ e $\mu(Y) = \mu(B)$. Da $\mu(Y) < +\infty$ segue $\mu(B \setminus Y) = 0$ cosicché si ha

$$\mu \llcorner B(E) = \mu(E \cap B) = \mu(E \cap Y) + \mu(E \cap (B \setminus Y)) = \mu(E \cap Y) = \mu \llcorner Y(E)$$

per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$.
Sia quindi $Y = B$ insieme di Borel di X e siano $E \in \mathcal{S}$ e $B' \in \mathcal{B}(X)$ insiemi tali che sia $E \cap B \subset B'$ e $\mu(E \cap B) = \mu(B')$. L'insieme $B'' = B' \cup B^{\mathrm{c}}$ è un insieme di Borel tale che

$$E = (E \cap B) \cup (E \setminus B) \subset B' \cup B^{\mathrm{c}} = B''$$

cosicché da $B \cap B'' = B \cap B'$ segue

$$\mu \llcorner B(B'') = \mu(B \cap B'') = \mu(B \cap B') \le \mu(B') = \mu(E \cap B) = \mu \llcorner B(E)$$

e quindi $\mu \llcorner B$ risulta essere una misura positiva Borel−regolare e finita sui compatti. La conclusione segue quindi da Teorema 3.8. □

Il risultato precedente può essere ulteriormente esteso al caso di insiemi $\sigma-$finiti. Utilizzeremo questo fatto nel caso delle misure di Hausdorff in $\mathbb{R}^N$ (Capitolo **??**).

COROLLARIO 3.11. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto avente aperti σ – compatti e siano*

- $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ *una misura positiva Borel – regolare in X;*
- $Y \in \mathcal{S}$ *un insieme σ – finito.*

Allora, la restrizione $\mu \llcorner Y : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ di μ ad Y è una misura positiva di Radon in X regolare e σ – finita.

DIMOSTRAZIONE. Sia $Y = \bigcup_n Y_n$ con $Y_n \in \mathcal{S}$ e $\mu(Y_n) < +\infty$ per ogni n. Supponiamo inoltre che gli insiemi Y_n siano disgiunti. Per ogni n la misura concentrata su Y_n definita da

$$\mu_n(E) = \mu(E \cap Y_n), \qquad E \in \mathcal{S},$$

è una misura di Radon in X finita e regolare per il teorema precedente e risulta

$$\mu \llcorner Y(E) = \sum_n \mu_n(E), \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Sia $E \in \mathcal{S}$ un insieme fissato. Per ogni n esistono allora insiemi di Borel B'_n e B''_n tali che $B'_n \subset E \subset B''_n$ e $\mu_n(B''_n \setminus B'_n) = 0$. Posto $B' = \bigcup_n B'$ e $B'' = \bigcap_n B''_n$ risulta $B' \subset E \subset B''$ e da $B'' \setminus B' \subset B''_n \setminus B'_n$ per ogni n segue

$$\mu \llcorner Y(B'' \setminus B') = \sum_n \mu_n(B'' \setminus B') \leq \sum_n \mu_n(B''_n \setminus B'_n) = 0 \qquad \square$$

3.2. Funzioni misurabili e funzioni continue

Le proprietà di approssimazione della misura di insiemi misurabili in termini di misura di insiemi aperti e di insiemi compatti delle misure di Radon in spazi topologici di Hausdorff localmente compatti suggeriscono la possibilità che proprietà di approssimazione rispetto alla misura di Radon – in un senso da precisare – valgano per le funzioni misurabili in termini di funzioni continue o comunque di funzioni topologicamente rilevanti. Esaminiamo in questa sezione due risultati di questo tipo.

Teorema di Lusin. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto. Il *teorema di approssimazione di Lusin* che proviamo in questa parte stabilisce che nel caso di misure di Radon le funzioni misurabili nulle al di fuori di un insieme di misura finita coincidono con una funzione continua a supporto compatto al di fuori di insiemi di misura arbitrariamente piccola.

TEOREMA 3.12 (N. Lusin). *Siano X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva di Radon in X e sia $f\colon X \to \mathbb{K}$ una funzione $\mathcal{S}$ – misurabile tale che*

$$\mu(\{f \neq 0\}) < +\infty.$$

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $\varphi_\varepsilon \in C_c(X)$ tale che

(a) $\mu(\{\varphi_\varepsilon \neq f\}) \leq \varepsilon$;

(b) *se f è limitata risulta* $\max_{x \in X} |\varphi_\varepsilon(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$.

DIMOSTRAZIONE. (a) Sia $A \in \mathcal{S}$ un insieme tale che

$$\{f \neq 0\} \subset A \qquad \text{e} \qquad \mu(A) < +\infty$$

e dividiamo la dimostrazione nei casi seguenti.

Caso 1. A compatto e f reale con $0 \le f < 1$.

Siano $E_{n,k} \in \mathcal{S}$ e s_n ($k = 1, \dots, 2^n$ e $n \ge 0$) gli insiemi $\mathcal{S}-$misurabili e le funzioni semplici, $\mathcal{S}-$misurabili e non negative definite da

$$E_{n,k} = \left\{ \frac{k-1}{2^n} \le f < \frac{k}{2^n} \right\}; \qquad k = 1, \dots, 2^n \text{ e } n \ge 0$$

$$s_n(x) = \sum_{1 \le k \le 2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{E_{n,k}}(x), \qquad x \in X,$$

per ogni k e n come in Teorema 2.9. Per ogni n fissato gli insiemi $E_{n,k}$ sono disgiunti e costituiscono una partizione di X e per le funzioni semplici $\{s_n\}_n$ risulta $0 \le s_n \le s_{n+1}$ in X per ogni n e $s_n \to u$ uniformente in X per $n \to +\infty$. Poniamo

$$t_0 = s_0 \qquad \text{e} \qquad t_n = s_n - s_{n-1} \quad (n \ge 1)$$

cosicché risulta telescopicamente $t_1 + \dots + t_n = s_n - s_0 = s_n$ per ogni n e quindi

$$f = \sum_{n \ge 1} t_n \qquad \text{uniformemente in } X.$$

Si ha inoltre

$$E_{n-1,k} = E_{n,2k-1} \cup E_{n,2k}, \qquad k = 1, \dots, 2^{n-1} \quad (n \ge 1)$$

e da ciò segue

$$\begin{aligned}
t_n = s_n - s_{n-1} &= \sum_{1 \le k \le 2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{E_{n,k}} - \sum_{1 \le h \le 2^{n-1}} \frac{h-1}{2^{n-1}} 1_{E_{n-1,h}} = \\
&= \sum_{1 \le k \le 2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{E_{n,k}} - \sum_{1 \le h \le 2^{n-1}} \frac{h-1}{2^{n-1}} \left(1_{E_{n,2h-1}} + 1_{E_{n,2h}} \right) = \\
&= \sum_{1 \le h \le 2^{n-1}} \left(\frac{2h-2}{2^n} 1_{E_{n,2h-1}} + \frac{2h-1}{2^n} 1_{E_{n,2h}} \right) + \\
&\qquad\qquad - \sum_{1 \le h \le 2^{n-1}} \frac{h-1}{2^{n-1}} \left(1_{E_{n,2h-1}} + 1_{E_{n,2h}} \right) = \\
&= \sum_{1 \le h \le 2^{n-1}} \left(\frac{2h-1}{2^n} - \frac{h-1}{2^{n-1}} \right) 1_{E_n,2h} = \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{1 \le h \le 2^{n-1}} 1_{E_{n,2h}}
\end{aligned}$$

per ogni $n \ge 1$. Abbiamo così provato che risulta

$$t_n = \frac{1}{2^n} 1_{E_n} \qquad \text{con} \qquad E_n = E_{n,2} \cup E_{n,4} \cup \dots \cup E_{n,2^n}$$

per ogni $n \ge 1$.

Essendo u non nulla in E_n, risulta $E_n \subset A$ per ogni n e, essendo A compatto, esiste V insieme aperto tale che $A \subset V$ con $\mathrm{cl}(V)$ compatto. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $n \ge 1$ siano K_n compatto e V_n aperto tali che

$$K_n \subset E_n \subset V_n \subset V \qquad \text{con} \qquad \mu(V_n \setminus K_n) \le \varepsilon / 2^n$$

e sia $\varphi_n \in C_c(X)$ una funzione tale che $K_n \prec \varphi_n \prec V_n$ (Teorema I–2.184). La serie di funzioni

$$\varphi_\varepsilon(x) = \sum_{n \ge 1} \frac{1}{2^n} \varphi_n(x), \qquad x \in X,$$

converge totalmente in X e quindi definisce una funzione continua φ_ε a valori reali. Essendo φ_ε nulla in V^c, risulta $\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset \mathrm{cl}(V)$ e $\varphi_\varepsilon \in C_c(X)$.

Consideriamo ora l'insieme

$$X \setminus \left[\bigcup_n (V_n \setminus K_n)\right] = \bigcap_n (K_n \cup V_n^{\mathrm{c}})$$

e sia x appartenente a tale insieme. Per tale x, per ogni n risulta $x \in K_n$ oppure $x \in V_N^{\mathrm{c}}$ e a seconda del caso si ha

$$\begin{aligned} x \in K_n \qquad &\Longrightarrow \qquad \frac{1}{2^n}\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n}1_{E_n}(x) = t_n(x); \\ x \in V_n^{\mathrm{c}} \qquad &\Longrightarrow \qquad \frac{1}{2^n}\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n}1_{E_n}(x) = t_n(x). \end{aligned}$$

In tale insieme risulta pertanto $\varphi_\varepsilon = u$ da cui segue

$$\{\varphi_\varepsilon \neq f\} \subset \bigcup_n (V_n \setminus K_n) \qquad \text{con} \qquad \mu\left(\bigcup_n (V_n \setminus K_n)\right) \leq \sum_n \mu(V_n \setminus K_n) \leq \varepsilon$$

e questo conclude il primo caso.

Caso 2. A compatto e f limitata.

Sia $f = (u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-)$ e sia $M > |f(x)|$ per ogni x. Le funzioni $u^\pm/M$ e $v^\pm/M$ sono $\mathcal{S}-$misurabili, nulle fuori da A e assumono valori nell'intervallo $[0,1)$. Per quanto provato prima, fissato $\varepsilon > 0$, esistono due coppie di funzioni reali $\chi_\varepsilon^\pm, \psi_\varepsilon^\pm$ in $C_{\mathrm{c}}(X)$ per le quali la misura μ degli insiemi $\{\chi_\varepsilon^\pm \neq u^\pm/M\}$ e $\{\psi_\varepsilon^\pm(\neq v^\pm/M\}$ sia non superiore a $\varepsilon/4$ cosicchè la funzione $\varphi_\varepsilon = M(\chi_\varepsilon^+ - \chi_\varepsilon^-) + iM(\psi_\varepsilon^+ - \psi_\varepsilon^-)$ appartiene a $C_{\mathrm{c}}(X)$ e da

$$\{\varphi_\varepsilon \neq f\} \subset \{\chi_\varepsilon^+ \neq u^+/M\} \cup \{\chi_\varepsilon^- \neq u^-/M\} \cup \{\psi_\varepsilon^+ \neq v^+/M\} \cup \{\psi_\varepsilon^- \neq v^-/M\}$$

segue che φ_ε differisce da f su un insieme di misura μ non superiore a ε.

Caso 3. $\mu(A) < +\infty$ e f limitata.

Sia $\mu(\{f \neq 0\}) > 0$ altrimenti non c'è nulla da provare e, fissato $\varepsilon > 0$, sia K un insieme compatto tale che $K \subset \{f \neq 0\}$ e $\mu(\{f \neq 0\} \setminus K) \leq \varepsilon/2$ (Teorema 3.3). La funzione $g = f1_K$ è $\mathcal{S}-$misurabile e limitata con $\{g \neq 0\} \subset \{f \neq 0\} \setminus K$. Per quanto provato nel caso precedente esiste $\varphi_\varepsilon \in C_{\mathrm{c}}(X)$ tale che $\mu(\{\varphi_\varepsilon \neq g\}) \leq \varepsilon/2$ e da

$$\{\varphi_\varepsilon \neq f\} \subset \{\varphi_\varepsilon \neq g\} \cup \{g \neq f\} \qquad \text{e} \qquad \{g \neq f\} \subset \{f \neq 0\} \setminus K$$

segue l'asserto.

Caso 4. $\mu(A) < +\infty$.

Siano $E_n = \{|f| \geq n\}$ $(n \geq 1)$ gli insiemi di sopralivello di f. Si ha $E_n \subset E_{n+1}$ e $\mu(E_n) < +\infty$ per ogni n e $\bigcap_n E_n = \varnothing$ cosicché risulta $\mu(E_n) \to 0$ per $n \to +\infty$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $n \geq 1$ tale che $\mu(E_n) \leq \varepsilon/2$. La funzione $f_n = (1 - 1_{E_n})f$ è $\mathcal{S}-$misurabile e limitata con $\{f_n \neq 0\} \subset \{f \neq 0\} \setminus E_n$. Per quanto provato nel caso precedente esiste allora $\varphi_\varepsilon \in C_{\mathrm{c}}(X)$ tale che $\mu(\{\varphi_\varepsilon \neq f_n\}) \leq \varepsilon/2$ e da

$$\{\varphi_\varepsilon \neq f\} \subset \{\varphi_\varepsilon \neq f_n\} \cup \{f_n \neq f\} \qquad \text{e} \qquad \{f_n \neq f\} \subset E_n$$

segue l'asserto e questo conclude la dimostrazione di (a).

(b) Sia $M > 0$ tale che

$$M = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

e sia

$$\Phi_M(t) = \begin{cases} t & \text{se } |t| \leq M \\ Mt/|t| & \text{se } |t| \geq M \end{cases} \qquad \text{o} \qquad \Phi_M(z) = \begin{cases} z & \text{se } |z| \leq M \\ Mz/|z| & \text{se } |z| \geq M \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$ o $z \in \mathbb{C}$ a seconda che f sia reale o complessa. In entrambi i casi risulta $\Phi_M \circ f = f$ in X.

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste allora $\varphi_\varepsilon \in C_c(X)$ tale che $\mu(\{\varphi_\varepsilon \neq f\}) \leq \varepsilon$ e, essendo Φ_M lipschitziana di costante uno, risulta

$$|\Phi_M \circ \varphi_\varepsilon(x) - f(x)| = |\Phi_M \circ \varphi_\varepsilon(x) - \Phi_M \circ f(x)| \leq |\varphi_\varepsilon(x) - f(x)|$$

per ogni x da cui segue $\{\Phi_M \circ \varphi_\varepsilon \neq f\} \subset \{\varphi_\varepsilon \neq f\}$. Essendo $\Phi_M \circ \varphi_\varepsilon \in C_c(X)$ e $|\Phi_M \circ \varphi_\varepsilon(x)| \leq M$ per ogni x, la funzione $\Phi_M \circ \varphi_\varepsilon$ ha le proprietà cercate. □

Corollario 3.13. *Siano X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva di Radon in X e sia $f\colon X \to \mathbb{K}$ una funzione $\mathcal{S}$ – misurabile tale che*

$$\mu(\{f \neq 0\}) < +\infty.$$

Allora esistono funzioni $\varphi_n \in C_c(X)$ $(n \geq 1)$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = f(x) \qquad \text{per } \mu\text{ – q.o. } x \in X.$$

Inoltre, se f è limitata risulta

$$\sup_{x\in X} |\varphi_n(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)|, \qquad n \geq 1.$$

Dimostrazione. Per il teorema di Lusin, per ogni $n \geq 1$ esiste $\varphi_n \in C_c(X)$ tale che sia $\mu(\{\varphi_n \neq f\}) \leq 1/2^n$. Posto

$$E = \bigcap_{m\geq1} \bigcup_{n\geq m} \{\varphi_n \neq f\} = \{x : \varphi_n(x) \neq f(x) \text{ per infiniti } n\} \in \mathcal{S}$$

(Esercizio 1.9), risulta $\mu(E) \leq 1/2^{m-1}$ per ogni m e quindi E è μ – trascurabile. Per ogni x nel complementare di tale insieme si ha $\varphi_n(x) = f(x)$ definitivamente e questo prova la prima affermazione. La seconda segue direttamente dalla corrispondente affermazione del teorema di Lusin. □

Nel caso di uno spazio di Hausdorff localmente compatto che sia anche σ – compatto è possibile eliminare l'ipotesi che la funzione da approssimare sia nulla al di fuori di un insieme di misura finita.

Corollario 3.14. *Siano X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e σ – compatto e $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva di Radon in X e sia $f\colon X \to \mathbb{K}$ una funzione $\mathcal{S}$ – misurabile. Allora esistono funzioni $\varphi_n \in C_c(X)$ $(n \geq 1)$ tali che*

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = f(x) \qquad \text{per } \mu\text{ – q.o. } x \in X.$$

Inoltre, se f è limitata risulta

$$\sup_{x\in X} |\varphi_n(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)|, \qquad n \geq 1.$$

Dimostrazione. Siano V_n $(n \geq 1)$ insiemi aperti precompatti con $\mathrm{cl}(V_n) \subset V_{n+1}$ per ogni n e $X = \bigcup_n V_n$ (Teorema I–2.188). La misura μ_n definita da

$$\mu_n(E) = \mu(E \cap V_n), \qquad E \in \mathcal{S},$$

è una misura di Radon finita in X (Esercizio 3.4). Per ogni n esiste allora $\varphi_n \in C_c(X)$ tale che

$$\mu(\{\varphi_n \neq f\} \cap V_n) = \mu_n(\{\varphi_n \neq f\}) \leq 1/2^n$$

e il resto della dimostrazione procede come nel corollario precedente. □

Funzioni misurabili e funzioni semicontinue. Esaminiamo in questa parte alcuni risultati relativi all'approssimazione di funzioni integrabili mediante funzioni semicontinue nell'ambito delle misure di Radon in spazi di Hausdorff localmente compatti. Consideriamo in questa parte esclusivamente funzioni a valori reali.

TEOREMA 3.15 (G. Vitali–C. Carathéodory). *Siano X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva di Radon in X e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione μ –integrabile. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due funzioni $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon\colon X \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:*

(a) *φ_ε è semicontinua superiormente e limitata superiormente;*

(b) *ψ_ε è semicontinua inferiormente e limitata inferiormente;*

(c) *$\varphi_\varepsilon \le f \le \psi_\varepsilon$ in X e $\displaystyle\int_X (\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon)\, d\mu \le \varepsilon$.*

Questo risultato prende il nome di *teorema di approssimazione di Vitali–Carathéodory.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo evidentemente supporre che f non sia identicamente nulla e consideriamo dapprima il caso di $f\colon X \to [0,+\infty)$ non negativa. Siano $s_n\colon X \to [0,+\infty)$ ($n \ge 1$) le funzioni semplici $\mu-$integrabili associate ad f da Teorema 2.9. Procedendo come nella dimostrazione del teorema di Lusin, poniamo $s_0 = 0$ e
$$t_n = s_n - s_{n-1}, \qquad n \ge 1,$$
cosicché t_n è la combinazione lineare a coefficienti positivi di funzioni caratteristiche di insiemi di $\mathcal{S}$[2] e risulta
$$f(x) = \sum_n t_n(x) \qquad x \in X,$$
con convergenza puntuale in X. Pertanto, la funzione f si scrive come somma di una serie
$$f(x) = \sum_n c_n 1_{E_n}(x), \qquad x \in X,$$
di funzioni caratteristiche di insiemi $E_n \in \mathcal{S}$ (non disgiunti) con coefficienti $c_n > 0$. Si ha allora
$$\int_X f\, d\mu = \sum_n c_n \mu(E_n)$$
cosicché la serie a destra converge e in particolare risulta $m(E_n) < +\infty$ per ogni n. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni n esistono quindi K_n compatto e V_n aperto tali che
$$K_n \subset E_n \subset V_n \qquad \text{e} \qquad \mu(V_n \setminus K_n) \le \frac{\varepsilon}{c_n 2^{n+1}}.$$
Scegliamo ora $n_0 = n_0(\varepsilon) \ge 1$ tale che
$$\sum_{n \ge n_0+1} c_n \mu(E_n) \le \varepsilon/2$$
e consideriamo le funzioni $\varphi_\varepsilon\colon X \to [0,+\infty)$ e $\psi_\varepsilon\colon X \to [0,+\infty]$ definite rispettivamente da
$$\varphi_\varepsilon = \sum_{1 \le n \le n_0} c_n 1_{K_m} \qquad \text{e} \qquad \psi_\varepsilon = \sum_n c_n 1_{V_n}.$$
Poiché le funzioni caratteristiche di insiemi compatti sono semicontinue superioremente e le funzioni caratteristiche di insiemi aperti sono semicontinue inferiormente ed essendo $c_n > 0$ per ogni n, la funzione φ_ε risulta essere semicontinua superiormente e la funzione ψ_ε risulta essere semicontinua inferiormente (Corollario I–2.152). Risulta inoltre $\psi_\varepsilon(x) < +\infty$ per $\mu-$q.o. $x \in X$ poché si ha
$$\int_X \left(\sum_n c_n 1_{V_n} \right) d\mu \le \sum_n c_n \mu(V_n) \le \sum_n c_n \mu(E_n) + \varepsilon/2 = \int_X f\, d\mu + \varepsilon/2 < +\infty$$

[2] Nella dimostrazione del teorema di Lusin la funzione t_n è in effetti proporzionale alla caratteristica di un insieme di $\mathcal{S}$ ma in tal caso ciò dipende dall'ipotesi che sia $0 \le f < 1$ in X.

e per costruzione si ha $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ in X. Si ha infine

$$\begin{aligned}\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon &= \sum_{1\leq n\leq n_0} c_n\left(1_{V_n} - 1_{K_n}\right) + \sum_{n\geq n_0+1} c_n 1_{V_n} = \\ &= \sum_{n\geq 1} c_n 1_{V_n\setminus K_n} + \sum_{n\geq n_0+1} c_n 1_{K_n} \leq \sum_{n\geq 1} c_n 1_{V_n\setminus K_n} + \sum_{n\geq n_0+1} c_n 1_{E_n}\end{aligned}$$

puntualmente in X ed integrando si ottiene

$$\int_X (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon)\, d\mu \leq \sum_{n\geq 1} c_n\mu(V_n\setminus K_n) + \sum_{n\geq n_0+1} c_n\mu(E_n) \leq \varepsilon.$$

Sia infine $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $f = f^+ - f^-$ e, fissato $\varepsilon > 0$, siano $\varphi_\varepsilon^\pm$ e $\psi_\varepsilon^\pm$ le funzioni semicontinue superiormente e inferiormente associate a $f^\pm$ e a $\varepsilon/2$. Allora, la funzione $\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^+ - \psi_\varepsilon^-$ è semicontinua superiormente e limitata superiormente e la funzione $\psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon^+ - \varphi_\varepsilon^-$ è semicontinua inferiormente e limitata inferiormente e per tali funzioni vale (c). □

Concludiamo questa parte provando un teorema di convergenza monotòna per insiemi filtranti di funzioni semicontinue inferiormente.

Teorema 3.16. *Siano X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva di Radon in X e siano*

- *$\mathcal{F}$ un insieme di funzioni semicontinue inferiormente $f\colon X \to [0,+\infty]$ filtrante rispetto all'oridinamento $\geq$;*
- *$F\colon X \to [0,+\infty]$ la funzione definita da*

$$F(x) = \sup\{f(x) :\ f \in \mathcal{F}\}, \qquad x \in X.$$

Allora, F è semicontinua inferiormente e si ha

$$\int_X F\, d\mu = \sup\left\{\int_X f\, d\mu : f \in \mathcal{F}\right\}.$$

L'ipotesi che $\mathcal{F}$ sia filtrante rispetto all'ordinamento significa che per ogni coppia di funzioni $f_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2)$ esiste $f \in \mathcal{F}$ tale che $f_i(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in X$ e $i = 1, 2$.

Dimostrazione. La funzione F è semicontinua inferiormente (Corollario I–2.152) e si ha evidentemente

$$\int_X F\, d\mu \geq \sup\left\{\int_X f\, d\mu :\ f \in \mathcal{F}\right\}.$$

Per provare la disuguaglianza opposta, per ogni $n \geq 1$ consideriamo gli insiemi Borel misurabili

$$E_{n,k} = \begin{cases}\{k/2^n < F \leq (k+1)/2^n\} & \text{se } k = 0, \dots, n2^n - 1 \\ \{F > n/2^n\} & \text{se } k = n2^n\end{cases}$$

e le funzioni semplici e Borel misurabili $s_n\colon X \to [0,+\infty)$ $(n \geq 1)$ definite da

$$s_n = \sum_{0\leq k\leq n2^n} \frac{k}{2^n} 1_{E_{n,k}}, \qquad n \geq 1.$$

In questo modo per ogni n risulta $s_n(x) = F(x) = 0$ se $F(x) = 0$ e $s_n(x) < F(x)$ per ogni x tale che $F(x) > 0$ e, procedendo come in Teorema 2.9, si verifica che risulta $0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ per ogni x e per ogni n e $s_n \to F$ puntalmente in X per $n \to +\infty$ da cui segue

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X s_n\, d\mu = \int_X F\, d\mu$$

per il teorema di convergenza monotòna. Fissato $a \in \mathbb{R}$ tale che
$$\int_X F\,d\mu > a,$$
scegliamo $n \geq 1$ tale che sia
$$\int_X s_n\,d\mu > a.$$
Per $n \geq 1$, riscriviamo la funzione s_n scambiando l'ordine di sommazione nella maniera seguente
$$\begin{aligned} s_n(x) = \sum_{1\leq k\leq n2^n} \frac{k}{2^n} 1_{E_{n,k}} &= \frac{1}{2^n} \sum_{1\leq k\leq n2^n} \sum_{1\leq h\leq k} 1_{E_{n,k}} = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{1\leq h\leq n2^n} \sum_{h\leq k\leq n2^n} 1_{E_{n,k}} = \frac{1}{2^n} \sum_{1\leq h\leq n2^n} 1_{V_{n,h}} \end{aligned}$$
ove $V_{n,h}$ sono gli insieme aperti (non disgiunti) definiti da
$$V_{n,h} = E_{n,h} \cup \cdots \cup E_{n,n2^n} = \left\{F > h/2^n\right\}, \qquad h = 0,\dots,n2^n.$$
Si ha allora
$$a < \int_X s_n\,d\mu = \frac{1}{2^n} \sum_{1\leq h\leq n2^n} \mu(V_{n,h})$$
e per regolarità interna esistono insiemi compatti $K_{n,h} \subset V_{n,h}$ tali che
$$\frac{1}{2^n} \sum_{1\leq h\leq n2^n} \mu(K_{n,h}) > a.$$
Consideriamo ora la funzione semplice
$$t_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{1\leq h\leq n2^n} 1_{K_{n,h}}(x), \qquad x \in X,$$
che è semicontinua superiormente poiché tali sono le funzioni caratteristiche di insiemi compatti e tale che $t_n(x) \leq s_n(x)$ per ogni x e per ogni n. Poniamo
$$K_n = K_{n,1} \cup \cdots \cup K_{n,n2^n}$$
e osserviamo che, per ogni $x \in K_n$, si ha $F(x) > 0$ da cui segue $F(x) > s_n(x) \geq t_n(x)$. Esiste allora una funzione $f_x \in \mathcal{F}$ tale che $t_n(x) < f_x(x) \leq f(x)$ cosicché, essendo $f_x - t_n$ semicontinua inferiormente, l'insieme $W_x = \{f_x > t_n\}$ risulta essere un intorno aperto di x. Gli insiemi $\{W_x : x \in K_n\}$ formano quindi un ricoprimento aperto di K_n e dunque esistono punti $x_1,\dots,x_j \in K_n$ tali che, posto per brevità $W_i = W_{x_i}$ $(i = 1,\dots,j)$, risulti $K_n \subset W_1 \cup \ldots \cup W_j$. Denotate allora con $f_i = f_{x_i}$ $(i = 1,\dots,j)$ le corrispondenti funzioni, sia $f \in \mathcal{F}$ tale che $f \geq f_i$ in X per ogni i. Risulta allora $f \geq f_i \geq t_n$ in ogni insieme W_i da cui segue $f \geq t_n$ in X. Si ha pertanto
$$a < \frac{1}{2^n} \sum_{1\leq h\leq n2^n} 1_{K_{n,h}}(x) = \int_X t_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu$$
e questo conclude la dimostrazione. □

Corollario 3.17. *Siano X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva di Radon in X e sia $F\colon X \to [0,+\infty]$ una funzione semicontinua inferiormente. Allora,*
$$\int_X F\,d\mu = \sup\left\{\int_X f\,d\mu : f \text{ semicontinua inferiormente e } 0 \leq f \leq F\right\}.$$

Dimostrazione. Segue da Teorema I–2.187 e dal teorema precedente. □

Esercizi

3.1. Sia $X = \mathbb{R}^2$ con la topologia di Esercizio I–2.35. Provate che per ogni funzione $\varphi \in C_c(X)$ e per ogni punto $x \in \mathbb{R}$

- l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : \exists\, y \in \mathbb{R}$ tale che $\varphi(x, y) \neq 0\}$ è finito;
- l'insieme $\{y \in \mathbb{R} : \varphi(x, y) \neq 0\}$ è limitato;

cosicché

$$L\varphi = \sum_{x\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\, dy, \qquad \varphi \in C_c(X),$$

(l'integrale a destra è l'usuale integrale di Riemann) è un funzionale lineare positivo su $C_c(X)$. Provate che, denotato con $\Gamma = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ l'asse delle x, per la misura positiva di Radon μ in X che rappresenta L valgono le seguenti proprietà:

(a) $\mu(\Gamma) = +\infty$;

(b) $K \subset \Gamma$ e K compatto $\implies$ $\mu(K) = 0$.

3.2. Provate che l'insieme H di Teorema 3.5 − (b) si può prendere σ − compatto ovvero della forma $H = \bigcup_n K_n$ con $\{K_n\}_n$ insiemi compatti.

3.3. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e siano $\mu, \nu \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ misure positive di Borel in X tali che

- μ è una misura positiva di Radon in X σ − finita;
- $\nu \leq \mu$.

Provate che ν è una misura positiva di Radon in X.

3.4. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e siano $\lambda \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva di Radon in X e $Y \in \mathcal{S}$ un insieme σ − finito rispetto a λ. Provate che

$$\mu(E) = \lambda(E \cap Y), \qquad E \in \mathcal{S},$$

è una misura positiva di Radon in X σ − finita.

3.5. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e siano $\lambda \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva di Radon σ − finita in X e $Y \subset X$ un insieme chiuso. Provate che per la misura positiva di Radon μ in X che rappresenta il funzionale lineare positivo $L \colon C_c(X) \to \mathbb{C}$ definito da

$$L\varphi = \int_Y \varphi\, d\lambda, \qquad \varphi \in C_c(X),$$

risulta

$$\mu(B) = \lambda(B \cap Y), \qquad B \in \mathcal{B}(X).$$

3.6. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e siano $\mu \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva di Radon in X e $f \colon X \to [0, +\infty]$ una funzione $\mathcal{S}$ − misurabile. Provate che se vale una delle seguenti affermazioni

(a) $\displaystyle\int_X f\, d\mu < +\infty$;

(b) X è σ − compatto e $\displaystyle\int_X f\, d\mu < +\infty$ per ogni $K \subset X$ compatto;

la misura $\nu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ definita da

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu, \qquad E \in \mathcal{S}.$$

è una misura positiva di Radon in X.

3.7. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e, data $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva di Radon in X, siano

$$T = \bigcup \bigl\{V : V \text{ aperto e } \mu(V) = 0\bigr\} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{supp}\,(\mu) = T^{\mathrm{c}}.$$

Provate che

(a) T è aperto e $\mu(T) = 0$;

(b) $x \in \mathrm{supp}\,(\mu) \quad \Longleftrightarrow \quad \displaystyle\int_X \varphi\,d\mu > 0 \quad \forall\,\varphi \in C_{\mathrm{c}}(X) : \{x\} \prec \varphi.$

L'insieme chiuso $\mathrm{supp}\,(\mu)$ è il *supporto di* μ.

3.8. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e $\sigma-$compatto e siano $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva di Radon in X e $f : X \to \mathbb{K}$ una funzione $\mathcal{S}-$misurabile. Provate che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $F_\varepsilon \subset X$ chiuso tale che

(a) $\mu(X \setminus F_\varepsilon) \le \varepsilon$;

(b) la restrizione $f_{|F_\varepsilon}$ di f a F_ε è continua.

CAPITOLO 4

Misure reali o complesse

Introduciamo in questo capitolo la nozione di misura reale o complessa su una $\sigma-$algebra di insiemi come naturale estensione della definizione di misura positiva e di tali misure esaminiamo le principali proprietà. Si possono in particolare generare misure reali o complesse come integrali indefiniti di funzioni a valori reali o complessi rispetto ad una assegnata misura positiva in analogia con quanto accade per l'integrale indefinito di una funzione misurabile e non negativa (Teorema 2.32) ed in questo capitolo caratterizziamo le misure che sono ottenute in tale modo a partire da una assegnata misura positiva (teorema di Radon–Nikodym). Questa caratterizzazione costituisce uno dei principali risultati della teoria della misura con fondamentali applicazioni che esamineremo nei capitoli successivi. Esaminiamo inoltre la convergenza puntuale di successioni di misure reali o complesse in termini di convergenza puntuale di funzioni continue (teorema di Vitali–Hahn–Saks). Introduciamo infine la nozione di integrale rispetto ad una misura reale o complessa sulla linea di quanto illustrato nel capitolo precedente ed estendiamo tale nozione alle misure reali o complesse finitamente additive e limitate su un'algebra di insiemi.
In tutto questo capitolo denotiamo con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ il campo dei numeri reali o complessi.

4.1. Misure reali o complesse

Definiamo in questa sezione la nozione di misura reale o complessa e ne esaminiamo le principali proprietà sulla linea di quanto fatto in Capitolo 1 per le misure positive. Consideriamo a tale scopo una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi di un insieme astratto (non vuoto) X e una misura positiva $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ su $\mathcal{S}$ che supporremo fissate in tutta la sezione.

Misure reali o complesse. Sia $f\colon X \to \mathbb{K}$ una funzione $\lambda-$integrabile su X. Un'applicazione elementare del teorema di convergenza dominata di Lebesgue (Teorema 2.44) mostra che si ha

$$\int_E f\, d\lambda = \sum_n \int_{E_n} f\, d\lambda$$

per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ e per ogni famiglia numerabile $\{E_n\}_n$ di insiemi $\mathcal{S}-$misurabili a due a due disgiunti tali che $E = \bigcup_n E_n$. In altri termini, la funzione d'insieme $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ definita da

$$\mu(E) = \int_E f\, d\lambda, \qquad E \in \mathcal{S},$$

risulta essere numerabilmente additiva sulla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$. Con la terminologia e le notazioni di Capitolo 2, essa prende ancora il nome di *integrale indefinito di f rispetto a λ* e si denota con

$$\mu = \int f\, d\lambda.$$

Questa osservazione motiva la seguente definizione di misura reale o complessa.

DEFINIZIONE 4.1. Una funzione $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ con le seguenti proprietà:

- $\mu(\varnothing) = 0$;
- per ogni famiglia numerabile di insiemi disgiunti $\{E_n\}_n \subset \mathcal{S}$ si ha

$$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n); \tag{$*$}$$

si dice *misura reale o complessa su* $\mathcal{S}$ a seconda che sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. $\square$

Nel caso complesso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ogni misura complessa μ su $\mathcal{S}$ si esprime evidentemente nella forma $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ con μ_1 e μ_2 misure reali su $\mathcal{S}$.
La terminologia adottata qui richiede qualche precisazione in relazione a quella adottata nei capitoli precedenti. Una misura reale o complessa assume per definizione solo valori in $\mathbb{K}$ mentre il nostro uso del termine misura positiva include $+\infty$ come valore ammissibile. Pertanto, non tutte le misure positive sono misure reali ma sono tali solo le misure positive finite o equivalentemente limitate. Nel seguito, con il termine misura privo di ulteriori determinazioni, ci riferiremo indifferentemente a misure reali o complesse o a misure positive.
Relativamente alla definizione di misura reale o complessa, osserviamo che l'ipotesi di convergenza della serie a termini reali o complessi in $(*)$ per ogni famiglia numerabile di insiemi $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ a due a due disgiunti è parte della definizione stessa, a differenza di quanto accade per le misure positive per le quali la corrispondente serie a termini non negativi può convergere o divergere. Poiché l'unione degli insiemi $\{E_n\}_n$ non muta riarrangiando gli indici, la serie $(*)$ deve essere incondizionatamente convergente e dunque assolutamente convergente (Teorema 2.49 in [4] o Teorema 3.54 in [14]) per ogni famiglia numerabile di insiemi $\{E_n\}_n \subset \mathcal{S}$ a due a due disgiunti.
Osserviamo inoltre che nella Definizione 4.1 la validità di $\mu(\varnothing) = 0$ è in effetti conseguenza della convergenza della serie in $(*)$.
Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ una misura reale o complessa. Un insieme $T \in \mathcal{S}$ si dice

- μ *– trascurabile* se risulta $\mu(E) = 0$ per ogni $E \in \mathcal{S}$ con $E \subset T$;

e, in accordo con le notazioni già introdotte, la collezione di tutti i sottoinsiemi $\mu-$trascurabili di X si denota ancora con

$$\mathcal{N}(\mu) = \left\{T \in \mathcal{S} :\ T\ \mu-\text{trascurabile}\right\}.$$

Inoltre, la misura reale o complessa $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ si dice *completa* se ogni insieme contenuto in un insieme $\mu-$trascurabile appartiene alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ e ogni misura reale o complessa può essere completata come in Proposizione 1.28.
Ogni misura reale o complessa $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ condivide con le misure positive finite le seguenti proprietà: per ogni coppia di insiemi $E, F \in \mathcal{S}$ risulta

- $E \cap F = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$;
- $E \subset F \quad \Longrightarrow \quad \mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$;

e per ogni famiglia numerabile di insiemi $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ risulta

- $E_n \subset E_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_n E_n\right)$;
- $E_{n+1} \subset E_n \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_n E_n\right)$.

Inoltre, ogni misura reale o complessa su una $\sigma-$algebra risulta essere una funzione limitata.

TEOREMA 4.2. *Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ una misura reale o complessa. Allora,*

$$\sup\big\{|\mu(E)|:\ E \in \mathcal{S}\big\} < +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo preliminarmente che, se fosse

$$(**) \qquad \sup\big\{|\mu(F)|:\ F \in \mathcal{S} \text{ e } F \subset E\big\} = +\infty$$

per qualche insieme $E \in \mathcal{S}$, esisterebbero allora due insiemi $E_i \in \mathcal{S}$ $(i = 1,2)$ con $E_1 \cup E_2 = E$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ per i quali si avrebbe

$$|\mu(E_1)| \geq 1 \qquad \text{e} \qquad \sup\big\{|\mu(F)|:\ F \in \mathcal{S} \text{ e } F \subset E_2\big\} = +\infty.$$

Infatti, se si avesse $(**)$, esisterebbe un insieme $F \in \mathcal{S}$ con $F \subset E$ per il quale si avrebbe $|\mu(F)| \geq 1$. Se fosse

$$\sup\big\{|\mu(G)|:\ G \in \mathcal{S} \text{ e } G \subset E \setminus F\big\} = +\infty,$$

la conclusione varrebbe con $E_1 = F$ ed $E_2 = E \setminus F$. Se fosse invece

$$\sup\big\{|\mu(G)|:\ G \in \mathcal{S} \text{ e } G \subset E \setminus F\big\} < +\infty,$$

dovrebbe allora essere

$$\sup\big\{|\mu(G)|:\ G \in \mathcal{S} \text{ e } G \subset F\big\} = +\infty,$$

e potremmo quindi trovare un insieme $G \in \mathcal{S}$ con $G \subset F$ tale che

$$|\mu(G)| \geq |\mu(F)| + 1.$$

Si avrebbe allora $|\mu(G)| \geq 1$ e

$$|\mu(F \setminus G)| = |\mu(F) - \mu(G)| \geq |\mu(G)| - |\mu(F)| \geq 1$$

e necessariamente si presenterebbe uno dei due casi seguenti:

$$\sup\big\{|\mu(H)| : H \in \mathcal{S} \text{ e } H \subset G\big\} = +\infty; \quad \sup\big\{|\mu(H)| : H \in \mathcal{S} \text{ e } H \subset F \setminus G\big\} = +\infty.$$

In entrambi i casi si arriverebbe alla conclusione cercata scegliendo $E_1 = F \setminus G$ ed $E_2 = E \setminus (F \setminus G)$ nel primo caso oppure $E_1 = G$ ed $E_2 = E \setminus G$ nell'altro caso.
Supponiamo quindi per assurdo che risulti

$$\sup\big\{|\mu(E)|:\ E \in \mathcal{S}\big\} = +\infty.$$

Iterando l'argomento precedente si determinerebbe una successione di insiemi disgiunti $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ con $|\mu(E_n)| \geq 1$ per ogni n e ciò è assurdo. $\square$

Semivariazione e variazione totale. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ una misura reale o complessa. La funzione d'insiemi $|\mu|_{\mathrm{sv}}\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty)$ definita da

$$|\mu|_{\mathrm{sv}}(E) = \sup\big\{|\mu(F)|\ :\ F \in \mathcal{S} \text{ con } F \subset E\big\}, \quad E \in \mathcal{S},$$

si dice *semivariazione di μ*.
La semivariazione di μ è quindi la minima funzione d'insiemi che controlla μ nel senso che per ogni insieme $F \in \mathcal{S}$ si abbia

$$|\mu(E)| \leq |\mu|_{\mathrm{sv}}(F), \qquad E \in \mathcal{S} \text{ e } E \subset F.$$

Un insieme $E \in \mathcal{S}$ risulta essere $\mu-$trascurabile se e solo se è $|\mu|_{\mathrm{sv}}(E) = 0$ e la semivariazione risulta evidentemente essere anche monotòna e numerabilmente subadditiva

- $E, F \in \mathcal{S}$ con $E \subset F \quad \Longrightarrow \quad |\mu|_{\mathrm{sv}}(E) \leq |\mu|_{\mathrm{sv}}(F)$;
- $E_n \in \mathcal{S}$, $n \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad |\mu|_{\mathrm{sv}}\left(\bigcup_n E_n\right) \leq \sum_n |\mu|_{\mathrm{sv}}(E_n)$;

ma tuttavia non risulta essere una misura positiva come mostra l'esempio seguente.

Esempio 4.3. La funzione d'insiemi

$$\mu(E) = \sum_{n \in E} (-1)^n / 2^n, \qquad E \subset \mathbb{N}_+,$$

è una misura reale sulla $\sigma-$algebra delle parti di $X = \mathbb{N}_+$. Per ogni insieme $E \subset \mathbb{N}$, poniamo $E_p = \{n \in E : \ n \text{ pari}\}$ e $E_d = \{n \in E : \ n \text{ dispari}\}$. Si ha allora

$$|\mu|_{\text{sv}}(E) = \max\left\{\mu(E_p)\,, -\mu(E_d)\right\} < \mu(E_p) - \mu(E_d) = |\mu|_{\text{sv}}(E_p) + |\mu|_{\text{sv}}(E_d)$$

ogniqualvolta entrambi gli insiemi E_p ed E_d sono non vuoti. □

Alla luce di queste considerazioni, ci proponiamo di determinare – qualora esista – la più piccola misura positiva $\nu\colon \mathcal{S} \to [0\,,+\infty]$ che controlli la misura reale o complessa $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ nello stesso senso della semivariazione cioè che sia tale che risulti

$$|\mu(F)| \le \nu(E), \qquad F \subset E, \quad E\,, F \in \mathcal{S},$$

proprietà che è evidentemente equivalente a

$$(***) \qquad |\mu(E)| \le \nu(E), \qquad E \in \mathcal{S},$$

essendo ν una misura positiva su $\mathcal{S}$ per ipotesi. Ogni misura ν siffatta deve verificare anche

$$\nu(E) = \sum_n \nu(E_n) \ge \sum_n |\mu(E_n)|$$

per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ e per ogni partizione $\mathcal{S}-$misurabile e al più numerabile $\{E_n\}_n$ di E. Ciò suggerisce di considerare la funzione d'insieme $|\mu|_{\text{tv}}\colon \mathcal{S} \to [0\,,+\infty]$ definita da

$$|\mu|_{\text{tv}}(E) = \sup\left\{\sum_n |\mu(E_n)| : \ \{E_n\}_n \subset \mathcal{S} \text{ partizione al più numerabile di } E\right\}$$

per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$. La funzione d'insieme così definita si dice *variazione totale di* μ e nella sua definizione ci si può restringere a partizioni $\mathcal{S}-$misurabili finite.

Lemma 4.4. *Sia* $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ *una misura reale o complessa. Allora,*

$$|\mu|_{\text{tv}}(E) = \sup\left\{\sum_{1 \le m \le n} |\mu(E_m)| : \ \{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathcal{S} \textit{ partizione finita di } E\right\}$$

per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$*.*

Dimostrazione. Sia $\nu\colon \mathcal{S} \to [0\,,+\infty]$ la funzione d'insiemi definita dal secondo membro della tesi. Chiaramente risulta $\nu(E) \le |\mu|_{\text{tv}}(E)$ per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$. Viceversa, supposto $|\mu|_{\text{tv}}(E) > 0$, per ogni $0 < t < |\mu|_{\text{tv}}(E)$ fissato esiste una partizione $\mathcal{S}-$misurabile di E formata da insiemi $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \ge 1)$ tale che

$$\sum_n |\mu(E_n)| > t.$$

Risulta allora $|\mu(E_1)| + \cdots + |\mu(E_n)| > t$ per $n = n(t) \ge 1$ opportuno da cui segue $|\mu|_{\text{tv}}(E) \le \nu(E)$ per l'arbitrarietà di t. □

È chiaro che, se $\nu\colon \mathcal{S} \to [0\,,+\infty]$ è una misura positiva che controlla μ nel senso di $(***)$, deve essere

$$|\mu|(E)_{\text{tv}} \le \nu(E), \qquad E \in \mathcal{S},$$

e, poiché la variazione totale $|\mu|_{\text{tv}}$ di μ risulta essere effettivamente una misura positiva finita su $\mathcal{S}$, essa fornisce dunque la soluzione del problema di minimo considerato

Teorema 4.5. *Sia* $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ *una misura reale o complessa. Allora,*

(a) *si ha*

$$|\mu|_{\text{sv}}(E) \le |\mu|_{\text{tv}}(E) \le 4|\mu|_{\text{sv}}(E), \qquad E \in \mathcal{S};$$

(b) $|\mu|_{\text{tv}}$ *è una misura positiva finita su* $\mathcal{S}$ *e risulta* $\mathcal{N}(\mu) = \mathcal{N}(|\mu|)$.

Se μ è una misura reale, la disuguaglianza in (a) vale con 2 al posto di 4.

Dimostrazione. (a) Per fissare le idee, consideriamo il caso complesso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e sia $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ con μ_j $(j = 1, 2)$ misure reali. Per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ e per ogni sua partizione $\mathcal{S}-$misurabile $\{E_n\}_n$, per la parte reale μ_1 e per la parte immaginaria μ_2 di μ si ha

$$\begin{aligned}\sum_n |\mu_j(E_n)| &= \sum_n{}^{+} \mu_j(E_n) - \sum_n{}^{-} \mu_j(E_n) = \\ &= \mu_j\left(\bigcup_n{}^{+} E_n\right) - \mu_j\left(\bigcup_n{}^{-} E_n\right) \le 2|\mu_j|_{\text{sv}}(E) \le 2|\mu|_{\text{sv}}(E)\end{aligned}$$

ove le somme e le unioni con indice $+$ e $-$ si intendono estese agli indici n per i quali risulta $\mu_j(E_n) \ge 0$ e $\mu_(E_n) < 0$ rispettivamente. Risulta pertanto

$$\sum_n |\mu(E_n)| \le \sum_n |\mu_1(E_n)| + \sum_n |\mu_2(E_n)| \le 4|\mu|_{\text{sv}}(E)$$

da cui segue

$$|\mu|_{\text{tv}}(E) \le 4|\mu|_{\text{sv}}(E) < +\infty$$

per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$.

(b) Siano $E \in \mathcal{S}$ ed $\{E_n\}_n$ una sua partizione $\mathcal{S}-$misurabile. Per ogni partizione $\mathcal{S}-$misurabile $\{F_h\}_h$ di E, si ha allora

$$\sum_h |\mu(F_h)| \le \sum_h \sum_n |\mu(F_h \cap E_n)| = \sum_n \sum_h |\mu(F_h \cap E_n)| \le \sum_n |\mu|_{\text{tv}}(E_n)$$

(Esercizio I–2.29 o teorema di Fubini–Tonelli (Teorema 2.55)) e da ciò segue

$$|\mu|_{\text{tv}}(E) \le \sum_n |\mu|_{\text{tv}}(E_n).$$

Viceversa, per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni n, sia $\{F_h^n\}_h$ una partizione $\mathcal{S}-$misurabile di E_n tale che

$$\sum_h |\mu(F_h^n)| \ge |\mu|_{\text{tv}}(E_n) - \varepsilon/2^n.$$

Allora, $\{F_h^n\}_{h,n}$ è una partizione $\mathcal{S}-$misurabile di E cosicché si ha

$$|\mu|_{\text{tv}}(E) \ge \sum_{h,n} |\mu(F_h^n)| \ge \sum_n \sum_h |\mu(F_h^n)| \ge \sum_n |\mu|_{\text{tv}}(E_n) - \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si deduce che $|\mu|_{\text{tv}}$ è numerabilmente additiva su $\mathcal{S}$ e quindi è una misura positiva finita su $\mathcal{S}$. La restante affermazione è ovvia. □

L'insieme

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \big\{\mu \colon \mathcal{S} \to \mathbb{K} \text{ misura reale o complessa su } \mathcal{S}\big\}$$

delle misure reali o complesse sulla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ è chiaramente uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ con le operazioni definite puntualmente e le funzioni

$$\begin{aligned} d_{\text{sv}}(\mu_1, \mu_2) &= |\mu_1 - \mu_2|_{\text{sv}}(X) \\ d_{\text{tv}}(\mu_1, \mu_2) &= |\mu_1 - \mu_2|_{\text{tv}}(X) \end{aligned} \qquad \mu_j \in \mathcal{M}(\mathcal{S}) \quad (j = 1, 2),$$

sono metriche equivalenti su $\mathcal{M}(\mathcal{S})$. Esse sono dette rispettivamente *metrica della semivariazione* e *metrica della variazione totale* e rispetto ad esse $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ risulta essere completo[1].

TEOREMA 4.6. *Sia d la metrica della semivariazione o della variazione totale. Allora, lo spazio metrico $(\mathcal{M}(\mathcal{S}), d)$ è completo.*

DIMOSTRAZIONE. Per fissare le idee, sia d la metrica della semivariazione.
Siano $\mu_n \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ $(n \geq 1)$ gli elementi di una successione di Cauchy: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che risulti

$$(****) \qquad n, m \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu_n - \mu_m|_{\mathrm{sv}}(X) \leq \varepsilon.$$

Per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ fissato si ha allora

$$n, m \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu_n(E) - \mu_m(E)| \leq \varepsilon$$

e quindi anche la successione $\{\mu_n(E)\}_n$ verifica la condizione di Cauchy in $\mathbb{C}$ e dunque converge. Poniamo quindi

$$\mu(E) = \lim_{n \to +\infty} \mu_n(E), \qquad E \in \mathcal{S},$$

e proviamo che la funzione $\mu \colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ così definita è una misura complessa su $\mathcal{S}$ e quindi appartiene a $\mathcal{M}(\mathcal{S})$. Chiaramente, la funzione μ così definita è finitamente additiva su $\mathcal{S}$. Per provare che è anche numerabilmente additiva su $\mathcal{S}$, consideriamo una famiglia numerabile $E_k \in \mathcal{S}$ $(k \geq 1)$ di insiemi disgiunti e poniamo $E = \bigcup_k E_k$. Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che risulti

$$\sup \bigl\{ |\mu_{n_0}(F) - \mu(F)| \; : \; F \in \mathcal{S} \bigr\} \leq \varepsilon/2$$

e scegliamo quindi $k_0 = k_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che si abbia

$$\left| \mu_{n_0} \left(\bigcup_{h \geq k+1} E_h \right) \right| \leq \sum_{h \geq k+1} |\mu_{n_0}(E_h)| \leq \varepsilon/2$$

per ogni $k \geq k_0$. Per ogni k siffatto si ha allora

$$\begin{aligned} \left| \mu(E) - \sum_{h \leq k} \mu(E_h) \right| &= \left| \mu \left(\bigcup_{h \geq k+1} E_h \right) \right| \leq \\ &\leq \left| \mu_{n_0} \left(\bigcup_{h \geq k+1} E_h \right) \right| + \left| \mu \left(\bigcup_{h \geq k+1} E_h \right) - \mu_{n_0} \left(\bigcup_{h \geq k+1} E_h \right) \right| \leq \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

e questo prova che $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$.
Resta infine da provare che $\mu_n \to \mu$ per $n \to +\infty$ nella metrica della semivariazione. A tale scopo, fissato $\varepsilon > 0$, sia $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ ad esso associato da $(****)$ cosicché risulta

$$|\mu_n(E) - \mu_m(E)| \leq \varepsilon, \qquad E \in \mathcal{S},$$

per ogni $n, m \geq n_0$. Passando quindi al limite per $m \to +\infty$ risulta

$$|\mu_n(E) - \mu(E)| \leq \varepsilon, \qquad E \in \mathcal{S},$$

per ogni $n \geq n_0$ da cui segue $|\mu_n - \mu|_{\mathrm{sv}}(X) \leq \varepsilon$ per $n \geq n_0$. Quindi, $\mu_n \to \mu$ in $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ per $n \to +\infty$ e questo completa la dimostrazione. $\square$

[1] Nel linguaggio del successivo Capitolo III–1, la semivariazione e la variazione totale sono norme equivalenti su $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ che risulta essere uno spazio di Banach complesso.

Concludiamo questa parte introducendo due ulteriori definizioni che si applicano indistintamente a misure positive e a misure reali o complesse. Siano quindi μ,ν due misure positive ovvero reali o complesse (non necessariamente dello stesso tipo) definite sulla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$. La misura μ si dice

- *concentrata su* $Y \in \mathcal{S}$ se risulta $\mu(E) = \mu(E \cap Y)$ per ogni $E \in \mathcal{S}$;

nel qual caso, ricordando le notazioni della Sezione 2.2, si ha $\mu = \mu \llcorner Y$ e le misure μ e ν si dicono

- *mutuamente singolari* se esistono due insiemi $E, F \in \mathcal{S}$ con $E \cap F = \varnothing$, $E \cup F = X$ tali che μ sia concentrata su E e ν sia concentrata su F;

nel qual caso scriveremo

$$\mu \perp \nu.$$

Ovviamente, μ è concentrata su $E \in \mathcal{S}$ se e solo se E^{c} è $\mu-$trascurabile e le misure μ e ν sono mutuamente singolari se e solo se esiste una partizione $\mathcal{S}-$misurabile $\{E, F\}$ di X tale che E sia $\nu-$trascurabile e F sia $\mu-$trascurabile.
Elenchiamo nella proposizione seguente alcune proprietà di facile verifica collegate alla terminologia appena introdotta.

PROPOSIZIONE 4.7. *Sia ν una misura positiva o una misura reale o complessa sulla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ e siano $\mu, \mu_j \colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ $(j = 1, 2)$ misure reali o complesse su $\mathcal{S}$. Allora,*

(a) *μ concentrata su $Y \in \mathcal{S}$ $\iff$ $|\mu|_{\mathrm{tv}}$ concentrata su $Y \in \mathcal{S}$;*
(b) *$\mu_1 \perp \mu_2$ $\iff$ $|\mu_1|_{\mathrm{tv}} \perp |\mu_2|_{\mathrm{tv}}$;*
(c) *$\mu_1 \perp \mu_2$ $\implies$ $|\mu_1 + \mu_2|_{\mathrm{tv}} = |\mu_1|_{\mathrm{tv}} + |\mu_2|_{\mathrm{tv}}$;*
(d) *$\mu_1 \perp \nu$ e $\mu_2 \perp \nu$ $\iff$ $(\mu_1 + \mu_2) \perp \nu$.*

La proprietà (d) vale ovviamente anche quando μ_1 e μ_2 sono misure positive non necessariamente finite.

Misure reali e decomposizioni di Jordan e di Hahn. Consideriamo in questa parte misure reali e ne analizziamo la struttura in termini di misure positive e finite con l'obiettivo di rappresentare ogni misura reale $\mu \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ come differenza

$$\mu = \mu_1 - \mu_2$$

di due misure positive e finite $\mu_j \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty)$ $(j = 1, 2)$ soggette alla seguente condizione di ottimalità: se $\nu_j \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty)$ $(j = 1, 2)$ sono misure positive e finite su $\mathcal{S}$ tali che $\mu = \nu_1 - \nu_2$, allora risulta $\mu_j \leq \nu_j$ per ogni j.

DEFINIZIONE 4.8. Sia $\mu \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ una misura reale. Le misure positive e finite $\mu^{\pm} \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty)$ definite da

$$\mu^+ = \frac{1}{2}\left(|\mu|_{\mathrm{tv}} + \mu\right), \qquad \mu^- = \frac{1}{2}\left(|\mu|_{\mathrm{tv}} - \mu\right),$$

si dicono *variazione positiva* e *variazione negativa di μ* rispettivamente e la coppia (μ^+, μ^-) si dice *decomposizione di Jordan di μ*. □

La decomposizione di Jordan di una misura reale $\mu \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ è quindi costituita da misure positive e finite (μ^+, μ^-) su $\mathcal{S}$ tali che

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \qquad \text{e} \qquad |\mu|_{\mathrm{tv}} = \mu^+ + \mu^-$$

e lo spazio vettoriale reale delle misure reali su $\mathcal{S}$ risulta dunque generato dal cono

$$\mathcal{M}_b^+(\mathcal{S}) = \left\{\mu \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty) \text{ misura positiva e finita su } \mathcal{S}\right\}$$

delle misure positive e finite su $\mathcal{S}$.
Introduciamo ora le nozioni di insieme positivo e di insieme negativo rispetto ad una misura reale. Data una misura reale $\mu \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, un insieme $E \in \mathcal{S}$ si dice

- μ *–positivo* se $\mu(F) \geq 0$ per ogni $F \in \mathcal{S}$ con $F \subset E$;
- μ *–negativo* se $\mu(F) \leq 0$ per ogni $F \in \mathcal{S}$ con $F \subset E$;

PROPOSIZIONE 4.9. *Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ una misura reale e siano $E^{\pm} \in \mathcal{S}$ due insiemi. Allora,*

$$E^+ \ \mu\text{–}\textit{positivo} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |\mu|_{\text{tv}}(F) = \mu^+(F) = \mu(F) & F \subset E^+,\ F \in \mathcal{S} \\ E^+ \in \mathcal{N}(\mu^-) \end{cases}$$

$$E^- \ \mu\text{–}\textit{negativo} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |\mu|_{\text{tv}}(F) = \mu^-(F) = -\mu(F) & F \subset E^-,\ F \in \mathcal{S} \\ E^- \in \mathcal{N}(\mu^+). \end{cases}$$

La dimostrazione di queste affermazioni è ovvia. Non è invece a prima vista ovvio che, data una misura reale $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ che cambia di segno, esistano insiemi $\mu-$positivi e insiemi $\mu-$negativi non banali. Ciò è conseguenza del risultato seguente.

LEMMA 4.10. *Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ una misura reale e sia $E \in \mathcal{S}$ un insieme tale che $\mu(E) > 0$. Allora, esiste $E^+ \in \mathcal{S}$ tale che*

(a) *E^+ è μ –positivo;*
(b) *$E^+ \subset E$ e $\mu(E^+) > 0$.*

Analogo risultato vale ovviamente per gli insiemi $\mu-$negativi quando $\mu(E) < 0$.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che sia $\mu(F) < 0$ per qualche insieme $F \in \mathcal{S}$ contenuto in E altrimenti la conclusione è ovvia.
Supponiamo per assurdo che E non contenga altri insiemi $\mu-$positivi oltre agli insiemi $\mu-$trascurabili cioè si abbia

$$F \in \mathcal{S} \text{ con } F \subset E \text{ e } F \ \mu\text{–positivo} \qquad \Longrightarrow \qquad F \in \mathcal{N}(\mu).$$

Per ogni insieme $F \in \mathcal{S}$ con $F \subset E$ e $\mu(F) > 0$ si ha allora

- $m = \inf\{\mu(G) : \ G \in \mathcal{S} \text{ e } G \subset F\} < 0$;
- esistono $A, B \in \mathcal{S}$ tali che
  - $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = F$;
  - $\mu(A) \leq m/2$ e $\mu(B) > 0$.

Da questa proprietà dei sottoinsiemi di misura μ positiva di E si deduce in maniera ricorsiva l'esistenza di una famiglia di insiemi $F_k \in \mathcal{S}$ $(k \geq 0)$ con le seguenti proprietà:

- $F_0 = \varnothing$, $F_k \subset E$ per ogni k e $F_h \cap F_k = \varnothing$ per $h \neq k$;
- $m_k = \inf\{\mu(G) : \ G \in \mathcal{S} \text{ e } G \subset E \setminus (F_0 \cup \cdots \cup F_{k-1})\} < 0$ per $k \geq 1$;
- $\mu(F_k) \leq m_k/2 < 0$ per ogni $k \geq 1$.

Risulta $\mu(F_k) \to 0$ per $k \to +\infty$ e quindi deve essere $m_k \to 0$ per $k \to +\infty$. Inoltre, posto

$$F = \bigcup_k F_k,$$

per ogni insieme $G \in \mathcal{S}$, $G \subset E \setminus F$ si ha $G \subset E \setminus (F_0 \cup \cdots \cup F_{k-1})$ per ogni $k \geq 1$ e dunque risulta $\mu(G) \geq m_k$ per $k \geq 1$ per la definizione stessa di m_k. Pertanto, $\mu(G) \geq 0$ per ogni insieme $G \in \mathcal{S}$, $G \subset E \setminus F$. Quindi, $E \setminus F$ è un insieme $\mu-$positivo di E cosicché deve essere $\mu(E \setminus F) = 0$ per l'ipotesi iniziale. Questo implica

$$0 < \mu(E) = \mu(F) + \mu(E \setminus F) = \mu(F) = \sum_k \mu(F_k) \leq \sum_k m_k/2 < 0$$

e questa contraddizione prova la tesi. $\square$

Le considerazioni precedenti pongono in modo naturale il problema di stabilire se ogni misura reale $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ sia strutturalmente costituita da una partizione $\mathcal{S}-$misurabile $\{X^+, X^-\}$ di X tale che X^+ sia $\mu-$positivo e X^- sia $\mu-$negativo. Una tale coppia di insiemi (X^+, X^-), qualora esista, si dice *decomposizione di Hahn di X rispetto a μ.*
La decomposizione di Hahn di X rispetto a μ, quando esiste, può non essere unica ma è certamente univocamente determinata a meno di insiemi $\mu-$trascurabili poiché deve aversi $X_1^\pm \triangle X_2^\pm \in \mathcal{N}(\mu)$ per ogni coppia di decomposizioni di Hahn (X_i^+, X_i^-) $(i = 1, 2)$ di X rispetto a μ.
Veniamo ora alla questione principale: esiste sempre una decomposizone di Hahn di X rispetto ad una qualunque misura reale? La risposta affermativa è fornita dal teorema seguente.

Teorema 4.11. *Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ una misura reale. Allora, esiste una decomposizione di Hahn (X^+, X^-) di X rispetto a μ.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che μ assuma sia valori positivi che valori negativi altrimenti la conclusione è ovvia. In tal caso, le famiglie di insiemi $\mathcal{S}^\pm$ definite da

$$\mathcal{S}^- = \{E \in \mathcal{S} :\ E \text{ è } \mu-\text{negativo}\} \qquad \mathcal{S}^+ = \{E \in \mathcal{S} :\ E \text{ è } \mu-\text{positivo}\},$$

sono non vuote (Lemma 4.10) e sono $\sigma-$anelli di sottinsiemi di X, come si verifica facilmente. Posto

$$m = \sup \{\mu(E) :\ E \in \mathcal{S}^+\} < +\infty,$$

proviamo che esiste un insieme $X^+ \in \mathcal{S}^+$ tale che $\mu(X^+) = m$. Sia infatti $\{X_n^+\}_n$ una successione di insiemi di $\mathcal{S}^+$ tali che la successione $\{\mu(X_n^+)\}_n$ sia crescente e risulti

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(X_n^+) = m.$$

Posto $X^+ = \bigcup_n X_n^+$, si ha $X^+ \in \mathcal{S}^+$ e da $\mu(X_n^+) \le \mu(X^+) \le m$ per ogni n si conclude che deve essere $\mu(X^+) = m$.
Poniamo quindi $X^- = X \setminus X^+$ e proviamo che risulta $X^- \in \mathcal{S}^-$. Supponiamo infatti per assurdo che X^- non sia $\mu-$negativo. Esisterebbe allora un insieme $E \in \mathcal{S}$, $E \subset X^-$ con misura $\mu(E) > 0$ e dunque E conterrebbe un insieme $\mu-$positivo F con $\mu(F) > 0$ (Lemma 4.10). Ciò non può essere poiché $X^+ \cup F$ sarebbe $\mu-$positivo con

$$\mu(X^+ \cup F) = \mu(X^+) + \mu(F) = m + \mu(F) > m,$$

in contraddizione con la definizione di m. □

Elenchiamo quindi alcune conseguenze elementari dell'esistenza della decomposizione di Hahn di una misura reale. Tra di esse vi è la minimalità della decomposizione di Jordan nel senso esposto all'inizio di questa parte.

Corollario 4.12. *Siano $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ una misura reale e (X^+, X^-) una decomposizione di Hahn di X rispetto a μ e siano $\mu_j\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty)$ $(j = 1, 2)$ due misure positive finite tali che risulti $\mu = \mu_1 - \mu_2$ su $\mathcal{S}$. Allora,*

(a) $\mu^\pm(E) = \pm\mu(E \cap X^\pm)$ *per ogni* $E \in \mathcal{S}$*;*
(b) $\mu^\pm$ *è concentrata su* $X^\pm$ *e* $\mu^+ \perp \mu^-$*;*
(c) $\mu_1 \ge \mu^+$ *e* $\mu_2 \ge \mu^-$ *su* $\mathcal{S}$*.*

Dimostrazione. Si ha

$$\mu^\pm(E) = \mu^\pm(E \cap X^\pm) + \mu^\pm(E \cap X^\mp) = \mu^\pm(E \cap X^\pm) = \pm\mu(E \cap X^\pm)$$

per ogni $E \in \mathcal{S}$ (Proposizione 4.9) e questo prova (a) e (b).

Relativamente a (c), per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ risulta $\mu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E) \leq \mu_1(E)$ e da ciò segue

$$\mu^+(E) = \mu^+(E \cap X^+) = \mu(E \cap X^+) \leq \mu_1(E \cap X^+) \leq \mu_1(E).$$

In maniera analoga si procede per μ^- e μ_2. $\square$

A conclusione di questa parte, osserviamo infine che se μ è la misura reale definita come integrale indefinito rispetto alla misura positiva λ di una funzione $\lambda-$integrabile $f\colon X \to \mathbb{R}$ a valori reali

$$\mu = \int f \, d\lambda,$$

gli insiemi $X^+ = \{f \geq 0\}$ ed $X^- = \{f < 0\}$ costituiscono una decomposizione di Hahn di X rispetto μ cosicché la variazione totale e la decomposizione di Jordan di μ sono date rispettivamente da

$$|\mu|_{\mathrm{tv}} = \int |f| \, d\lambda \qquad \text{e} \qquad \mu^\pm = \int f^\pm \, d\lambda.$$

Integrazione rispetto a misure reali o complesse. Sia $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ una misura reale o complessa cosicché a seconda che $\mathbb{K}$ sia $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ μ è della forma

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \qquad \text{o} \qquad \mu = \mu_1 + i\mu_2 = (\mu_1^+ - \mu_1^-) + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$$

ove $\mu_j\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ $(j = 1, 2)$ sono misure reali con (μ^+, μ^-) e (μ_j^+, μ_j^-) decomposizioni di Jordan di μ e μ_j rispettivamente. Per estensione, nel caso complesso le quattro misure positive finite (μ_j^+, μ_j^-) $(j = 1, 2)$ si dicono *decomposizione di Jordan di* μ.
La definizione di funzione integrabile rispetto ad una misura reale o complessa e la relativa nozione di integrale sono basate sul seguente risultato elementare.

Lemma 4.13. *Sia $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ una misura reale o complessa con decomposizione di Jordan (μ^+, μ^-) o (μ_j^+, μ_j^-) $(j = 1, 2)$ a seconda che $\mathbb{K}$ sia $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e sia $f\colon X \to \mathbb{K}$ una funzione $\mathcal{S}$ – misurabile. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *f è $|\mu|_{\mathrm{tv}}-$integrabile;*
(b) *f è $\mu^\pm-$integrabile ovvero $\mu_j^\pm-$integrabile $(j = 1, 2)$ a seconda che $\mathbb{K}$ sia $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Per fisare le idee consideriamo il caso complesso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ si ha

$$0 \leq \mu_j^\pm(E) \leq |\mu|_{\mathrm{tv}}(E) \leq \mu_1^+(E) + \mu_1^-(E) + \mu_2^+(E) + \mu_2^-(E)$$

e di conseguenza per ogni funzione semplice e $\mathcal{S}-$misurabile $s\colon X \to [0, +\infty)$ risulta

$$0 \leq \int_E s \, d\mu_j^\pm \leq \int_E s \, d|\mu|_{\mathrm{tv}} \leq \int_E s \, d\mu_1^+ + \int_E s \, d\mu_1^- + \int_E s \, d\mu_2^+ + \int_E s \, d\mu_2^-$$

e la conclusione segue dalla definizione di integrale e di funzione integrabile. $\square$

Sia ora $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ una misura reale con decomposizione di Jordan (μ^+, μ^-). Una funzione $\mathcal{S}-$misurabile $f\colon X \to \mathbb{R}$ si dice *μ – integrabile su X* se f è $|\mu|_{\mathrm{tv}}-$integrabile su X nel qual caso si pone

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f \, d\mu^+ - \int_E f \, d\mu^-, \qquad E \in \mathcal{S},$$

e tale numero si dice *integrale di f rispetto a μ sull'insieme $E \in \mathcal{S}$.*
Analogamente, se $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ una misura complessa con decomposizione di Jordan (μ_j^+, μ_j^-) $(j = 1, 2)$, una funzione $\mathcal{S}-$misurabile $f\colon X \to \mathbb{C}$ si dice *μ – integrabile su X* se f è $|\mu|_{\mathrm{tv}}-$integrabile su X nel qual caso si pone

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f \, d\mu_1^+ - \int_E f \, d\mu_1^- + i\int_E f \, d\mu_2^+ - i\int_E f \, d\mu_2^-, \qquad E \in \mathcal{S}.$$

e tale numero si dice ancora *integrale di f rispetto a μ sull'insieme $E \in \mathcal{S}$*.
Riassumiamo nell'elenco seguente le proprietà dell'integrale rispetto ad una misura reale o complessa. Sia $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ una misura reale o complessa e siano $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ due funzioni $\mu-$integrabili ed $E \in \mathcal{S}$ un insieme $\mathcal{S}-$misurabile. Allora,

- $f1_E$ è $\mu-$integrabile su X e $\displaystyle\int_E f\,d\mu = \int_X f1_E\,d\mu$;
- $f = 0$ su $E \implies \displaystyle\int_E f\,d\mu = 0$;
- $|\mu|_{\text{tv}}(E) = 0 \implies \displaystyle\int_E f\,d\mu = 0$;
- per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ la funzione $(\alpha f + \beta g)$ è $\mu-$integrabile su X e risulta
$$\int_E (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int_E f\,d\mu + \beta \int_E g\,d\mu;$$
- $\displaystyle\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \int_X |f|\,d|\mu|_{\text{tv}}$.

Inoltre, per ogni coppia di insiemi $E, F \in \mathcal{S}$ e per ogni famiglia di insiemi $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \ge 1)$ risulta

- $E \cap F = \varnothing \implies \displaystyle\int_{E \cup F} f\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_F f\,d\mu$;
- $E_m \cap E_n = \varnothing \implies \displaystyle\int_E f\,d\mu = \sum_n \int_{E_n} f\,d\mu$.

Tutte queste proprietà si ricavano dalla definizione e dalle corrispondenti proprietà dell'integrale rispetto a misure positive. Tra esse, l'unica la cui dimostrazione non è immediatamente riconducibile a tale schema è la disuguaglianza
$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \int_X |f|\,d|\mu|_{\text{tv}}.$$
Per verificarla, consideriamo dapprima una funzione semplice e $\mathcal{S}-$misurabile $s\colon X \to \mathbb{K}$ della forma
$$s = \alpha_1 1_{A_1} + \cdots + \alpha_k 1_{A_k}$$
con coefficienti $\alpha_h \in \mathbb{K}$ e insiemi $A_h \in \mathcal{S}$ $(h = 1, \dots, k)$ che supponiamo disgiunti. Allora, s è $\mu-$integrabile su X e risulta
$$\begin{aligned}\left|\int_X s\,d\mu\right| &= |\alpha_1\mu(A_1) + \cdots + \alpha_k\mu(A_k)| \le \\ &\le |\alpha_1||\mu|_{\text{tv}}(A_1) + \cdots + |\alpha_k||\mu|_{\text{tv}}(A_k) = \int_X |s|\,d|\mu|_{\text{tv}}.\end{aligned}$$
Sia quindi $f\colon X \to \mathbb{K}$ una funzione $\mu-$integrabile su X e siano $s_k\colon X \to \mathbb{K}$ $(k \ge 1)$ funzioni semplici e $\mathcal{S}-$misurabili tali che $|s_k| \le |f|$ per ogni k e $s_k \to f$ puntualmente in X per $k \to +\infty$ (Corollario 2.10). Passando al limite mediante il teorema di convergenza dominata, con le notazioni introdotte all'inizio per μ risulta allora
$$\lim_{k\to+\infty} \int_X s_k\,d\mu^{\pm} = \int_X f\,d\mu^{\pm} \qquad \text{o} \qquad \lim_{k\to+\infty} \int_X s_k\,d\mu_j^{\pm} = \int_X f\,d\mu_j^{\pm}$$
a seconda che sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e analogamente risulta
$$\lim_{k\to+\infty} \int_X |s_k|\,d|\mu|_{\text{tv}} = \int_X |f|\,d|\mu|_{\text{tv}}$$

cosicché, dalla disuguaglianza

$$\left|\int_X s_k\, d\mu\right| \leq \int_X |s_k|\, d|\mu|_{\text{tv}}, \qquad k \geq 1,$$

si ricava la disuguaglianza cercata.
Non insistiamo nell'elencare le altre proprietà dell'integrazione rispetto a misure reali o complesse che possono essere riformulate senza difficoltà a partire dalle corrispondenti proprietà dell'integrazione rispetto a misure positive finite. Oltre a quelle già elencate, menzioniamo solo le proprietà dell'integrazione di funzioni uguali $\mu-$quasi ovunque[2] (Teorema 2.39) e il teorema di convergenza dominata di Lebesgue (Teorema 2.42).

Misure di Radon reali e complesse. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto. Una misura di Borel reale o complessa $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ in X si dice *misura di Radon reale o complessa in* X se tali sono le variazioni positiva e negativa della sua decomposizione di Jordan (μ^+, μ^-) nel caso reale ovvero (μ_j^+, μ_j^-) $(j = 1, 2)$ nel caso complesso. In maniera analoga si definisce la nozione di *misura regolare reale o complessa in* X e ogni misura di Radon reale o complessa risulta essere anche regolare (Corollario 3.4).

Proposizione 4.14. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e sia $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ una misura di Borel reale o complessa in X. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *μ è una misura di Radon reale o complessa in X;*
(b) *$|\mu|_{\text{tv}}$ è una misura di Radon positiva in X.*

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso reale e denotiamo con (μ^+, μ^-) la decomposizione di Jordan di μ. Se $|\mu|_{\text{tv}}$ è esternamente regolare, da $\mu^\pm \leq |\mu|_{\text{tv}}$ segue che anche $\mu^\pm$ sono tali[3]: per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme aperto V_ε con $E \subset V_\varepsilon$ tale che $|\mu|_{\text{tv}}(V_\varepsilon \setminus E) \leq \varepsilon$ cosicché risulta anche $\mu^\pm(V_\varepsilon \setminus E) \leq \varepsilon$. Viceversa, se μ è una misura di Radon reale in X, le sue variazioni μ^+ e μ^- sono misure positive di Radon in X per definizione e quindi sono esternamente regolari e lo stesso vale per la somma $\mu^+ + \mu^- = |\mu|_{\text{tv}}$. Allo stesso modo si procede per la regolarità interna e questo prova l'asserto nel caso reale.
Nel caso complesso, siano $\mu_j\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ $(j = 1, 2)$ le misure reali tali che $\mu = \mu_1 + i\mu_2$. Per definizione la misura di Borel complessa μ è una misura di Radon complessa in X se e solo se sono tali le misure reali μ_j e, ragionando nuovamente come nel caso precedente, dalle disuguaglianze

$$|\mu_j|_{\text{tv}} \leq |\mu|_{\text{tv}} \leq |\mu_1|_{\text{tv}} + |\mu_2|_{\text{tv}} \qquad (j = 1, 2)$$

segue che la variazione totale $|\mu|_{\text{tv}}$ è una misura di Radon positiva in X se e solo se sono tali le variazioni totali $|\mu_j|_{\text{tv}}$ che, per quanto provato nel caso reale, equivale a richiedere che μ sia una misura di Radon complessa in X. □

Dalle considerazioni precedenti segue anche che l'insieme

$$\mathcal{M}(X) = \left\{\mu\colon \mathcal{B}(X) \to \mathbb{K} \text{ misura di Radon in } X\right\}$$

delle misure di Radon in X a valori reali o complessi è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e che

$$d_{\text{tv}}(\mu, \nu) = |\mu - \nu|_{\text{sv}}(X), \qquad \mu, \nu \in \mathcal{M}(X),$$

è una metrica in $\mathcal{M}(X)$.

---

[2] La definizione di funzioni uguali $\mu-$quasi ovunque con μ misura reale o complessa è ovvia alla luce dell'uguaglianza $\mathcal{N}(\mu) = \mathcal{N}(|\mu|_{\text{tv}})$.

[3] È questo un caso particolare di Esercizio 3.3.

TEOREMA 4.15. *Lo spazio metrico* $(\mathcal{M}(X), d_{\text{sv}})$ *è completo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ la $\sigma-$algebra di Borel di X. Alla luce di Teorema 4.6 è sufficiente provare che $\mathcal{M}(X)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{M}(\mathcal{B})$.
Siano dunque $\mu_n \in \mathcal{M}(X)$ $(n \geq 1)$ misure di Radon in X e $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$ una misura di Borel in X tale che $\mu_n \to \mu$ nella metrica della semivariazione per $n \to +\infty$. Dati $E \in \mathcal{B}$ e $\varepsilon > 0$, sia $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu_n - \mu|_{\text{sv}}(X) \leq \varepsilon/2$$

e sia V_ε un insieme aperto tale $E \subset V_\varepsilon$ e $|\mu_{n_0}|_{\text{sv}}(V_\varepsilon \setminus E) \leq \varepsilon/2$. Si ha allora

$$|\mu|_{\text{sv}}(V_\varepsilon \setminus E) \leq |\mu_{n_0}|_{\text{sv}}(V_\varepsilon \setminus E) + |\mu - \mu_{n_0}|_{\text{sv}}(V_\varepsilon \setminus E) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

e questo prova che μ è esternamente regolare. In maniera analoga si procede per la regolarità interna. □

4.2. Misure assolutamente continue e teorema di Radon–Nikodym

La caratterizzazione delle misure positive e delle misure reali o complesse μ su una $\sigma-$algebra di insiemi $\mathcal{S}$ che sono l'integrale indefinito di qualche funzione rispetto ad una assegnata misura positiva λ su $\mathcal{S}$ (teorema di Radon–Nikodym) costituisce uno dei più importanti risultati nell'ambito della teoria della misura e dell'integrazione per le numerose conseguenze che da tale caratterizzazione derivano. Ricaviamo in questa sezione tale caratterizzazione e proviamo che ogni misura μ si decompone canonicamente come somma di una parte che è l'integrale indefinito di una qualche funzione rispetto alla misura positiva assegnata λ e di una parte che è invece singolare rispetto a λ (decomposizione di Lebesgue).
A tal fine, denotiamo con $\mathcal{S}$ una $\sigma-$algebra di sottoinsiemi di un insieme astratto (non vuoto) X e con $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva che supporremo fissati in tutta questa sezione.

Misure assolutamente continue. Sia

$$\mu(E) = \int_E f\, d\lambda, \qquad E \in \mathcal{S},$$

l'integrale indefinito di una qualche funzione $\mathcal{S}-$misurabile $f\colon X \to [0, +\infty]$ o $\lambda-$integrabile $f\colon X \to \mathbb{K}$ rispetto alla misura λ. Deve allora essere $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$ (Proposizioni 2.17−(f) o 2.36−(c)) e nel caso in cui μ sia positiva e finita, essa deve essere assolutamente $\lambda-$continua nel senso di Teorema 2.33. Tale proprietà si generalizza nella definizione seguente.

DEFINIZIONE 4.16. Una misura positiva $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ o una misura reale o complessa $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ per cui valga la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$E \in \mathcal{S} \text{ e } \lambda(E) \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(E)| \leq \varepsilon;$$

si dice *assolutamente* λ *– continua* e in tal caso si scrive $\mu \ll \lambda$. □

Nel caso di una misura reale o complessa μ, la condizione che compare nella definizione equivale a richiedere che sia $|\mu|_{\text{sv}}(E) \leq \varepsilon$ per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ con $\lambda(E) \leq \delta$.
Elenchiamo nel risultato seguente alcune proprietà elementari collegate alla definizione precedente.

PROPOSIZIONE 4.17. *Siano* $\mu, \mu_j \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ $(j = 1, 2)$ *misure reali o complesse. Allora,*

(a) $\mu \ll \lambda \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\mu|_{\text{tv}} \ll \lambda$*;*

(b) $\mu_1 \ll \lambda$ *e* $\mu_2 \ll \lambda \quad \Longrightarrow \quad (\mu_1 + \mu_2) \ll \lambda$*;*
(c) $\mu_1 \ll \lambda$ *e* $\mu_2 \perp \lambda \quad \Longrightarrow \quad \mu_1 \perp \mu_2$*;*
(d) $\mu \ll \lambda$ *e* $\mu \perp \lambda \quad \Longrightarrow \quad \mu = 0$.

Le proprietà (b), (c) e (d) valgono anche quando μ o μ_1 e μ_2 sono misure positive non necessariamente finite.

Dimostrazione. Le affermazioni (a) e (b) sono evidenti.
(c) Da $\mu_2 \perp \lambda$ segue che esiste un insieme $E \in \mathcal{S}$ con $\lambda(E) = 0$ sul quale μ_2 è concentrata e da $\mu_1 \ll \lambda$ segue $\mu_1(F) = 0$ per ogni $F \in \mathcal{S}$, $F \subset E$. Quindi, μ_1 è concentrata su E^{c}.
(d) Da (c) segue $\mu \perp \mu$ e quindi risulta $\mu = 0$. □

Il risultato seguente chiarisce quali relazioni sussistono tra gli insiemi trascurabili di due misure e la assoluta continuità delle stesse.

Teorema 4.18. *Sia* $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ *una misura positiva. Allora,*

(a) $\mu \ll \lambda \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$*;*
(b) $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$ *e* $\mu(X) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mu \ll \lambda$.

Inoltre, se $\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ *è una misura reale o complessa, si ha*

(c) $\nu \ll \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\nu)$.

Dimostrazione. La prima affermazione è ovvia e la terza segue dalle prime due e in forza di Proposizione 4.17 – (a) e dell'uguaglianza $\mathcal{N}(\nu) = \mathcal{N}(|\nu|)$. Resta quindi da provare solo (b).
Per assurdo, siano $\varepsilon > 0$ ed $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ insiemi tali che $\lambda(E_n) \leq 1/2^n$ e $\mu(E_n) \geq \varepsilon$ per ogni n. Poniamo

$$F_n = \bigcup_{m \geq n} E_m \qquad \text{e} \qquad F = \bigcap_n F_n.$$

cosicché risulta $F_n \in \mathcal{S}$, $F_{n+1} \subset F_n$ e $\lambda(F_n) \leq 1/2^{n-1}$ per ogni n. Quindi, F è λ – trascurabile e, essendo μ finita, risulta

$$\mu(F) = \lim_{n \to +\infty} \mu(F_n) \geq \liminf_{n \to +\infty} \mu(E_n) \geq \varepsilon$$

e questo contraddice l'ipotesi. □

L'ipotesi che μ sia finita in Teorema 4.18 – (b) non può essere eliminata come prova l'esempio seguente.

Esempio 4.19. Siano μ e λ le misure positive definite sulla σ – algebra delle parti di $\mathbb{N}_+$ da

$$\mu(E) = \#(E) \qquad \text{e} \qquad \lambda(E) = \sum_{n \in E} 1/2^n$$

per ogni insieme $E \subset \mathbb{N}_+$ (Esempio 1.21 – (a)). Si ha evidentemente $\mathcal{N}(\mu) = \{\varnothing\}$ e $\mathcal{N}(\lambda) = \{\varnothing\}$ ma $\mu(\{n\}) = 1$ e $\lambda(\{n\}) = 1/2^n$ per ogni n e quindi la misura μ non è assolutamente λ – continua. □

Teorema di Radon–Nikodym. Proviamo in questa parte il celebre teorema di Radon–Nikodym che caratterizza le misure positive che sono l'integrale indefinito di una qualche funzione rispetto ad una misura positiva fissata.

Teorema 4.20 (J. Radon – O. M. Nikodym). *Siano* $\mu, \lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ *misure positive* σ *– finite tali che* $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$*. Allora,*

(a) *esiste* $f\colon X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$ *–misurabile tale che*

$$\mu(E) = \int_E f\,d\lambda, \qquad E \in \mathcal{S};$$

(b) *se* $f, g\colon X \to [0,+\infty]$ *sono funzioni* $\mathcal{S}$ *–misurabili tali che*

$$\int_E f\,d\lambda = \mu(E) = \int_E g\,d\lambda, \qquad E \in \mathcal{S},$$

si ha $f = g$ λ *–quasi ovunque su* X*.*

Pertanto, μ è l'integrale indefinito di f rispetto a λ e la funzione f è la derivata di Radon–Nikodym di μ rispetto a λ. Inoltre, se la misura positiva μ è illimitata si avrà evidentemente

$$\int_X f\,d\lambda = +\infty.$$

Dimostrazione. (a) Supponiamo dapprima che μ e λ siano misure positive finite. Per ogni funzione $\mathcal{S}$–misurabile $f\colon X \to [0,+\infty]$ denotiamo con

$$\mu_f(E) = \int_E f\,d\lambda, \qquad E \in \mathcal{S},$$

l'integrale indefinito di f rispetto a λ e definiamo inoltre

$$\mathcal{F} = \bigl\{ f\colon X \to [0,+\infty] : \ f \text{ è } \mathcal{S}\text{–misurabile e } \mu_f \le \mu \bigr\}$$

e

$$L = \sup\left\{ \int_X f\,d\lambda : \ f \in \mathcal{F} \right\}.$$

Poiché μ è finita, si ha $0 \le L \le \mu(X) < +\infty$. Siano quindi $f_n \in \mathcal{F}$ $(n \ge 1)$ gli elementi di una successione di funzioni di $\mathcal{F}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\lambda = L^-.$$

Poiché si ha $\max\{f_1, f_2\} \in \mathcal{F}$ quando $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, non è restrittivo supporre che sia $f_n \le f_{n+1}$ per ogni n e quindi, posto $f = \sup\{f_n : \ n \ge 1\}$, risulta $f \in \mathcal{F}$ e

$$\int_X f\,d\lambda = L$$

per il teorema di convergenza monotòna. Consideriamo quindi la misura positiva e finita $\nu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty)$ definita da

$$\nu(E) = \mu(E) - \int_E f\,d\lambda, \qquad E \in \mathcal{S},$$

e concludiamo la dimostrazione di (a) provando che ν è la misura nulla su $\mathcal{S}$. Consideriamo a tal fine le misure reali $\nu_n \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ definite da

$$\nu_n(E) = \nu(E) - \frac{1}{n}\lambda(E), \qquad E \in \mathcal{S} \quad (n \ge 1),$$

e le relative decomposizioni di Hahn (X_n^+, X_n^-) di X rispetto a ν_n. Posto

$$X^+ = \bigcup_n X_n^+ \qquad \text{e} \qquad X^- = \bigcap_n X_n^-,$$

si ha $X^\pm \in \mathcal{S}$ e $X^+ \cap X^- = \varnothing$ e $X^+ \cup X^- = X$. Inoltre, si ha

$$0 \le \nu(X^-) = \nu_n(X^-) + \frac{1}{n}\lambda(X^-) \le \frac{1}{n}\lambda(X) \to 0$$

per $n \to +\infty$ cosicché risulta $\nu(X^-) = 0$. Consideriamo quindi le funzioni $\mathcal{S}-$misurabili $g_n \colon X \to [0,+\infty]$ $(n \geq 1)$ definite da

$$g_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \cdot 1_{X_n^+}(x), \qquad x \in X.$$

Risulta allora

$$\begin{aligned}
\int_E g_n \, d\lambda &= \int_E f \, d\lambda + \frac{1}{n}\lambda(E \cap X_n^+) = \\
&= \int_{E \cap X_n^+} f \, d\lambda + \frac{1}{n}\lambda(E \cap X_n^+) + \int_{E \setminus X_n^+} f \, d\lambda = \\
&= \mu(E \cap X_n^+) - \nu_n(E \cap X_n^+) + \int_{E \setminus X_n^+} f \, d\lambda = \\
&\leq \mu(E \cap X_n^+) + \int_{E \setminus X_n^+} f \, d\lambda = \\
&= \mu(E \cap X_n^+) + \mu(E \setminus X_n^+) = \mu(E)
\end{aligned}$$

per ogni $E \in \mathcal{S}$ e da cui segue $g_n \in \mathcal{F}$ per ogni n. Si ha allora

$$L \geq \int_X g_n \, d\lambda = \int_X f \, d\lambda + \frac{1}{n}\lambda(X_n^+) = L + \frac{1}{n}\lambda(X_n^+), \qquad n \geq 1,$$

da cui segue $\lambda(X_n^+) = 0$ per ogni n. Da $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$ e da Proposizione 2.17$-$(f) si ricava che risulta $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\nu)$ cosicché risulta $\nu(X^+) = 0$ e questo prova (a) quando μ e λ sono entrambe misure positive finite.
Resra da considerare il caso in cui le misure positive μ e λ siano $\sigma-$finite ma non finite. Consideriamo in tal caso una partizione $\{X_n\}_n$ di X costituita da insiemi $\mathcal{S}-$misurabili tali che sia $\mu(X_n) < +\infty$ e $\lambda(X_n) < +\infty$ per ogni n e consideriamo le restrizioni $\mu_n = \mu \llcorner X_n$ e $\lambda_n = \lambda \llcorner X_n$ delle misure μ e λ a ciascun insieme X_n. Le misure μ_n e λ_n così definite sono misure positive finite concentrate su X_n e da $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$ segue $\mu_n \ll \lambda_n$ per ogni n. Pertanto, per quanto dimostrato prima, per ogni n esiste una funzione $\mathcal{S}-$misurabile $f_n \colon X \to [0,+\infty]$ tale che

$$\mu_n(E) = \int_E f_n \, d\lambda_n, \qquad E \in \mathcal{S},$$

ed è facile verificare che, essendo μ_n concentrata su X_n, si può assumere che risulti $f_n = 0$ in $X \setminus X_n$ per ogni n cosicché, essendo anche λ_n concentrata su X_n, risulta anche

$$\int_E f_n \, d\lambda_n = \int_E f_n \, d\lambda, \qquad E \in \mathcal{S},$$

per ogni n. Sia quindi $f \colon X \to [0,+\infty]$ la funzione $\mathcal{S}-$misurabile definita da

$$f(x) = \sum_n f_n(x), \qquad x \in X.$$

Per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ si ha allora

$$\mu(E) = \sum_n \mu_n(E) = \sum_n \int_E f_n \, d\lambda_n = \sum_n \int_E f_n \, d\lambda = \int_E f \, d\lambda$$

e quasto completa la dimostrazione di (a).
(b) Sia $\{X_n\}_n$ una partizione di X costituita da insiemi $\mathcal{S}-$misurabili tali che sia $\mu(X_n) < +\infty$ per ogni n. Consideriamo quindi l'insieme $\mathcal{S}-$misurabile $\{f > g\}$ (Esercizio 2.1) e la funzione $\mathcal{S}-$misurabile $h \colon X \to [0,+\infty]$ definita da

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \{f \leq g\} \\ f(x) - g(x) & \text{se } x \in \{f > g\}. \end{cases}$$

Si ha

$$\int_{\{f>g\}\cap X_n} f\,d\lambda = \mu\big(\{f>g\}\cap X_n\big) = \int_{\{f>g\}\cap X_n} g\,d\lambda$$

e da $g+h=f$ su $\{f>g\}$ segue

$$\begin{aligned}\mu\big(\{f>g\}\cap X_n\big) + \int_{\{f>g\}\cap X_n} h\,d\lambda &= \int_{\{f>g\}\cap X_n} g\,d\lambda + \int_{\{f>g\}\cap X_n} h\,d\lambda = \\ &= \int_{\{f>g\}\cap X_n} (g+h)\,d\lambda = \\ &= \int_{\{f>g\}\cap X_n} f\,d\lambda = \mu\big(\{f>g\}\cap X_n\big)\,.\end{aligned}$$

Essendo $\mu(X_n)<+\infty$, deve essere

$$\int_{\{f>g\}\cap X_n} h\,d\lambda = 0$$

cosicché, essendo $h>0$ sull'insieme $\{f>g\}$, tutti gli insiemi $\{f>g\}\cap X_n$ devono essere $\lambda-$trascurabili e lo stesso accade quindi per $\{f>g\}$. Scambiando i ruoli di f e g si conclude. $\square$

Il teorema di Radon–Nikodym si estende facilmente al caso di misure reali o complesse.

TEOREMA 4.21. *Sia $\lambda\colon\mathcal{S}\to[0,+\infty]$ una misura positiva σ–finita e sia $\mu\in\mathcal{M}(\mathcal{S})$ una misura reale o complessa tale che $\mathcal{N}(\lambda)\subset\mathcal{N}(\mu)$. Allora,*

(a) *esiste $f\colon X\to\mathbb{K}$ λ–integrabile tale che*

$$\mu(E)=\int_E f\,d\lambda, \qquad E\in\mathcal{S};$$

(b) *se $f,g\colon X\to\mathbb{K}$ sono funzioni λ–integrabili tali che*

$$\int_E f\,d\lambda = \mu(E) = \int_E g\,d\lambda, \qquad E\in\mathcal{S},$$

si ha $f=g$ λ–quasi ovunque su X.

(c) $|\mu|_{\mathrm{tv}}(E) = \int_E |f|\,d\lambda, \qquad E\in\mathcal{S}.$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo solo (c) poiché le altre affermazioni si ricavano facilmente dal caso precedente.

(c) Sia

$$\overline{\mu}(E)=\int_E |f|\,d\lambda, \qquad E\in\mathcal{S},$$

l'integrale indefinito di $|f|$ rispetto a λ. Allora, $\overline{\mu}$ è una misura positiva su $\mathcal{S}$ per la quale risulta $|\mu(E)|\le\overline{\mu}(E)$ per ogni $E\in\mathcal{S}$ da cui segue $|\mu|_{\mathrm{tv}}(E)\le\overline{\mu}(E)$ per ogni $E\in\mathcal{S}$ per la minimalità della variazione totale $|\mu|_{\mathrm{tv}}$ di μ.

Viceversa, consideriamo una funzione semplice e $\mathcal{S}-$misurabile $s\colon X\to\mathbb{K}$ della forma

$$s=\alpha_1 1_{A_1}+\cdots+\alpha_k 1_{A_k}$$

con coefficienti $\alpha_h\in\mathbb{K}$ tali che $|\alpha_h|\le 1$ e insiemi $A_h\in\mathcal{S}$ $(h=1,\dots,k)$ disgiunti. Per ogni insieme $E\in\mathcal{S}$ si ha allora

$$\left|\int_E sf\,d\lambda\right| = \left|\sum_h \alpha_h \int_{E\cap A_h} f\,d\lambda\right| \le \sum_h \left|\int_{E\cap A_h} f\,d\lambda\right| \le \sum_h |\mu(E\cap A_h)| \le |\mu|_{\mathrm{tv}}(E).$$

Siano quindi $s_k \colon X \to \mathbb{K}$ ($k \geq 1$) funzioni semplici $\mathcal{S}$ – misurabili tali che sia $|s_k| \leq 1$ su X per ogni k e $s_k \to \operatorname{sgn}(f)$ puntualmente su X per $k \to +\infty$ (Corollario 2.10) cosicché risulta

$$\left| \int_E s_k f \, d\lambda \right| \leq |\mu|_{\mathrm{tv}}(E)$$

per ogni k. Da $|s_k f| \leq |f|$ su X per ogni k con f λ – integrabile su X, passando al limite mediante il teorema di convergenza dominata, risulta

$$\lim_{k\to+\infty} \int_E s_k f \, d\lambda = \int_E |f| \, d\lambda = \overline{\mu}(E), \qquad E \in \mathcal{S},$$

e da questa uguaglianza e dalla disuguaglianza precedente segue $\overline{\mu}(E) \leq |\mu|_{\mathrm{tv}}(E)$ per ogni $E \in \mathcal{S}$ e questo completa la dimostrazione. □

Corollario 4.22. *Sia $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ una misura reale o complessa. Allora, esiste una funzione $|\mu|_{\mathrm{tv}}$ – integrabile $\theta \colon X \to \mathbb{K}$ con $|\theta(x)| = 1$ per ogni $x \in X$ tale che*

$$\mu(E) = \int_E \theta \, d|\mu|_{\mathrm{tv}}, \qquad E \in \mathcal{S}.$$

La formula precedente permette di rappresentare la misura reale o complessa μ come integrale indefinito ripetto alla sua variazione totale $|\mu|_{\mathrm{tv}}$ e da essa, ragionando come nella dimostrazione di Teorema 2.32, si ricava facilmente che risulta anche

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f\theta \, d|\mu|_{\mathrm{tv}}.$$

per ogni funzione $f \colon X \to \mathbb{K}$ μ – integrabile su X. Questa uguaglianza si può riassumere nella formula $d\mu = \theta d|\mu|_{\mathrm{tv}}$ da cui, nel caso complesso, per l'evidente analogia con la corrispondente rappresentazione dei numeri complessi, segue il nome di *decomposizione polare di μ* dato a tale formula.

Dimostrazione. Nel caso reale la tesi è ovvia: basta prendere $\theta = 1_{X^+} - 1_{X^-}$ con (X^+, X^-) decomposizione di Hahn di X rispetto a μ. Consideriamo quindi il solo caso complesso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Si ha $\mathcal{N}(\mu) = \mathcal{N}(|\mu|_{\mathrm{tv}})$ e quindi esiste una funzione $|\mu|_{\mathrm{tv}}$–integrabile $\theta \colon X \to \mathbb{C}$ che è la derivata di Radon–Nikodym di μ rispetto alla sua variazione totale $|\mu|_{\mathrm{tv}}$ (Teorema 4.21). Resta dunque da provare solo che risulta $|\theta(x)| = 1$ per ogni $x \in X$.
Sia $E = \{|\theta| > 1\}$. Se fosse $|\mu|_{\mathrm{tv}}(E) > 0$, si avrebbe

$$|\mu|_{\mathrm{tv}}(E) = \int_E |\theta| \, d|\mu|_{\mathrm{tv}} > |\mu|_{\mathrm{tv}}(E)$$

(Teorema 4.21 – (c) e Corollario 2.26 – (b)) e allo stesso modo si prova che anche l'insieme $\{|\theta| < 1\}$ è $|\mu|_{\mathrm{tv}}$ – trascurabile. Quindi, si ha $|\theta(x)| = 1$ per $|\mu|_{\mathrm{tv}}$ – q.o. $x \in X$ cosicché, ridefinendo θ in ogni punto x di $\{|\theta| \neq 1\}$ ponendo $\theta(x) = 1$, si ottiene la funzione cercata (Proposizione 2.11 – (b)). □

Il teorema di Radon–Nikodym vale per misure positive μ anche non σ – finite tali che $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$ con λ σ – finita (Esercizio 4.4) mentre può non valere al di fuori del contesto di misure λ σ – finite come risulta dall'esempio seguente.

Esempio 4.23. Sia $\lambda = \#$ la misura del conteggio su $\mathbb{R}$ e siano $\mathcal{S}$ una σ – algebra di insiemi di $\mathbb{R}$ e $\mu \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva σ – finita e non identicamente nulla per la quale si abbia $\{x\} \in \mathcal{S}$ e $\mu(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Come vedremo nel successivo Capitolo 5, la σ – algebra e la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$ hanno tali proprietà.
Chiaramente, la restrizione alla σ – algebra $\mathcal{S}$ della misura del conteggio su $\mathbb{R}$ non è σ – finita e si ha $\mu \ll \#$ poiché l'unico insieme di misura nulla per la misura del

conteggio è l'insieme vuoto. Se valesse il teorema di Radon–Nikodym, esisterebbe una funzione $f\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$ – misurabile tale che

$$\sum_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f\,d\# = \mu(\mathbb{R}) > 0$$

ma al contempo si avrebbe

$$f(x) = \int_{\{x\}} f\,d\# = \mu(\{x\}) = 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

e ciò è evidentemente assurdo. □

Decomposizione di Lebesgue. Ogni misura μ si decompone canonicamente come somma di una parte che è l'integrale indefinito di una qualche funzione rispetto ad una misura positiva assegnata λ e di una parte che è invece singolare rispetto a λ.

TEOREMA 4.24. *Siano $\mu, \lambda\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misure positive σ – finite. Allora, esiste una ed una sola coppia di misure positive $(\mu_{\mathrm{ac}}, \mu_{\mathrm{s}})$ su $\mathcal{S}$ tali che*

(a) $\mu = \mu_{\mathrm{ac}} + \mu_{\mathrm{s}}$ *e* $\mu_{\mathrm{ac}} \perp \mu_{\mathrm{s}}$*;*
(b) $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu_{\mathrm{ac}})$ *e* $\mu_{\mathrm{s}} \perp \lambda$*.*

Inoltre, se μ è finita, si ha

(c) $\mu_{\mathrm{ac}} \ll \lambda$ *e* $\mu_{\mathrm{s}} \perp \lambda$*.*

La coppia $(\mu_{\mathrm{ac}}, \mu_{\mathrm{s}})$ si dice *decomposizione di Lebesgue di μ rispetto a λ*: la misura μ_{ac} è la *parte assolutamente λ – continua di μ* mentre la misura μ_{s} è la *parte singolare di μ rispetto a λ*. Nelle ipotesi del teorema si ha dunque

$$\mu(E) = \int_E f\,d\lambda + \mu_{\mathrm{s}}(E), \qquad E \in \mathcal{S},$$

per qualche funzione $\mathcal{S}$ – misurabile $f\colon X \to [0,+\infty]$.
Alla dimostrazione premettiamo il lemma seguente.

LEMMA 4.25. *Siano $\mu, \lambda\colon X \to [0,+\infty]$ misure positive σ – finite tali che $\mu \le \lambda$. Esiste allora una funzione $\mathcal{S}$ – misurabile $f\colon X \to [0,1]$ tale che*

$$\mu(E) = \int_E f\,d\lambda \qquad E \in \mathcal{S}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia la funzione $\mathcal{S}$ – misurabile $g\colon X \to [0,+\infty]$ una derivata di Radon–Nikodym di μ rispetto a λ. Per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ si ha

$$\begin{aligned}\mu(E) = \int_E g\,d\lambda \ge \int_E \min\{g,1\}\,d\lambda &= \int_{E\cap\{g\le 1\}} g\,d\lambda + \lambda\,(E\cap\{g>1\}) = \\ &= \mu\big(E\cap\{g\le 1\}\big) + \lambda\big(E\cap\{g>1\}\big) \ge \\ &\ge \mu\big(E\cap\{g\le 1\}\big) + \mu\big(E\cap\{g>1\}\big) = \\ &= \mu(E)\end{aligned}$$

e quindi basta prendere $f = \min\{g,1\}$. □

DIMOSTRAZIONE (TEOREMA 4.24). La misura positiva $\mu + \lambda$ è σ – finita e tale che $\mu \le \mu + \lambda$. Per il teorema di Radon–Nikodym esiste una funzione $\mathcal{S}$ – misurabile $f\colon X \to [0,+\infty]$ tale che

$$(**) \qquad \mu(E) = \int_E f\,d(\mu+\lambda) = \int_E f\,d\mu + \int_E f\,d\lambda, \qquad E \in \mathcal{S},$$

e possiamo inoltre assumere che risulti $0 \le f(x) \le 1$ per ogni x (Lemma 4.25). Consideriamo quindi una partizione numerabile $\{X_n\}_n$ di X costituita da insiemi $\mathcal{S}-$misurabili tali che si abbia $\mu(X_n) < +\infty$ per ogni n e poniamo

$$A = \{0 \le f < 1\} \qquad \text{e} \qquad B = \{f = 1\}.$$

Anche A, B è una partizione $\mathcal{S}-$misurabile di X e si ha

$$\mu(B \cap X_n) = \int_{B \cap X_n} f\, d(\mu + \lambda) = \mu(B \cap X_n) + \lambda(B \cap X_n)$$

per ogni n. Essendo $\mu(X_n) < +\infty$, risulta $\lambda(B \cap X_n) = 0$ per ogni n cioè $\lambda(B) = 0$. Consideriamo quindi le misure positive e $\sigma-$finite definite per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ da

$$\mu_{\mathrm{ac}}(E) = \mu(E \cap A) \qquad \text{e} \qquad \mu_{\mathrm{s}}(E) = \mu(E \cap B).$$

È chiaro che per esse vale (a) e che si ha $\mu_{\mathrm{s}} \perp \lambda$ cosicché, per completare la dimostrazione di (a) e (b), resta solo da provare che risulta $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu_{\mathrm{ac}})$. Sia quindi $E \in \mathcal{N}(\lambda)$. Da $(**)$ segue

$$\begin{aligned} \mu(E \cap X_n \cap A) &= \int_{E \cap X_n \cap A} f\, d(\mu + \lambda) = \\ &= \int_{E \cap X_n \cap A} f\, d\mu + \int_{E \cap X_n \cap A} f\, d\lambda = \int_{E \cap X_n \cap A} f\, d\mu \end{aligned}$$

che implica

$$\int_{E \cap X_n \cap A} (1 - f)\, d\mu = 0,$$

poiché $\mu(X_n) < +\infty$. Inoltre, essendo $1 - f(x) > 0$ per ogni $x \in A$, deve essere $\mu_{\mathrm{ac}}(E \cap X_n) = \mu(E \cap X_n \cap A) = 0$ per ogni n e questo implica $E \in \mathcal{N}(\mu_{\mathrm{ac}})$. Questo prova (a) e (b) e (c) segue da (b) quando μ è finita (Teorema 4.18 − (b)).
Resta infine da provare l'unicità della decomposizione di Lebesgue. A tal fine, sia dapprima μ una misura positiva finita e supponiamo che $(\mu_{\mathrm{ac}}, \mu_{\mathrm{s}})$ e $(\mu'_{\mathrm{ac}}, \mu'_{\mathrm{s}})$ siano due decomposizioni di Lebesgue di μ. Da

$$\mu_{\mathrm{ac}} + \mu_{\mathrm{s}} = \mu = \mu'_{\mathrm{ac}} + \mu'_{\mathrm{s}}$$

segue che $\mu_{\mathrm{ac}} - \mu'_{\mathrm{ac}}$ e $\mu'_{\mathrm{s}} - \mu_{\mathrm{s}}$ sono misure reali uguali e quindi sono nulle per Teorema 4.18 − (c), Proposizione 4.7 − (c) e per Proposizione 4.17 − (b) e 4.17 − (d).
Sia ora μ una misura positiva $\sigma-$finita e sia $(\mu_{\mathrm{ac}}, \mu_{\mathrm{s}})$ la decomposizione di μ rispetto a ν. Fissata la partizione $\mathcal{S}-$misurabile $\{X_n\}_n$ di X considerata all'inizio, per ogni n denotiamo con $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}(X_n)$ la restrizione di $\mathcal{S}$ ad X_n. È chiaro che le restrizioni di μ_{ac} e μ_{s} alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_n$ sono una decomposizione di Lebesgue della restrizione $\mu_n = \mu_{X_n}$ di μ alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_n$ rispetto alla restrizione $\lambda_n = \lambda_{X_n}$ di λ alla stessa $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_n$. Poiché la restrizione μ_n è una misura positiva e finita su $\mathcal{S}_n$, la sua decomposizione di Lebesgue rispetto a λ_n è unica per quanto provato sopra. Pertanto, le restrizioni di μ_{ac} e μ_{s} alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_n$ sono univocamente determinate per ogni n e questo prova l'unicità della decomposizione di Lebesgue $(\mu_{\mathrm{ac}}, \mu_{\mathrm{s}})$ di μ rispetto a λ. $\square$

Il risultato precedente si estende facilmente al caso delle misure reali o complesse.

Corollario 4.26. *Sia* $\lambda \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ *misura positiva* $\sigma-$*finita e sia* $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ *una misura reale o complessa. Allora, esiste una ed una sola coppia di misure reali o complesse* $(\mu_{\mathrm{ac}}, \mu_{\mathrm{s}})$ *su* $\mathcal{S}$ *tali che*

(a) $\mu = \mu_{\mathrm{ac}} + \mu_{\mathrm{s}}$ *e* $\mu_{\mathrm{ac}} \perp \mu_{\mathrm{s}}$*;*
(b) $\mu_{\mathrm{ac}} \ll \lambda$ *e* $\mu_{\mathrm{s}} \perp \lambda$*.*

La coppia $(\mu_{\mathrm{ac}}, \mu_{\mathrm{s}})$ si chiama ancora *decomposizione di Lebesgue di* μ *rispetto a* λ e a loro volta μ_{ac} e μ_{s} si chiamano rispettivamente *parte assolutamente continua di* μ *rispetto a* λ e *parte singolare di* μ *rispetto a* λ.

DIMOSTRAZIONE. Per fissare le idee, consideriamo il caso complesso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sia $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ con μ_j $(j = 1, 2)$ misure reali e sia

$$\mu = \mu_1^+ - \mu_1^- + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$$

la decomposizione di Jordan di μ. Denotiamo quindi con $\big((\mu_j^\pm)_{\mathrm{ac}}, (\mu_j^\pm)_{\mathrm{s}}\big)$ le decomposizioni di Lebesgue di $\mu_j^\pm$ rispetto a λ $(j = 1, 2)$ e consideriamo le misure complesse definite da

$$\begin{aligned} \mu_{\mathrm{ac}} &= (\mu_1^+)_{\mathrm{ac}} - (\mu_1^-)_{\mathrm{ac}} + i\,\big((\mu_2^+)_{\mathrm{ac}} - (\mu_2^-)_{\mathrm{ac}}\big)\,; \\ \mu_{\mathrm{s}} &= (\mu_1^+)_{\mathrm{s}} - (\mu_1^-)_{\mathrm{s}} + i\,\big((\mu_2^+)_{\mathrm{s}} - (\mu_2^-)_{\mathrm{s}}\big)\,. \end{aligned}$$

Si ha evidentemente $\mu = \mu_{\mathrm{ac}} + \mu_{\mathrm{s}}$ e inoltre risulta $\mu_{\mathrm{ac}} \ll \lambda$ (Proposizione 4.17 – (b)), $\mu_{\mathrm{s}} \perp \lambda$ (Proposizione 4.7 – (c)) e $\mu_{\mathrm{ac}} \perp \mu_{\mathrm{s}}$ (Proposizione 4.17 – (c)) . Pertanto, la coppia $(\mu_{\mathrm{ac}}, \mu_{\mathrm{s}})$ è la decomposizione di Lebesgue di μ rispetto a λ e la sua unicità segue dall'unicità delle decomposizioni di Lebesgue di $\mu^\pm$. □

4.3. Convergenza di misure e teorema di Vitali–Hahn–Saks

Data una misura positiva su una σ – algebra di insiemi, le classi di equivalenza di insiemi misurabili che differiscono per un insieme trascurabile costituiscono un gruppo topologico abeliano metrizzabile e completo e le misure reali o complesse assolutamente continue rispetto alla misura positiva assegnata possono essere viste come funzioni continue sul gruppo. Alla luce di ciò, esaminiamo le conseguenze in questo contesto del teorema di Baire (Teorema I–3.23) e dei risultati sulle proprietà delle funzioni della prima classe di Baire definite su spazi metrici completi (Sezione I–3.1).
Denotiamo a tal fine con X un insieme (non vuoto), con $\mathcal{S}$ una σ – algebra di insiemi di X e con $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva su $\mathcal{S}$ che supporremo fissata in tutta questa sezione.

Convergenza in misura di insiemi. Conferiamo in questa parte una struttura di gruppo topologico abeliano metrizzabile e completo all'insieme delle classi d'equivalenza di insiemi $\mathcal{S}$ – misurabili che sono uguali a meno di insiemi di misura nulla rispetto alla misura positiva λ fissata.
Introduciamo dunque in $\mathcal{S}$ la relazione d'equivalenza definita da

$$E \sim F \quad\Longleftrightarrow\quad \lambda(E \triangle F) = 0$$

e denotiamo il relativo insieme quoziente con

$$S(\lambda) = \mathcal{S}/\!\sim.$$

Per $E, E' \in \mathcal{S}$ e $F, F' \in \mathcal{S}$ si ha evidentemente

$$E \sim E' \text{ e } F \sim F' \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{cases} E \cup F \sim E' \cup F' \\ E \cap F \sim E' \cap F' \\ E \setminus F \sim E' \setminus F' \end{cases}$$

e le stesse proprietà valgono per l'unione e l'intersezione di una famiglia numerabile di insiemi: se $E_n, E_n' \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ sono insiemi tali che $E_n \sim E_n'$ per ogni n si ha

$$\bigcup_n E_n \sim \bigcup_n E_n' \qquad \text{e} \qquad \bigcap_n E_n \sim \bigcap_n E_n'.$$

Possiamo conseguentemente considerare le operazioni insiemistiche di unione, intersezione, differenza e complementazione come operazioni definite sull'insieme quoziente $S(\lambda)$ e convenire di considerare gli elementi di $S(\lambda)$ come insiemi di X piuttosto che come classi d'equivalenza di insiemi avendo ovviamente cura di definire in $S(\lambda)$ solo nozioni che siano invarianti rispetto alla relazione d'equivalenza qui introdotta. Si ha inoltre

- $E\triangle F = F\triangle E$;
- $(E\triangle F)\triangle G = E\triangle(F\triangle G)$;
- $E\triangle\varnothing = E$;
- $E\triangle E = \varnothing$;

per ogni terna di insiemi $E, F, G \in S(\lambda)$ e quindi $S(\lambda)$ risulta essere un gruppo abeliano rispetto all'operazione di differenza simmetrica avente l'insieme vuoto come elemento neutro e l'insieme E stesso come elemento opposto di E (Proposizione 1.8). Conferiamo ora al gruppo abeliano $(S(\lambda), \triangle)$ una struttura di gruppo topologico metrizzabile procedendo in maniera analoga a quanto fatto per le (classi di equivalenza di) funzioni misurabili (Sezione 2.5). A tal fine definiamo $d\colon \mathcal{S}(\lambda)\times\mathcal{S}(\lambda)\to[0,+\infty)$ ponendo

$$(*) \qquad d(E,F) = \Phi\big(\lambda(E\triangle F)\big)\,, \qquad E, F \in S(\lambda),$$

ove Φ denota l'identità se risulta $\lambda(X) < +\infty$ ovvero un omeomorfismo subadditivo e strettamente crescente $\Phi\colon [0,+\infty] \to [0,M]$ $(M > 0)$ dell'intervallo $[0,+\infty]$ sull'intervallo $[0,M]$ (Esempio 2.78) se $\lambda(X) = +\infty$.

Proposizione 4.27. *Sia $d\colon S(\lambda)\times S(\lambda)\to[0,+\infty)$ la funzione definita da $(*)$. Allora,*

(a) *d è una metrica su $S(\lambda)$;*

(b) *per ogni $E_n \in S(\lambda)$ $(n \geq 1)$ e $E \in S(\lambda)$ risulta*
$$\lim_{n\to+\infty} d(E_n, E) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda(E_n\triangle E) = 0;$$

(c) *per ciascuna operazione insiemistica $\odot \in \{\cup, \cap, \setminus, \triangle\}$ si ha*
$$d(E\odot F, G\odot H) \leq d(E,G) + d(F,H)$$
per ogni $E, F, G, H \in S(\lambda)$.

Pertanto, $(S(\lambda), d)$ è uno spazio metrico e la convergenza indotta dalla metrica d su $S(\lambda)$ è indipendente dalla scelta dell'omeomorfismo crescente e subadditivo Φ che compare nella definizione $(*)$ di d quando $\lambda(X) = +\infty$.

Dimostrazione. (a) Si ha

$$\begin{aligned} A\triangle C &= (A\setminus C)\cup(C\setminus A) = \\ &= [(A\setminus C)\cap B]\cup[(A\setminus C)\setminus B]\cup[(C\setminus A)\cap B]\cup[(C\setminus A)\setminus B] \subset \\ &\subset (B\setminus C)\cup(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(C\setminus B) = \\ &= (A\triangle B)\cup(B\triangle C) \end{aligned}$$

per ogni insieme A, B e C e la disuguaglianza triangolare

$$d(E,G) \leq d(E,F) + d(F,G)$$

segue dalla subadditività di λ e di Φ.

(b) Non c'è nulla da provare se $\lambda(X) < +\infty$ e l'assero è conseguenza dell'ipotesi che Φ sia un omeomorfismo quando $\lambda(X) = +\infty$.

(c) Siano A, B, C e D insiemi di X. Per l'unione si ha

$$\begin{aligned} (A\cup B)\triangle(C\cup D) &= [(A\cup B)\setminus(C\cup D)]\cup[(C\cup D)\setminus(A\cup B)] = \\ &= [A\setminus(C\cup D)]\cup[B\setminus(C\cup D)]\cup[C\setminus(A\cup B)]\cup[D\setminus(A\cup B)] \subset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\subset (A \setminus C) \cup (B \setminus D) \cup (C \setminus A) \cup (D \setminus B) = \\ &= (A \triangle C) \cup (B \triangle D) \end{aligned}$$

cosicché la disuguaglianza

$$d(E \cup F), (G \cup H) \leq d(E, G) + d(F, H), \qquad E, F, G, H \in S(\lambda),$$

segue nuovamente dalla subadditività di λ e di Φ. In maniera analoga per le restanti operazioni insiemistiche $\odot \in \{\cap, \setminus, \triangle\}$ di intersezione, differenza e differenza simmetrica si prova che risulta

$$(A \odot B) \triangle (C \odot D) \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle D)$$

per tutti gli insiemi da cui seguono le altre disuguaglianze come prima. □

Teorema 4.28. *Sia d la metrica su $S(\lambda)$ definita da $(*)$. Allora,*

(a) *$(S(\lambda), \triangle)$ munito della metrica d è un gruppo abeliano topologico e la metrica d è invariante:*

$$d(E \triangle G, F \triangle G) = d(E, F), \qquad E, F, G \in S(\lambda);$$

(b) *lo spazio metrico $S(\lambda)$ è completo;*

(c) *per ciascuna operazione insiemistica $\odot \in \{\cup, \cap, \setminus, \triangle\}$ la funzione*

$$(E, F) \in S(\lambda) \times \mathcal{S}(\lambda) \mapsto E \odot F$$

è continua nella topologia prodotto di $S(\lambda) \times S(\lambda)$.

Dimostrazione. (a) Siano E e F due insiemi di $S(\lambda)$ e siano $\{E_n\}_n$ e $\{F_n\}_n$ due successioni di insiemi di $S(\lambda)$ tali che $E_n \to E$ e $F_n \to F$ in $S(\lambda)$ per $n \to +\infty$. Risulta allora

$$d\big((E_n \triangle F_n), (E \triangle F)\big) \leq d(E_n, E) + d(F_n, F)$$

(Proposizione 4.27 – (c)) per ogni n e da questa disuguaglianza segue la continuità dell'operazione di gruppo. Poiché la funzione che associa ad ogni elemento di $S(\lambda)$ il suo opposto non è altro che l'identità, il gruppo abeliano $S(\lambda)$ con la metrica d risulta essere un gruppo abeliano topologico.

Per l'associatività e la commutatività dell'operazione di gruppo risulta

$$(A \triangle C) \triangle (B \triangle C) = A \triangle B$$

per tutti gli insiemi A, B e C e da ciò segue l'invarianza della metrica d.

(b) Sia $L(\lambda)$ lo spazio vettoriale delle (classi di equivalenza di) funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili a valori complessi (Sezione 2.5). La funzione $T \colon S(\lambda) \to L(\lambda)$ definita da

$$T(E) = 1_E, \qquad E \in S(\lambda),$$

è ben definita e, poiché risulta

$$\inf \big\{ t + \lambda \left(\{ |1_E - 1_F| \geq t \} \right) \, : \, t > 0 \big\} = \lambda(E \triangle F)$$

per ogni coppia di insiemi $E, F \in S(\lambda)$, la funzione T risulta essere un'isometria di $S(\lambda)$ a valori in $L(\lambda)$ pur di definire la metrica d di $L(\lambda)$ definita da $(*)$ di Sezione 2.5 e la metrica d di $S(\lambda)$ mediante il medesimo omeomorfismo crescente e subadditivo Φ. Poiché l'insieme

$$T\big(S(\lambda)\big) = \big\{ f \in L(\lambda) : \, f(x) \in \{0, 1\} \text{ per } \lambda\text{– q.o. } x \in X \big\}$$

è evidentemente chiuso per la convergenza in λ – misura (Corollario 2.74 e Proposizione 2.64), la conclusione segue dal teorema di Riesz (Teorema 2.81).

(c) Segeu direttamente da Proposizione 4.27 – (c). □

Concludiamo l'esame delle proprietà dello spazio metrico $S(\lambda)$ fornendo condizioni sufficienti affinché esso risulti separabile.

Teorema 4.29. *Sia* $\lambda(X) < +\infty$ *e sia* $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ *una collezione di insiemi tali che*

- $\mathcal{C}$ *è (al più) numerabile;*
- $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{C})$.

Allora, lo spazio metrico $S(\lambda)$ *è separabile.*

Lo stesso risultato vale anche nel caso in cui la $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ sia il completamento della $\sigma-$algebra $\sigma(\mathcal{C})$ e λ sia il completamento della sua restrizione λ' a $\sigma(\mathcal{C})$ (Proposizione 1.28). In tal caso infatti gli spazi metrici $S(\lambda)$ e $S(\lambda')$ risultano evidentemente isometricamente isomorfi.
Una misura positiva λ su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di sottosieme di X per la quale lo spazio metrico $S(\lambda)$ sia separabile si dice *misura positiva separabile.* Nelle ipotesi del teorema o dell'osservazione successiva la misura λ è quindi separabile.

Dimostrazione. Poiché λ è finita si ha

$$d(E,F) = \lambda(E \triangle F), \qquad E,F \in S(\lambda).$$

Sia quindi $\mathcal{A}$ l'algebra generata da $\mathcal{C}$. Allora $\mathcal{A}$ è formata dagli insiemi A che sono unione finita di insiemi disgiunti E della forma

$$E = C_1 \cup \cdots \cup C_n$$

con $C_m \in \mathcal{C}$ o $C_m^c \in \mathcal{C}$ per ogni m (Esercizio 1.1). Quindi $\mathcal{A}$ è numerabile e chiaramente risulta $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{S}$.
Proviamo ora che la collezione di insiemi

$$\mathcal{S}' = \big\{E \in \mathcal{S} : \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A_\varepsilon \in \mathcal{A} \text{ tale che } \lambda(E \triangle A_\varepsilon) \le \varepsilon\big\}$$

è una $\sigma-$algebra. Da $X \in \mathcal{A}$ segue $X \in \mathcal{S}'$ e per ogni $E \in \mathcal{S}$ e $A \in \mathcal{A}$ si ha

$$E \triangle A = E^c \triangle A^c$$

cosicché $E \in \mathcal{S}'$ se e solo se $E^c \in \mathcal{S}'$. Infine, siano $E_k \in \mathcal{S}'$ $(k \ge 1)$ e sia $E = \bigcup_k E_k$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $k_0 = k_0(\varepsilon) \ge 1$ tale che risulti

$$\lambda\big(E \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{k_0})\big) \le \varepsilon/2$$

e per ogni $k = 1, \ldots, k_0$ sia $A_k \in \mathcal{A}$ tale che risulti $\lambda(E_k \triangle A_k) \le \varepsilon/(2k_0)$. Posto allora

$$A_\varepsilon = A_1 \cup \cdots \cup A_{k_0}$$

risulta $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ poiché $\mathcal{A}$ è un'algebra e da

$$E \triangle A_\varepsilon \subset \left(\bigcup_{1 \le k \le k_0} E_k \triangle A_k \right) \cup \big(E \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{k_0})\big)$$

segue $\lambda(E \triangle A_\varepsilon) \le \varepsilon$ per subadditività. Quindi risulta $E \in \mathcal{S}'$ e dunque $\mathcal{S}'$ è una $\sigma-$algebra. Infine, da $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}'$ e $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{A})$ segue $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ e questo prova che $S(\lambda)$ è separabile. □

Il risultato precedente non si estende a misure $\sigma-$finite.

Esempio 4.30. La $\sigma-$algebra $\mathcal{P}(\mathbb{N}_+)$ delle parti di $\mathbb{N}_+$ è generata dalla famiglia numerabile di insiemi $\{\{n\} : n \ge 1\}$ e per la misura del conteggio $\#$ su $\mathbb{N}_+$ si ha

$$E, F \subset \mathbb{N}_+ \text{ e } E \ne F \qquad \Longrightarrow \qquad d(E,F) \ge \Phi(1) > 0.$$

Poiché i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ sono in quantità non numerabile, lo spazio metrico $S(\lambda)$ contiene una famiglia non numerabile di aperti (non vuoti) disgiunti e quindi non è separabile. □

Sia ora $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ una misura reale o complessa su $\mathcal{S}$. Si ha

$$\mu \ll \lambda \qquad \iff \qquad \mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$$

(Teorema 4.18) e ogni misura reale o complessa siffatta definisce una funzione da $S(\lambda)$ in $\mathbb{K}$ che denotiamo con lo stesso simbolo. In particolare, per tali misure ha senso parlare di continuità come continuità della corrispondente funzione indotta su $S(\lambda)$ e il risultato seguente caratterizza le misure assolutamente $\lambda-$continue in termini di uniforme continuità della corrispondente funzione sul gruppo topologico $S(\lambda)$.

TEOREMA 4.31. *Siano $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su $\mathcal{S}$ e $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ una misura reale o complessa su $\mathcal{S}$. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) $\mu \ll \lambda$;
(b) μ *è continua in $\varnothing$ nella metrica d di $S(\lambda)$;*
(c) μ *è uniformemente continua nella metrica d di $S(\lambda)$.*

In particolare, il sottospazio

$$\mathcal{M}(\lambda) = \big\{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S}) : \mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)\big\}$$

di $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ formato dalle misure complesse si $\mathcal{S}$ che sono assolutamente $\lambda-$continue si identifica con il sottospazio dello spazio $C(S(\lambda))$ delle funzioni continue su $S(\lambda)$ formato dalle funzioni che sono finitamente additive[4].

DIMOSTRAZIONE. Sia Φ l'omeomorfismo subadditivo e crescente che definisce la metrica d di $S(\lambda)$ in $(*)$.
(a) Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Esiste allora $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$ tale che risulti

$$E \in \mathcal{S} \text{ con } \lambda(E) \le \delta' \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(E)| \le \varepsilon.$$

Posto $\delta = \Phi(\delta') > 0$, risulta $\lambda(E) \le \delta'$ per ogni $E \in S(\lambda)$ con $d(E,\varnothing) \le \delta$ e da ciò segue

$$E \in S(\lambda) \text{ e } d(E,\varnothing) \le \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(E)| \le \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε, la misura μ risulta continua nel punto $\varnothing$ come funzione da $S(\lambda)$ a valori complessi.
(b) Sia $\varepsilon > 0$ fissato e sia $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che risulti

$$E \in S(\lambda) \text{ e } d(E,\varnothing) \le \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(E)| \le \varepsilon/2.$$

Per l'invarianza della metrica d risulta $d(E,F) = d(E\triangle F,\varnothing)$ per ogni coppia di insiemi $E,F \in S(\lambda)$ cosicché per la definizione stessa di d risulta

$$d(E,F) \le \delta \implies d(E\triangle F,\varnothing) \le \delta \implies d(E\setminus F,\varnothing) \le \delta \text{ e } d(E\setminus F,\varnothing) \le \delta.$$

Si ha allora

$$|\mu(E) - \mu(F)| \le |\mu(E\setminus F)| + |\mu(F\setminus E)| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

per ogni coppia di insiemi $E,F \in S(\lambda)$ tali che $d(E,F) \le \delta$ e dall'arbitrarietà $\varepsilon > 0$ segue l'asserto.
(c) La funzione μ è in particolare continua nel punto $\varnothing$ come funzione da $S(\lambda)$ a valori in $\mathbb{K}$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste allora $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$ tale che risulti

$$E \in S(\lambda) \text{ e } d(E,\varnothing) \le \delta' \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(E)| \le \varepsilon.$$

Posto $\delta = \Phi^{-1}(\delta') > 0$, risulta allora $d(E,\varnothing) \le \delta'$ per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ tale che $\lambda(E) \le \delta$ e da ciò segue $|\mu(E)| \le \varepsilon$. Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, la misura μ risulta dunque assolutamente $\lambda-$continua. $\square$

[4] La definizione di misura reale o complessa finitamente additiva è evidente alla luce di Definizione 1.17. Sulle misure complesse finitamente additive ritorneremeo nella sezione successiva

Il risultato precedente si estende agli insiemi di misure reali o complesse per i quali introduciamo la definizione seguente.

Definizione 4.32. Un insieme $M \subset \mathcal{M}(\mathcal{S})$ di misure reali o complesse su $\mathcal{S}$ per cui valga la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$E \in \mathcal{S} \text{ e } \lambda(E) \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(E)| \leq \varepsilon \qquad \forall\, \mu \in M$$

si dice *insieme assolutamente* λ *– equicontinuo* di misure reali o complesse. □

Equivalentemente, le misure di M si dicono *assolutamente* λ *– equicontinue.*
In analogia con il teorema precedente, è possibile caratterizzare gli insiemi di misure assolutamente equicontinui rispetto ad una misura positiva fissata λ in termini di equicontinuità delle corrispondenti funzioni sul gruppo topologico $S(\lambda)$. L'estensione è puramente formale e consiste nel sostituire nella dimostrazione di Teorema 4.31 ad ogni occorrenza di μ l'espressione per ogni $\mu \in M$.

Teorema 4.33. *Siano $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva su $\mathcal{S}$ e $M \subset \mathcal{M}(\mathcal{S})$ un insieme di misure reali o complesse su $\mathcal{S}$. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *M è assolutamente λ – equicontinuo;*
(b) *M è equicontinuo in $\varnothing$ nella metrica d di $S(\lambda)$;*
(c) *M è uniformemente equicontinuo nella metrica d di $S(\lambda)$.*

Teorema di Vitali–Hahn–Saks. Esaminiamo in questa parte alcuni risultati sulla convergenza puntuale di successioni di misure reali o complesse assolutamente continue rispetto ad una misura positiva assegnata. I risultati qui presentati sono strettamente collegati alle proprietà delle funzioni della prima classe di Baire definite su spazi metrici completi (Sezione I–3.1) ed ai risultati della successiva Sezione III–5.3.

Teorema 4.34 (G. Vitali–H. Hahn–S. Saks). *Siano $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva su $\mathcal{S}$ e $\mu_n \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ $(n \geq 1)$ misure reali o complesse su $\mathcal{S}$ tali che*

- *$\mu_n \ll \lambda$ per ogni n;*
- *la successione $\{\mu_n(E)\}_n$ converge per ogni $E \in \mathcal{S}$;*
- *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $E_\varepsilon \in \mathcal{S}$ con $\lambda(E_\varepsilon) < +\infty$ tale che risulti*
$$\sup_n |\mu_n|_{\mathrm{sv}}(X \setminus E_\varepsilon) \leq \varepsilon;$$

e sia $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ la funzione definita da

$$\mu(E) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(E), \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Allora,

(a) *la successione $\{\mu_n\}_n$ è assolutamente λ – equicontinua;*
(b) *$\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ e $\mu \ll \lambda$;*
(c) *$|\mu|_{\mathrm{sv}}(E) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} |\mu_n|_{\mathrm{sv}}(E)$ per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$.*

Questo risultato come il successivo Corollario III–1.51 è sostanzialmente un caso particolare di Teorema I–3.24 e, combinato con il teorema di Radon–Nikodym, può essere interpretato in termini di convergenza di successioni di integrali di funzioni di $L_1(\lambda)$. Svilupperemo queste considerazioni nella successiva Sezione III–5.3.

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che la funzione $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ definita come limite puntuale su $\mathcal{S}$ della successione di misure $\{\mu_n\}_n$ è finitamente additiva su $\mathcal{S}$ nel senso che risulta

$$E, F \in \mathcal{S} \text{ e } E \cap F = \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$$

ed è ben definita su $S(\lambda)$ poiché risulta

$$E, F \in \mathcal{S} \text{ e } E \sim F \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(E) = \mu(F)$$

in conseguenza delle corrispondenti proprietà delle misure μ_n. Continuiamo a denotare come al solito con μ la corrispondente funzione definita su $S(\lambda)$.

(a) L'insieme dei punti di $S(\lambda)$ in cui la successione $\{\mu_n\}_n$ è equicontinua nella metrica d di $S(\lambda)$ è denso in $S(\lambda)$ (Teorema I–3.24). Siano quindi $E_0 \in S(\lambda)$ e $r > 0$ tali che

$$E \in S(\lambda) \text{ e } d(E, E_0) \le r \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu_n(E) - \mu_n(E_0)| \le \varepsilon/2 \qquad \forall\, n \ge 1.$$

Consideriamo ora un insieme $E \in S(\lambda)$ tale che $d(E, \varnothing) \le r/2$. Si ha allora

$$d(E_0 \cup E, E_0) = d(E_0 \cup E, E_0 \cup \varnothing) \le d(E_0, E_0) + d(E, \varnothing) = d(E, \varnothing) \le r/2;$$
$$d(E_0 \setminus E, E_0) = d(E_0 \setminus E, E_0 \setminus \varnothing) \le d(E_0, E_0) + d(E, \varnothing) = d(E, \varnothing) \le r/2;$$

(Proposizione 4.27) scosicché risulta

$$|\mu_n(E \cup E_0) - \mu_n(E_0)| \le \varepsilon/2 \qquad \text{e} \qquad |\mu_n(E_0 \setminus E) - \mu_n(E_0)| \le \varepsilon/2$$

per ogni insieme $E \in S(\lambda)$ tale che $d(E, \varnothing) \le r/2$ e per ogni n. Poiché risulta

$$E = (E \cup E_0) \setminus (E_0 \setminus E),$$

si ha

$$\begin{aligned} |\mu_n(E)| &= \bigl|\mu_n\bigl((E \cup E_0) \setminus (E_0 \setminus E)\bigr) + \mu_n(E_0) - \mu_n(E_0)\bigr| = \\ &= |\mu_n(E \cup E_0) - \mu_n(E_0 \setminus E) + \mu_n(E_0) - \mu_n(E_0)| \le \\ &\le |\mu_n(E \cup E_0) - \mu_n(E_0)| + |\mu_n(E_0 \setminus E) - \mu_n(E_0)| \le \\ &\le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

per ogni insieme E tale che $d(E, \varnothing) \le r/2$ e per ogni n. La successione $\{\mu_n\}_n$ è dunque equicontinua in $\varnothing$ nella metrica di $S(\lambda)$ e quindi anche assolutamente $\lambda-$equicontinua (Teorema 4.33).

(b) Poichè la successione $\{\mu_n\}_n$ è assolutamente $\lambda-$equicontinua, essa è anche equicontinua in $\varnothing$ nella metrica d di $S(\lambda)$ (Teorema 4.33) e quindi la funzione limite μ è continua in $\varnothing$ nello stesso senso.
Resta dunque da provare soltanto la numerabile additività di μ. Siano dunque $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \ge 1)$ insiemi disgiunti e sia $E = \bigcup_n E_n$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $E_\varepsilon \in \mathcal{S}$ un insieme tale che risulti

$$\lambda(E_\varepsilon) < +\infty \qquad \text{e} \qquad \sup_n |\mu_n|_{\mathrm{sv}}(X \setminus E_\varepsilon) \le \varepsilon/2$$

cosicché si ha

$$(**) \qquad |\mu(F)| \le \varepsilon/2, \qquad F \in \mathcal{S} \text{ e } F \subset X \setminus E_\varepsilon.$$

Sia $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$ tale che

$$E \in S(\lambda) \text{ e } d(E, \varnothing) \le \delta' \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(E)| \le \varepsilon/2$$

cosicché, posto $\delta = \Phi^{-1}(\delta') > 0$ dove Φ è l'omemorfismo subadditivo e crescente che definisce la metrica d in $(*)$), risulta

$$E \in \mathcal{S} \text{ e } \lambda(E) \le \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(E)| \le \varepsilon/2.$$

Poiché è $\lambda(E_\varepsilon) < +\infty$, esiste $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che risulti

$$\lambda\big((E \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_n)) \cap E_\varepsilon\big) = \lambda(E \cap E_\varepsilon) - \sum_{1 \leq m \leq n} \lambda(E_m \cap E_\varepsilon) \leq \delta$$

per ogni $n \geq n_0$ e da ciò segue

$$\big|\mu\big(E \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_n)) \cap E_\varepsilon\big)\big| \leq \varepsilon/2$$

per gli stessi n. Essendo μ finitamente additiva su $\mathcal{S}$, da questa disuguaglianza e da $(**)$ segue allora

$$\begin{aligned}\left|\mu(E) - \sum_{1 \leq m \leq n} \mu(E_m)\right| &= \\ &= \big|\mu\big(E \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_n)\big)\big| \leq \\ &\leq \big|\mu\big((E \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_n)) \cap E_\varepsilon\big)\big| + \big|\mu\big((E \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_n)) \setminus E_\varepsilon\big)\big| \leq \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

per ogni $n \geq n_0$. Pertanto, μ è una misura reali o complessa di $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ e, essendo μ continua nella metrica d di $S(\lambda)$, risulta $\mu \ll \lambda$ (Teorema 4.31) e questo prova (b).
(c) Sia $E \in \mathcal{S}$ un insieme fissato. Per ogni insieme $F \in \mathcal{S}$ con $F \subset E$ si ha

$$|\mu(F)| = \lim_{n \to +\infty} |\mu_n(F)| \leq \liminf_{n \to +\infty} |\mu_n|_{\mathrm{sv}}(F) \leq \liminf_{n \to +\infty} |\mu_n|_{\mathrm{sv}}(E)$$

cosicchè risulta

$$|\mu|_{\mathrm{sv}}(E) \leq \liminf_{n \to +\infty} |\mu_n|_{\mathrm{sv}}(E)$$

per l'arbitrarietà di $F \subset E$. □

L'equivalenza stabilita dal risultato seguente prende il nome di *principio di uniforme limitatezza di Nikodym.*

Teorema 4.35 (O. Nikodym). *Siano $\mu_i \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ $(i \in I)$ misure reali o complesse su $\mathcal{S}$. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) $\sup_{i \in I} |\mu_i|_{\mathrm{sv}}(X) = +\infty$*;*
(b) *esiste $E \in \mathcal{S}$ tale che $\sup_{i \in I} |\mu_i(E)| = +\infty$.*

Nell'enunciato precedente la cardinalità dell'insieme degli indici I è arbitraria e la condizione di illimitatezza delle semivariazioni espressa da (a) equivale ad avere

$$\sup\{|\mu_i(E)| : E \in \mathcal{S} \text{ e } i \in I\} = +\infty.$$

L'equivalenza stabilita dal principio di uniforme limitatezza è abitualmente declinata nella forma dell'alternativa seguente: o la famiglia di misure reali o complesse $\{\mu_i\}_{i \in I}$ è uniformemente limitata su $\mathcal{S}$ cioè risulta

$$\sup_{i \in I} |\mu_i|_{\mathrm{sv}}(X) \leq M$$

per qualche $M \geq 0$ oppure vale (b) cioè esiste un insieme $E \in \mathcal{S}$ su cui le misure complesse μ_i non restano limitate. Questo risultato ha un corrispettivo per gli operatori lineari limitati tra spazi di Banach (Teorema III–1.50).

Dimostrazione. Proviamo solo che (a) implica (b), essendo il viceversa ovvio. Supponiamo dunque che valga (a) e supponiamo per assurdo che risulti

$$(***) \qquad \varphi(E) = \sup_{i \in I} |\mu_i(E)| < +\infty, \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Da (a) si ricava che per ogni $n \geq 1$ esistono un indice $i_n \in I$ e un insieme $E_n \in \mathcal{S}$ tali che risulti

$$|\mu_{i_n}(E_n)| > n.$$

Poniamo per brevità $\mu_n = \mu_{i_n}$ per ogni indice n e consideriamo quindi la misura positiva $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ su $\mathcal{S}$ definita da

$$\lambda(E) = \sum_{n\geq 1} \frac{|\mu_n|_{\mathrm{tv}}(E)}{2^n |\mu_n|_{\mathrm{tv}}(X)}, \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Risulta allora $\lambda(X) = 1$ cosicché la metrica d dello spazio metrico $S(\lambda)$ risulta in questo caso definita da

$$d(E, F) = \lambda(E \triangle F), \qquad E, F \in S(\lambda).$$

Risulta inoltre $\mu_n \ll \lambda$ per ogni n cosicché la funzione $\varphi\colon S(\lambda) \to [0, +\infty)$ definita da $(*{*}*)$ è semicontinua inferiormente nella metrica d di $S(\lambda)$. Poiché risulta

$$S(\lambda) = \bigcup_j \{\varphi \leq j\},$$

per il teorema di Baire (Terema I–3.23) esistono $j \geq 1$, $E_0 \in S(\lambda)$ e $r > 0$ tali che risulti

$$E \in S(\lambda) \text{ e } d(E, E_0) \leq r \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(E) \leq j$$

e da ciò segue

$$|\mu_n(E)| \leq j$$

per ogni n per gli stessi E cosicché, procedendo come nella dimostrazione del teorema di Vitali–Hahn–Saks (Teorema 4.34), si ricava che risulta

$$E \in \mathcal{S} \text{ e } \lambda(E) \leq r/2 \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu_n(E)| \leq 2j$$

per ogni n.

Sia quindi $\{F_1, \ldots, F_k\}$ una partizione $\mathcal{S}-$misurabile di X tale che per ogni h valga la seguente alternativa: o risulta $\lambda(F_h) \leq r/2$ o F_h è un $\lambda-$atomo (Teorema 1.31) e proviamo che per ogni n e per ogni insieme $A \in \mathcal{S}$ si ha

$$A \ \lambda\text{−atomo} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu_n(F) \in \{0, \mu_n(A)\} \text{ per ogni } F \in \mathcal{S} \text{ con } F \subset A.$$

A tal fine, proviamo dapprima che per $A \in \mathcal{S}$ risulta

$$A \ \lambda\text{−atomo} \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu_n|_{\mathrm{tv}}(A) = 0 \text{ oppure } A \text{ è un } |\mu_n|_{\mathrm{tv}}\text{−atomo}.$$

Sia infatti A un $\lambda-$atomo e sia $F \in \mathcal{S}$ e $F \subset A$. Se fosse $0 < |\mu_n|_{\mathrm{tv}}(F) < |\mu_n|_{\mathrm{tv}}(A)$, si avrebbe $0 < \lambda(F) < \lambda(A)$ e ciò non può essere. Deve quindi essere

$$|\mu_n|_{\mathrm{tv}}(F) \in \{0, |\mu_n|_{\mathrm{tv}}(A)\}$$

per ogni insieme $F \in \mathcal{S}$ con $F \subset A$. Per ogni insieme F siffatto con $\mu_n(F) \neq 0$ deve allora essere $|\mu_n|_{\mathrm{tv}}(A \setminus F)$ e da ciò segue $\mu_n(F) = \mu_n(A)$. Abbiamo così provato che, se $A \in \mathcal{S}$ è un $\lambda-$atomo, risulta $\mu_n(F) = 0$ oppure $\mu_n(F) = \mu_n(A)$ per ogni insieme $F \in \mathcal{S}$ tale che sia $F \subset A$ e per ogni n e da ciò segue in particolare

$$|\mu_n(E \cap F_h)| \leq |\mu_n(F_h)| \leq \varphi(F_h)$$

per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ e per ogni $\lambda-$atomo F_h. Sia quindi $H \subset \{1, \ldots, k\}$ l'insieme degli indici h tali che F_h sia un $\lambda-$atomo. Per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ e per ogni n risulta allora

$$|\mu_n|_{\mathrm{tv}}(E) \leq |\mu_n(E \cap F_1)| + \cdots |\mu_n(E \cap F_k)| =$$

$$= \sum_{h\in H} |\mu_n(E \cap F_h)| + \sum_{h\in\{1,\ldots,k\}\setminus H} |\mu_n(E \cap F_h)| \leq$$

$$\leq \sum_{h\in H} \varphi(F_h) + 2j\,\bigl[k - \operatorname{card}(H)\bigr] < +\infty$$

e ciò è assurdo poiché risulta $|\mu_n(E_n)| > n$ per ogni n. □

Riassumiamo i risultati precedenti relativi ad una successione puntualmente convergente di misure complesse nel seguente *teorema di convergenza di Nikodym.*

TEOREMA 4.36 (O. Nikodym). *Siano $\mu_n \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ $(n \geq 1)$ misure reali o complesse su $\mathcal{S}$ tali che*

- *la successione $\{\mu_n(E)\}_n$ converge per ogni $E \in \mathcal{S}$;*

e sia $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ la funzione definita da

$$\mu(E) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(E), \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Allora,

(a) $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$*;*

(b) $\sup_n |\mu_n|_{\mathrm{sv}}(X) < +\infty$*;*

(c) $|\mu|_{\mathrm{sv}}(E) \leq \liminf_{n\to+\infty} |\mu_n|_{\mathrm{sv}}(E)$ *per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$.*

DIMOSTRAZIONE. La funzione $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ definita da

$$\lambda(E) = \sum_{n\geq 1} \frac{|\mu_n|_{\mathrm{tv}}(E)}{2^n\,\bigl(1 + |\mu_n|_{\mathrm{tv}}(X)\bigr)}, \qquad E \in \mathcal{S},$$

è una misura positiva su $\mathcal{S}$ tale che $\lambda(X) < +\infty$ per la quale risulta $\mu_n \ll \lambda$ per ogni n. La conclusione segue quindi dal teorema di Vitali–Hahn–Saks e dal principio di uniforme limitatezza di Nikodym. □

COROLLARIO 4.37. *Siano $\mu_n \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ $(n \geq 1)$ misure reali o complesse su $\mathcal{S}$ tali che*

- *la successione $\{\mu_n(E)\}_n$ converge per ogni $E \in \mathcal{S}$.*

Allora, per ogni successione di insiemi $E_k \in \mathcal{S}$ $(k \geq 1)$ tali che $E_h \cap E_k = \varnothing$ per $h \neq k$ risulta

$$\lim_{k\to+\infty} \Bigl(\sup_{n\geq 1} |\mu_n(E_k)|\Bigr) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ la misura positiva e finita definita nella dimostrazione del teorema precedente. La successione di misure reali o complesse $\{\mu_n\}_n$ è assolutamente $\lambda-$equicontinua per il teorema di Vitali–Hahn–Saks e quindi da $\lambda(E_k) \to 0$ per $k \to +\infty$ segue l'asserto. □

4.4. Misure reali o complesse finitamente additive

Alcuni dei risultati sulle misure reali o complesse che abbiamo esaminato in questo capitolo si estendono alle misure reali o complesse finitamente additive limitate. Esaminiamo in questa breve sezione alcune proprietà di tali misure e sviluppiamo una appropriata nozione di integrale di funzioni misurabili e limitate rispetto ad esse.

A tal fine, denotiamo con $\mathcal{A}$ un'algebra di sottoinsiemi di un insieme astratto (non vuoto) X che supporremo fissata in tutta questa sezione.

Misure finitamente additive. Una funzione $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ tale che

$$E, F \in \mathcal{A} \text{ e } E \cap F = \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$$

si dice *misura reale o complessa finitamente additiva su $\mathcal{A}$.* Nel caso complesso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ogni misura complessa finitamente additiva μ su $\mathcal{A}$ si esprime evidentemente nella forma $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ con μ_1 e μ_2 misure reali finitamente additive su $\mathcal{A}$.
L'insieme

$$\mathcal{M}_{\mathrm{a}}(\mathcal{A}) = \big\{\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{K} \text{ misura reale o complessa finitamente additiva}\big\}$$

delle misure reali o complesse finitamente additive sull'algebra $\mathcal{A}$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ con le operazioni definite puntualmente.
Una misura reale complessa finitamente additiva $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{a}}(\mathcal{A})$ gode evidentemente delle seguenti proprietà:

- $E, F \in \mathcal{A}$ e $E \subset F \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$;
- $\mu(\varnothing) = 0$.
- $\begin{cases} E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A} \\ E_{m'} \cap E_{m''} = \varnothing \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mu(E_1 \cup \dots \cup E_n) = \mu(E_1) + \dots + \mu(E_n)$;

come in Proposizione 1.18 – (b) e 1.18 – (d).
Un insieme $E \in \mathcal{A}$ si dice

- μ – *trascurabile* se risulta $\mu(F) = 0$ per ogni $F \in \mathcal{A}$ con $F \subset E$;

e la collezione di tutti i sottoinsiemi μ – trascurabili di X si denota come al solito con

$$\mathcal{N}(\mu) = \big\{E \in \mathcal{A} : \ E \ \mu\text{– trascurabile}\big\}\,.$$

Anche la nozione di assoluta continuità di una misura rispetto ad un'altra misura positiva si estende alle misure finitamente additive nel modo ovvio: data una misura positiva finitamente additiva $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, una misura finitamente additiva e positiva $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ o una misura reale o complessa $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{a}}(\mathcal{A})$ si dice *assolutamente λ – continua* o *assolutamente continua rispetto a λ* se vale la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$E \in \mathcal{A} \text{ e } \lambda(E) \le \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(E)| \le \varepsilon$$

nel qual caso si scrive $\mu \ll \lambda$ come al solito. Da $\mu \ll \lambda$ segue $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$ ma non vale il viceversa.
Ogni misura positiva finitamente additiva definita su un'algebra di insiemi è evidentemente limitata. Lo stesso non accade per le misure reali o complesse finitamente additive come prova l'esempio seguente.

Esempio 4.38. Sia $\mathcal{A}$ l'algebra dei sottoinsiemi finiti e cofiniti di un insieme infinito X (Esempio 1.3 – (e)) e sia $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\mu(E) = \begin{cases} \#(E) & \text{se } E \text{ è finito} \\ -\#(E^{\mathrm{c}}) & \text{se } E^{\mathrm{c}} \text{ è finito.} \end{cases}$$

Se $E, F \in \mathcal{A}$ sono insiemi disgiunti, i complementari E^{c} e F^{c} non possono essere entrambi finiti e deve necessariamente accadere che entrambi gli insiemi E e F siano finiti oppure che gli insiemi E e F^{c} (o viceversa) siano finiti. Nel primo caso si ha chiaramente $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$ mentre nell'altro caso si ha

$$\begin{aligned} \mu(E \cup F) &= -\#\big((E \cup F)^{\mathrm{c}}\big) = -\#(E^{\mathrm{c}} \cap F^{\mathrm{c}}) = \\ &= -\big[\#(F^{\mathrm{c}}) - \#(E)\big] = \#(E) - \#(F^{\mathrm{c}}) = \mu(E) + \mu(F). \end{aligned}$$

Quindi μ è una misura reale finitamente additiva su μ che è chiaramente illimitata. □

Motivati dall'esempio precedente, denotiamo con

$$\mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{A}) = \big\{\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{a}}(\mathcal{A}) :\ \mu \text{ limitata}\big\}$$

il sottospazio di $\mathcal{M}_{\mathrm{a}}(\mathcal{A})$ formato dalle misure reali o complesse finitamente additive che sono limitate sull'algebra $\mathcal{A}$. In analogia con quanto fatto per le misure reali o complesse numerabilmente additive, per ogni misura reali o complessa finitamente additiva e limitata $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{A})$, denotiamo con

$$|\mu|_{\mathrm{sv}}(E) = \sup\big\{|\mu(F)| :\ F \in \mathcal{A} \text{ con } F \subset E\big\}, \qquad E \in \mathcal{A},$$

la *semivariazione di* μ e con

$$|\mu|_{\mathrm{tv}}(E) = \sup\left\{\sum_n |\mu(E_n)| :\ \{E_1, \ldots, E_n\} \subset \mathcal{A} \text{ partizione finita di } E\right\}, \ \ E \in \mathcal{A},$$

la *variazione totale di* μ. Con la stessa dimostrazione già vista (Teorema 4.5) si verifica che risulta

$$|\mu|_{\mathrm{sv}}(E) \le |\mu|_{\mathrm{tv}}(E) \le c|\mu|_{\mathrm{sv}}(E), \qquad E \in \mathcal{S},$$

con $c = 2$ o $c = 4$ a seconda che sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e che la variazione totale $|\mu|_{\mathrm{tv}}$ è una misura positiva finitamente additiva e limitata su $\mathcal{S}$. Inoltre, $|\mu|_{\mathrm{tv}}$ è la più piccola misura positiva finitamente additiva che controlla μ nel senso che risulta

$$|\mu(E)| \le |\mu|_{\mathrm{tv}}(E), \qquad E \in \mathcal{A}.$$

Anche in questo caso le funzioni

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{sv}}(\mu_1, \mu_2) &= |\mu_1 - \mu_2|_{\mathrm{sv}}(X) \\ d_{\mathrm{tv}}(\mu_1, \mu_2) &= |\mu_1 - \mu_2|_{\mathrm{tv}}(X) \end{aligned} \qquad \mu_j \in \mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{A}) \quad (j = 1, 2),$$

sono metriche equivalenti su $\mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{A})$ che prendono il nome di *metrica della semivariazione* e *metrica della variazione totale* rispettivamente e dalla prima parte della dimostrazione di Teorema 4.6 si ricava che lo spazio metrico $\mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{A})$ risulta essere completo[5] rispetto ad esse.

TEOREMA 4.39. *Sia d la metrica della semivariazione o della variazione totale. Allora, lo spazio metrico $(\mathcal{M}_{ba}(\mathcal{A}), d)$ è completo.*

Integrazione rispetto a misure finitamente additive limitate. Sia $f\colon X \to \mathbb{K}$ una funzione limitata. In analogia con la definizione di funzione misurabile rispetto ad una $\sigma-$algebra (Definizione 2.1), la funzione f si dice $\mathcal{A}-$*misurabile* se risulta

$$B \in \mathcal{B}(\mathbb{K}) \qquad \Longrightarrow \qquad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

e con la stessa dimostrazione di Teorema 2.9 si prova che ogni funzione limitata e misurabile rispetto ad un'algebra di insiemi si approssima uniformemente mediante funzioni semplici e misurabili nello stesso senso.

PROPOSIZIONE 4.40. *Sia $f\colon X \to \mathbb{K}$ una funzione $\mathcal{A}-$misurabile e limitata. Allora, esistono funzioni semplici $\mathcal{A}-$misurabili $s_n\colon X \to \mathbb{K}$ $(n \ge 1)$ tali che*

(a) $|s_n| \le |f|$ *per ogni* n;
(b) $s_n \to f$ *uniformemente su* X *per* $n \to +\infty$.

[5] Come già osservato, nel linguaggio del successivo Capitolo III–1, la semivariazione e la variazione totale sono norme equivalenti su $\mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{A})$ che risulta essere uno spazio di Banach.

Consideriamo ora una misura reale o complessa finitamente additiva e limitata $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{A})$ e una funzione $s\colon X \to \mathbb{K}$ semplice e $\mathcal{A}-$misurabile che supponiamo rappresentata dalla formula

$$s = \alpha_1 1_{A_1} + \cdots + \alpha_k 1_{A_k}$$

con coefficienti $\alpha_h \in \mathbb{K}$ e insiemi $A_h \in \mathcal{A}$ $(h = 1, \ldots, k)$. Per ogni insieme $E \in \mathcal{A}$, il numero

$$\int_E s\, d\mu = \alpha_1 \mu(E \cap A_1) + \cdots + \alpha_k \mu(E \cap A_k)$$

si dice *integrale di s su $E \in \mathcal{A}$ rispetto a μ* e, ragionando come in Lemma 2.15, si verifica che esso è indipendente dalla rappresentazione della funzione semplice s utilizzata. La definizione di integrale rispetto a una misura reale o complessa finitamente additiva e limitata si estende alle funzioni limitate misurabili rispetto ad un'algebra di insiemi sulla base del risultato seguente.

LEMMA 4.41. *Sia $\mu \in \mathcal{M}_{ba}(\mathcal{A})$ una misura reale o complessa finitamente additiva e limitata e siano $s\,, t\colon X \to \mathbb{K}$ due funzioni semplici e $\mathcal{A}$ – misurabili. Allora,*

$$\left| \int_E s\, d\mu - \int_E t\, d\mu \right| \le |\mu|_{\mathrm{tv}}(E) \sup_{x \in E} |s(x) - t(x)|, \qquad E \in \mathcal{A}.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano s e t rappresentate da

$$s = \alpha_1 1_{A_1} + \cdots + \alpha_k 1_{A_k} \qquad \text{e} \qquad t = \beta_1 1_{B_1} + \cdots + \beta_k 1_{B_j}$$

con coefficienti $\alpha_h, \beta_i \in \mathbb{K}$ e insiemi $A_h, B_i \in \mathcal{A}$ $(h = 1, \ldots, k$ e $i = 1, \ldots, j)$. Non è restrittivo supporre che ciascuna delle famiglie di insiemi $\{A_1, \ldots, A_k\}$ e $\{B_1, \ldots, B_j\}$ sia una partizione $\mathcal{A}-$misurabile di X. Si ha allora

$$\begin{aligned}
\left| \int_E s\, d\mu - \int_E t\, d\mu \right| &= \left| \sum_h \alpha_h \mu(E \cap A_h) - \sum_i \beta_i \mu(E \cap B_i) \right| = \\
&= \left| \sum_{h,i} \alpha_h \mu(E \cap A_h \cap B_i) - \sum_{i,h} \beta_i \mu(E \cap A_h \cap B_i) \right| \le \\
&\le \sum_{i,h} |\alpha_h - \beta_i| |\mu(E \cap A_h \cap B_i)| \le
\end{aligned}$$

e, poiché contano solo le differenze $|\alpha_h - \beta_i|$ corrispondenti a punti $x \in E$, risulta

$$\begin{aligned}
&\le \sum_{i,h} |\mu(E \cap A_h \cap B_i)| \sup_{x \in E} |s(x) - t(x)| \le \\
&\le |\mu|_{\mathrm{tv}}(E) \sup_{x \in E} |s(x) - t(x)|
\end{aligned}$$ □

Sia quindi $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{A})$ una fissata misura reale o complessa finitamente additiva e limitata come prima e siano $f\colon X \to \mathbb{K}$ una funzione $\mathcal{A}-$misurabile e limitata e $s_n\colon X \to \mathbb{C}$ $(n \ge 1)$ gli elementi di una successione di funzioni semplici e $\mathcal{A}-$misurabili che approssimano f come in Proposizione 4.40. Allora, per ogni insieme $E \in \mathcal{A}$ la successione degli integrali

$$\int_E s_n\, d\mu, \qquad n \ge 1,$$

verifica la condizione di Cauchy uniformemente rispetto ad $E \in \mathcal{A}$ (Lemma 4.41): per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 = n_0(\varepsilon) \ge 1$ tale che

$$m, n \ge n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left| \int_E s_n\, d\mu - \int_E s_m\, d\mu \right| \le \varepsilon \qquad \forall\, E \in \mathcal{A}$$

e quindi il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E s_n\,d\mu, \qquad E\in\mathcal{A},$$

esiste uniformemente rispetto ad $E \in \mathcal{A}$ e tale limite risulta indipendente dalla scelta della successione di funzioni semplici e $\mathcal{A}-$misurabili $\{s_n\}_n$ che approssima f (Lemma 4.41).
Data una funzione $\mathcal{A}-$misurabile e limitata $f\colon X\to\mathbb{K}$ definiamo quindi l'*integrale di f rispetto a μ su $E\in\mathcal{A}$* ponendo

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_E s_n\,d\mu \qquad E\in\mathcal{A},$$

ove $\{s_n\}_n$ è una qualunque successione di funzioni semplici e $\mathcal{A}-$misurabili $\{s_n\}_n$ che approssimano f come in Proposizione 4.40.
È facile verificare che le definizioni di integrale per funzioni semplici e $\mathcal{A}-$misurabili e per funzioni $\mathcal{A}-$misurabili e limitate sono consistenti tra loro e che, quando $\mu\in\mathcal{M}(\mathcal{S})$ è una misura reale o complessa (numerabilmente additiva) su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X, la definizione di integrale di una funzione $\mathcal{S}-$misurabile e limitata $f\colon X\to\mathbb{K}$ qui introdotta coincide con la definizione di Sezione 4.1.
Concludiamo questa parte riassumendo nell'elenco seguente le principali proprietà dell'integrale rispetto ad una misura reale o complessa finitamente additiva e limitata $\mu\in\mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{A})$. A tal fine, siano $f\,,g\colon X\to\mathbb{K}$ due funzioni $\mathcal{A}-$misurabili e limitate ed $E\,,F\in\mathcal{A}$ due insiemi $\mathcal{A}-$misurabili. Valgono allora le seguenti proprietà la cui dimostrazione si ricava facilmente dalla definizione di inttegrale:

- $\displaystyle\int_E f\,d\mu = \int_X f1_E\,d\mu;$
- $\displaystyle f=0 \text{ su } E \quad\Longrightarrow\quad \int_E f\,d\mu = 0;$
- $\displaystyle |\mu|_{\mathrm{tv}}(E)=0 \quad\Longrightarrow\quad \int_E f\,d\mu = 0;$
- $\displaystyle\int_E(\alpha f+\beta g)\,d\mu = \alpha\int_E f\,d\mu+\beta\int_E g\,d\mu, \qquad \alpha\,,\beta\in\mathbb{K};$
- $\displaystyle\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \int_X |f|\,d|\mu|_{\mathrm{tv}};$
- $\displaystyle E\cap F=\varnothing \quad\Longrightarrow\quad \int_{E\cup F} f\,d\mu = \int_E f\,d\mu+\int_F f\,d\mu;$
- $\displaystyle \{f\neq g\}\in\mathcal{N}(\mu) \quad\Longrightarrow\quad \int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu.$

Inoltre, nel caso particolare in cui le funzioni fe g siano a valori non negativi e la misura finitamente additiva μ sia in effetti una misura positiva finitamente additiva su $\mathcal{A}$, risulta ovviamente

- $\displaystyle f\le g \text{ su } E \quad\Longrightarrow\quad \int_E f\,d\mu \le \int_E g\,d\mu.$

Non hanno invece analogo per l'integrale rispetto a una misura finitamente additiva e limitata qui considerato tutte quelle proprietà dell'integrale rispetto a misure reali o complesse (numerabilmente additive) che sono legate alla numerabile additività della misura, tra cui in particolare i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Esercizi

4.1. Una funzione $\mu\colon \mathcal{S} \to (-\infty, +\infty]$ definita su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X tale che

- $\mu(\varnothing) = 0$;
- $E_n \in \mathcal{S}$ e $E_m \cap E_n = \varnothing$ per $m \neq n \quad \Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n)$;

si dice *misura con segno*. Provate che, se μ è una misura siffatta,

(a) $E \in \mathcal{S}$ e $\mu(E) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mu(F) < +\infty$ per ogni $F \in \mathcal{S}$ con $F \subset E$;
(b) $\inf\{\mu(E) : E \in \mathcal{S}\} > -\infty$;
(c) esiste una decomposizione di Hahn (X^+, X^-) di X rispetto a μ[6].

4.2. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e siano $\mu, \lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ due misure positive di Radon in X $\sigma-$finite. Provate che la parte assolutamente μ_{ac} e la parte singolare μ_{s} della decomposizione di Lebesgue di μ rispetto a λ sono misure di Radon in X.

4.3. Sia $\mathcal{S}$ una $\sigma-$algebra di insiemi di X e siano $\mu, \lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ due misure positive tali che $\mu(X) < +\infty$ e $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$.
Provate che esiste una partizione $\{P, N\} \subset \mathcal{S}$ di X tale che

(a) $E \in \mathcal{S}$ e $E \subset P \quad \Longrightarrow \quad \mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda(E) = 0 \\ +\infty & \text{se } \lambda(E) > 0; \end{cases}$
(b) N è $\sigma-$finito rispetto a μ.

4.4. Sia $\mathcal{S}$ una $\sigma-$algebra di insiemi di X e siano $\mu, \lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ due misure positive con λ $\sigma-$finita tali che $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$. Provate che

(a) esiste $f\colon X \to [0, +\infty]$ $\mathcal{S}-$misurabile tale che
$$\mu(E) = \int_E f\, d\lambda, \qquad E \in \mathcal{S};$$
(b) se $f, g\colon X \to [0, +\infty]$ sono funzioni $\mathcal{S}-$misurabili tali che
$$\int_E f\, d\lambda = \mu(E) = \int_E g\, d\lambda, \qquad E \in \mathcal{S},$$
si ha $f = g$ $\lambda-$quasi ovunque su X.

4.5. Siano X uno spazio di Hausdorff localmente compatto e $\mu, \nu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ due misure positive di Radon in X con ν $\sigma-$finita e sia
$$\mu = \mu_{\mathrm{ac}} + \mu_{\mathrm{s}}$$
la decomposizione di Lebesgue di μ rispetto a ν. Provate che μ_{ac} e μ_{s} sono misure positive di Radon in X.

4.6. Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di insiemi di X e siano $\mu_n \in \mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{A})$ $(n \geq 1)$ e $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{A})$ misure reali o complesse finitamente additive limitate tali che $\mu_n \to \mu$ in $\mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{A})$ per $n \to +\infty$. Provate che $|\mu_n|_{\mathrm{tv}} \to |\mu|_{\mathrm{tv}}$ in $\mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{A})$ per $n \to +\infty$.

---

[6] La definizione di decomposizione di Hahn è la stessa già vista per le misure reali: gli insiemi $X^{\pm}$ sono $\mu-$positivi e $\mu-$negativi rispettivamente con lo stesso significato già introdotto.

CAPITOLO 5

Misura e integrazione in $\mathbb{R}^N$

Costruiamo finalmente in questo capitolo la σ – algebra e la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ e ne esaminiamo le principali proprietà. La costruzione qui presentata è basata sui metodi di Carathéodory esaminati in Sezione 1.3 ma è indipendente dai risultati del Capitolo 3 sulle proprietà delle misure di Radon. Sviluppiamo quindi i principali risultati relativi all'integrazione delle funzioni definite su insiemi di $\mathbb{R}^N$ con particolare riguardo alla relazione tra integrazione secondo Lebesgue e secondo Riemann ed alle formule di riduzione e di cambiamento di variabili per gli integrali. Esaminiamo inoltre il problema dell'esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue o secondo Borel.

5.1. La misura di Lebesgue

Definiamo in questa sezione la σ – algebra e la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ utilizzando i metodi di Carathéodory descritti in Sezione 1.3 e ne esaminiamo le principali proprietà. Esaminiamo inoltre alcuni esempi importanti di insiemi Lebesgue misurabili.

Misura di Lebesgue e sue proprietà. Sia R un rettangolo compatto di $\mathbb{R}^N$ avente i lati paralleli agli assi coordinati:

$$(*) \qquad R = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^N, b^N]$$

con $a^n \leq b^n$ $(n = 1, \ldots, N)$. Il rettangolo R si dice *non degenere* se risulta $\mathrm{int}(R) \neq \varnothing$. Per ogni rettangolo R della forma $(*)$ definiamo il *volume N – dimensionale di R* ponendo

$$V_N(R) = \prod_{1 \leq n \leq N} (b^n - a^n)\,.$$

Denotiamo quindi con

$$\mathcal{R} = \{\varnothing\} \cup \big\{R : \ R \text{ rettangolo compatto non degenere della forma } (*)\big\}$$

la collezione di insiemi costituita dall'insieme vuoto e dai rettangoli compatti e non degeneri di $\mathbb{R}^N$ aventi i lati paralleli agli assi coordinati ed estendiamo la definizione di volume N – dimensionale anche all'insieme vuoto ponendo per convenzione $V_N(\varnothing) = 0$. Nella terminologia di Sezione 1.3 la collezione di insiemi $\mathcal{R}$ è un ricoprimento elementare fine di $\mathbb{R}^N$.
Possiamo ora definire la σ – algebra e la misura esterna di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$.

Definizione 5.1. La funzione $\mathcal{L}^N \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, +\infty]$ definita da

$$\mathcal{L}^N(A) = \inf \left\{ \sum_j V_N(R_j) : \ A \subset \bigcup_j R_j \text{ e } R_j \in \mathcal{R} \text{ per } j \geq 1 \right\}, \qquad A \subset \mathbb{R}^N,$$

si dice *misura esterna di Lebesgue di* $\mathbb{R}^N$ e la collezioni di insiemi

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \big\{E : \ \mathcal{L}^N(A) = \mathcal{L}^N(A \cap E) + \mathcal{L}^N(A \setminus E) \text{ per ogni } A \subset \mathbb{R}^N\big\}$$

si dice *σ – algebra di Lebesgue di* $\mathbb{R}^N$. □

Alla luce dei risultati di Sezione 1.3, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è effettivamente una $\sigma-$algebra di insiemi di $\mathbb{R}^N$ (Teorema 1.37) i cui elementi si dicono *insiemi Lebesgue misurabili di* $\mathbb{R}^N$ e $\mathcal{L}^N$ è effettivamente una misura esterna in $\mathbb{R}^N$ la cui restrizione alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è una misura positiva che chiamiamo *misura di Lebesgue in* $\mathbb{R}^N$ e che continuiamo per semplicità a denotare[1] con $\mathcal{L}^N$. Quando poi non vi sia ambiguità su quale sia lo spazio euclideo ambiente, scriveremo brevemente

$$|E| = \mathcal{L}^N(E), \qquad E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

per la misura di Lebesgue e analogamente scriveremo

$$|A|_* = \mathcal{L}^N(A), \qquad A \subset \mathbb{R}^N,$$

per indicare la misura esterna di Lebesgue di un insieme A non necessariamente misurabile secondo Lebesgue.
Chiamiamo inoltre *Lebesgue trascurabili in* $\mathbb{R}^N$ gli insiemi $\mathcal{L}^N-$trascurabili e denotiamo con $\mathcal{N}(\mathbb{R}^N)$ la collezione di tali insiemi. Nel seguito parleremo brevemente di proprietà vere quasi ovunque anziché $\mathcal{L}^N-$quasi ovunque ogni qual volta non vi sia ambiguità.
Il teorema seguente riassume le principali proprietà della $\sigma-$algebra e della misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$ che la individuano univocamente (Teorema 5.9).

TEOREMA 5.2. *Siano $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ la $\sigma-$algebra di Lebesgue e $\mathcal{L}^N$ la misura esterna di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$. Allora,*

(a) *la restrizione di $\mathcal{L}^N$ a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è una misura positiva di Borel in $\mathbb{R}^N$ completa tale che*
- *K compatto $\quad\Longrightarrow\quad \mathcal{L}^N(K) < +\infty$;*
- *per ogni $E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ esiste un insieme di Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ tale che*

$$E \subset B \qquad e \qquad \mathcal{L}^N(E) = \mathcal{L}^N(B);$$

(b) *per ogni insieme $A \subset \mathbb{R}^N$ e per ogni vettore $x \in \mathbb{R}^N$ si ha*
- *$\mathcal{L}^N(A) = \mathcal{L}^N(A + x)$;*
- *$A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \quad\Longleftrightarrow\quad A + x \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$;*

(c) *$\mathcal{L}^N(R) = V_N(R)$ per ogni rettangolo compatto R della forma $(*)$.*

La prima affermazione (a) garantisce che la $\sigma-$algebra di Lebesgue sia sufficientemente ricca poiché contiene tutti gli insiemi di Borel di $\mathbb{R}^N$ e quindi in particolare tutti gli insiemi topologicamente significativi e che la misura di Lebesgue sia completa, finita sui compatti e quindi anche $\sigma-$finita e Borel–regolare. Nella terminologia e sulla base dei risultati di Capitolo 3 la misura di Lebesgue è quindi una misura positiva di Radon completa in $\mathbb{R}^N$ (Teorema 3.8). La successiva affermazione (b) esprime l'invarianza per traslazioni della misura esterna di Lebesgue e della $\sigma-$algebra di Lebesgue ed infine l'ultima affermazione (c) garantisce che la misura di Lebesgue sia naturale nel senso che restituisce come misura dei rettangoli compatti il loro volume $N-$dimensionale.
Prima di procedere alla dimostrazione di Teorema 5.2, proviamo che il ricoprimento elementare fine $\mathcal{R}$ e la funzione V_N che intervengono nella definizione della misura di Lebesgue verificano le ipotesi di Teorema 1.45 cosicché i due metodi di Carathéodory descritti in Sezione 1.3 conducono in questo caso allo stesso risultato e la misura

[1] Ci discostiamo in questo modo dalle notazioni di Sezione 1.3.

esterna di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$ risulta essere una misura esterna metrica. A tal fine, con le notazioni di Sezione 1.3, denotiamo con $\mathcal{L}^N_\delta$ la misura esterna definita da

$$\mathcal{L}^N_\delta(A) = \inf\left\{\sum_j V_N(R_j) :\ A \subset \bigcup_j R_j,\ R_j \in \mathcal{R} \text{ e } \operatorname{diam}(R_j) \leq \delta\right\}, \quad A \subset \mathbb{R}^N,$$

per ogni $\delta > 0$. Vale allora il risultato seguente che assicura che la misura di Lebesgue sia una misura esterna metrica su $\mathbb{R}^N$.

Teorema 5.3. *Si ha $\mathcal{L}^N = \mathcal{L}^N_\delta$ per ogni $\delta > 0$.*

La dimostrazione è basata sul seguente risultato algebrico elementare.

Lemma 5.4. *Siano $i_1, \ldots, i_N \in \mathbb{N}_+$ e $c^n_i \in \mathbb{R}$ con $i = 0, \ldots, i_N$ e $n = 1, \ldots, N$ tali che*

$$c^n_0 \leq c^n_1 \leq \cdots \leq c^n_{i_n}, \qquad n = 1, \ldots, N.$$

Allora, si ha

$$\prod_{1\leq n\leq N} \left(c^n_{i_N} - c^n_0\right) = \sum_{\substack{1\leq j_1\leq i_1\\ \vdots\ \ \vdots\\ 1\leq j_N\leq i_N}} \prod_{1\leq n\leq N} \left(c^n_{j_n} - c^n_{j_n-1}\right).$$

Dimostrazione. Per $N = 1$ si ha banalmente

$$c^1_{i_1} - c^1_0 = \sum_{1\leq j_1\leq i_1} \left(c^1_{j_1} - c^1_{j_1-1}\right)$$

e, supposta vera la tesi per qualche $N \geq 1$, per $N + 1$ si ha

$$\prod_{1\leq n\leq N+1} \left(c^n_{i_n} - c^n_0\right) = \left(c^{N+1}_{i_{N+1}} - c^{N+1}_0\right) \sum_{\substack{1\leq j_1\leq i_1\\ \vdots\ \ \vdots\\ 1\leq j_N\leq i_N}} \prod_{1\leq n\leq N} \left(c^n_{j_n} - c^n_{j_n-1}\right) =$$

$$= \sum_{1\leq j_{N+1}\leq i_{N+1}} \left(c^{N+1}_{j_{N+1}} - c^{N+1}_{j_{N+1}-1}\right) \sum_{\substack{1\leq j_1\leq i_1\\ \vdots\ \ \vdots\\ 1\leq j_N\leq i_N}} \prod_{1\leq n\leq N} \left(c^n_{j_n} - c^n_{j_n-1}\right) =$$

$$= \sum_{1\leq j_{N+1}\leq i_{N+1}} \sum_{\substack{1\leq j_1\leq i_1\\ \vdots\ \ \vdots\\ 1\leq j_N\leq i_N}} \prod_{1\leq n\leq N+1} \left(c^n_{j_n} - c^n_{j_n-1}\right) = \sum_{\substack{1\leq j_1\leq i_1\\ \vdots\ \ \vdots\\ 1\leq j_{N+1}\leq i_{N+1}}} \prod_{1\leq n\leq N+1} \left(c^n_{j_n} - c^n_{j_n-1}\right)$$

cosicché l'asserto segue per induzione. □

Dimostrazione (Teorema 5.3). Utilizzando le notazioni del Lemma 5.4, sia $R \in \mathcal{R}$ il rettangolo compatto e non degenere definito da

$$R = [c^1_0, c^1_{i_1}] \times \cdots \times [c^N_0, c^N_{i_N}]$$

e sia $R_1, \ldots, R_{j_0}$ $(j_0 = i_1 \cdot i_2 \cdots i_N)$ una qualunque enumerazione dei rettangoli compatti

$$R_{j_1,\ldots,j_N} = [c^1_{j_1-1}, c^1_{j_1}] \times \cdots \times [c^N_{j_N-1}, c^N_{j_N}]$$

al variare di $j_n = 1, \ldots, i_n$ per $n = 1, \ldots, N$. Per il lemma citato, si ha allora

- $R = R_1 \cup \cdots \cup R_{j_0}$;
- $\operatorname{int}(R_{j'}) \cap \operatorname{int}(R_{j''})$ per $j' \neq j''$;
- $V_N(R) = V_N(R_1) + \cdots + V_N(R_{j_0})$.

Pertanto, fissato $\delta > 0$, ogni rettangolo $R \in \mathcal{R}$ si scrive come unione di un numero finito di rettangoli compatti $R_1, \dots, R_{j_0}$ di $\mathcal{R}$ aventi le proprietà elencate sopra per i quali risulta $\operatorname{diam}(R_j) \leq \delta$. La tesi segue quindi dal Teorema 1.45. □

Le considerazioni della dimostrazione precedente suggeriscono che è possibile sostituire i rettangoli con i cubi nella definizione di misura esterna di Lebesgue. Infatti, per ogni rettangolo compatto non degenere con i lati paralleli agli assi coordinati $R \in \mathcal{R}$ e per ogni $\delta > 0$ ed $\varepsilon > 0$, esistono cubi compatti non degeneri aventi anch'essi lati paralleli agli assi $Q_1, \dots, Q_{j_0}$ con $\operatorname{diam}(Q_j) \leq \delta$ per ogni j tali che risulti

$$R \subset \bigcup_j Q_j \qquad \text{e} \qquad \sum_j V_N(Q_j) < V_N(R) + \varepsilon.$$

Conseguentemente, nella definizione di misura esterna di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ è possibile sostituire il ricoprimento elementare fine $\mathcal{R}$ costituito dai rettangoli compatti non degeneri R aventi i lati paralleli agli assi coordinati con il ricoprimento elementare fine $\mathcal{Q}$ costituito dai cubi compatti non degeneri Q aventi i lati paralleli agli assi coordinati. Riassumiamo queste considerazioni nel risultato seguente.

Teorema 5.5. *Sia*

$$\mathcal{Q} = \{\varnothing\} \cup \left\{Q : \ Q \text{ cubo compatto non degnere della forma } (*)\right\}.$$

Allora,

$$\mathcal{L}^N(A) = \inf\left\{\sum_j V_N(Q_j) : \ A \subset \bigcup_j Q_j,\ Q_j \in \mathcal{Q} \text{ e } \operatorname{diam}(Q_j) \leq \delta\right\}$$

per ogni insieme $A \subset \mathbb{R}^N$ e per ogni $\delta > 0$.

Possiamo a questo punto dimostrare che la $\sigma-$algebra di Lebesgue $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e la restrizione ad essa della misura esterna di Lebesgue $\mathcal{L}^N$ che abbiamo introdotto nella Definizione 5.1 verificano effettivamente le proprietà elencate in Teorema 5.2.

Dimostrazione (Teorema 5.2). Come stabilito, denotiamo con $|A|_*$ la misura esterna di Lebesgue di un insieme A di $\mathbb{R}^N$ (anche non Lebsgue misurabile) e con $|E|$ la misura di Lebesgue di un insieme Lebesgue misurabile E di $\mathbb{R}^N$.

(a) La funzione d'insiemi $\mathcal{L}^N$ è una misura esterna in $\mathbb{R}^N$ (Teorema 1.40) e di conseguenza la collezione di insiemi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è una $\sigma-$algebra di insiemi di $\mathbb{R}^N$ e la restrizione di $\mathcal{L}^N$ a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è una misura completa (Teorema 1.37). Inoltre, $\mathcal{L}^N$ è anche una misura esterna metrica (Teorema 5.3) cosicché la sua restrizione alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è una misura di Borel in $\mathbb{R}^N$ (Teorema 1.41) ed $\mathcal{L}^N$ è poi evidentemente finita sui compatti. Proviamo infine che ogni insieme $A \subset \mathbb{R}^N$ anche non Lebesgue misurabile è contenuto in un insieme di Borel di uguale misura. Se $|A|_* = +\infty$ basta prende $B = \mathbb{R}^N$. Altrimenti, per ogni $n \geq 1$ esistono $\{R_{n,k}\}_k$ rettangoli compatti (non degeneri) come in $(*)$ tale che

$$A \subset \bigcup_k R_{n,k} \qquad \text{e} \qquad \sum_k V_N(R_{n,k}) \leq |A|_* + \frac{1}{n}$$

e quindi per l'insieme di Borel $B = \bigcap_n \bigcup_k R_{n,k}$ risulta $A \subset B$ e

$$|A|_* \leq |B| \leq \sum_k V_N(R_{n.k}) \leq |A|_* + \frac{1}{n}$$

per ogni n da cui segue $|A|_* = |B|$.

(b) La validità dell'uguaglianza $|A|_* = |A + x|_*$ per ogni insieme A e per ogni x è evidente.

Relativamente all'invarianza per traslazioni di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, osserviamo che per ogni coppia di insiemi A ed E di $\mathbb{R}^N$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$A \cap (E + x) = [(A - x) \cap E] + x \quad \text{e} \quad A \setminus (E + x) = [(A - x) \setminus E] + x.$$

Quindi, se E è Lebesgue misurabile, dall'invarianza per traslazioni della misura esterna di Lebesgue si ricava

$$\begin{aligned} |A \cap (E + x)|_* + |A \setminus (E + x)|_* &= \big|[(A - x) \cap E]\big|_* + \big|[(A - x) \setminus E]\big|_* = \\ &= |A - x|_* = \\ &= |A|_* \end{aligned}$$

e questo prova che anche $E + x$ è Lebesgue misurabile. Lo stesso ragionamento applicato all'insieme $E + x$ e avettore $-x$ fornisce l'implicazione opposta.

(c) Sia R un rettangolo compatto in $\mathbb{R}^N$ come in $(*)$. Se R è degenere, l'uguaglianza $|R| = V_N(R) = 0$ è ovvia. Se invece R è non degenere, si ha $|R| \leq V_N(R) < +\infty$ per definizione. Viceversa, fissato $\varepsilon > 0$, siano $R_j \in \mathcal{R}$ $(j \geq 1)$ rettangoli tali che

$$R \subset \bigcup_j R_j \qquad \text{e} \qquad \sum_j V_N(R_j) < \mathcal{L}^N(R) + \varepsilon/2.$$

Ingrandendo eventualmente i rettangoli R_j, si può supporre che risulti

$$R \subset \bigcup_j \operatorname{int}(R_j) \qquad \text{e} \qquad \sum_j V_N(R_j) < \mathcal{L}^N(R) + \varepsilon$$

e dunque per compattezza esiste dunque una sottofamiglia finita, diciamo $R_1, \ldots, R_{j_0}$, tale che risulti

$$R \subset \bigcup_{1 \leq j \leq j_0} \operatorname{int}(R_j) \qquad \text{e} \qquad \sum_{1 \leq j \leq j_0} V_N(R_j) \leq \sum_j V_N(R_j) < \mathcal{L}^N(R) + \varepsilon.$$

Possiamo ovviamente assumere che per ciascuno di essi risulti $R \cap \operatorname{int}(R_j) \neq \varnothing$. Sostituendo quindi a ciascun rettangolo R_j il rettangolo compatto e non degenere $R \cap R_j$ che continuiamo a denotare con R_j, si ha

$$(**) \qquad R \subset \bigcup_{1 \leq j \leq j_0} \operatorname{int}(R_j) \qquad \text{e} \qquad \sum_{1 \leq j \leq j_0} V_N(R_j) < \mathcal{L}^N(R) + \varepsilon.$$

Supponiamo ora che si abbia

$$R = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^N, b^N] \qquad \text{e} \qquad R_j = [a_j^1, b_j^1] \times \cdots \times [a_j^N, b_j^N]$$

per $j = 1, \ldots, j_0$. Poiché il rettangolo R e tutti i rettangoli R_j sono non degeneri, si ha $a^n < b^n$ e $a_j^n < b_j^n$ per ogni n e j. Per ciascun indice n, sia $i_n + 1$ il numero di elementi dell'insieme $\{a^n, b^n\} \cup \big\{a_j^n, b_j^n : j = 1, \ldots, j_0\big\}$ e numeriamo in maniera crescente i suoi elementi come

$$c_0^n < c_1^n < \cdots < c_{i_n}^n.$$

Denotati quindi con $P_1, \ldots, P_{h_0}$ con $h_0 = i_1 \cdot i_2 \cdots i_N$ i rettangoli compatti e non degeneri ottenuti da R e dalle suddivisoni c_i^n dei suoi lati procedendo come nel Lemma 5.4, risulta

$$(***) \qquad R = P_1 \cup \cdots \cup P_{h_0} \qquad \text{e} \qquad V_N(R) = \sum_{1 \leq h \leq h_0} V_N(P_h).$$

Analogamente, lo stesso argomento applicato a ciascun rettangolo R_j utilizzando i punti delle suddivisioni $\{c_i^n : i = 0, \ldots, i_n\}$ comprese tra gli estremi a_j^n e b_j^n del lato n-esimo di R_j produce una decomposizione di R_j in rettangoli compatti e non degeneri $R_{j,1}, \ldots, R_{j,i_j}$ con $i_j \geq 1$ opportuno tali che

$$(****) \qquad R_j = R_{j,1} \cup \cdots \cup R_{j,i_j} \qquad \text{e} \qquad V_N(R_j) = \sum_{1 \leq i \leq i_j} V_N(R_{j,i}).$$

Ora, per costruzione, ciascun rettangolo P_h è compreso almeno una volta tra i rettangoli $R_{j,i}$ al variare di $i = 1, \ldots, i_j$ e $j = 1, \ldots, j_0$ cosicché combinando $(**)$, $(***)$ e $(****)$ si ottiene

$$V_N(R) = \sum_{1 \le h \le h_0} V_N(P_h) \le \sum_{1 \le j \le j_0} \sum_{1 \le i \le i_j} V_N(R_{j,i}) = \\ = \sum_{1 \le j \le j_0} V_N(R_j) < \mathcal{L}^N(R) + \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue $V_N(R) \le \mathcal{L}^N(R)$ e dunque la tesi. $\square$

La condizione di misurabilità di Carathéodory (Teorema 1.37) che caratterizza gli insiemi Lebesgue misurabili di $\mathbb{R}^N$ è evidentemente poco maneggevole ma è possibile caratterizzare in maniera efficace tali insiemi in termini di insiemi chiusi e aperti. Ciò è conseguenza del seguente risultato generale valido per misure positive di Borel finite sui compatti e Borel–regolari in $\mathbb{R}^N$.

Teorema 5.6. *Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva di Borel in $\mathbb{R}^N$ tale che*

- *K compatto $\quad\Longrightarrow\quad \mu(K) < +\infty$;*
- *per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ esiste un insieme di Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ tale che*
$$E \subset B \qquad e \qquad \mu(E) = \mu(B);$$

e sia $E \in \mathcal{S}$. Allora,

(a) *per ogni $\varepsilon > 0$ esistono F_ε chiuso e V_ε aperto tali che risulti*
$$F_\varepsilon \subset E \subset V_\varepsilon \qquad e \qquad \mu(V_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \le \varepsilon;$$
(b) *esistono insiemi di Borel $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ $(i = 1, 2)$ tali che*
$$B_1 \subset E \subset B_2 \qquad e \qquad \mu(B_2 \setminus B_1) = 0.$$

Questo teorema fornisce nel contesto delle misure di Borel in $\mathbb{R}^N$ lo stesso risultato di Teorema 3.8 senza utilizzare il teorema di rappresentazione dei funzionali lineari positivi di Riesz (Teorema 3.2).

Dimostrazione. (a) Proviamo dapprima che, per ogni insieme di Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ con $\mu(B) < +\infty$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste K_ε compatto tale che

$$K_\varepsilon \subset B \qquad \text{e} \qquad \mu(B \setminus K_\varepsilon) \le \varepsilon;$$

Consideriamo a tal fine la misura positiva di Borel $\nu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \to [0, +\infty)$ definita da

$$\nu(A) = \mu(A \cap B), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N),$$

e poniamo

$$\mathcal{A} = \left\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) : \, \forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, K_\varepsilon \text{ compatto } : \; K_\varepsilon \subset A \text{ e } \nu\left(A \setminus K_\varepsilon\right) < \varepsilon\right\}.$$

Evidentemente $\mathcal{A}$ contiene tutti gli insiemi compatti di $\mathbb{R}^N$. Articoliamo il resto della dimostrazione di quest'affermazione nei passi seguenti.

Passo 1. $A_m \in \mathcal{A}$ $(m \ge 1)$ e $A = \bigcap_m A_m \qquad \Longrightarrow \qquad A \in \mathcal{A}$.

L'insieme A è di Borel e, fissato $\varepsilon > 0$, per ogni m esiste un compatto $K_m \subset A_m$ tale che $\nu(A_m \setminus K_m) < \varepsilon/2^m$. L' insieme $K_\varepsilon = \bigcap K_m$ è compatto e tale che $K_\varepsilon \subset A$ e $A \setminus K_\varepsilon \subset \bigcup_m (A_m \setminus K_m)$ da cui segue $\nu(A \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$.

Passo 2. $A_m \in \mathcal{A}$ $(m \ge 1)$ e $A = \bigcup_m A_m \qquad \Longrightarrow \qquad A \in \mathcal{A}$.

L' insieme A è di Borel e, fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo i compatti K_m come nel caso precedente cosicché risulta $\nu\left(A \setminus \left(\bigcup_m K_m\right)\right) < \varepsilon$ poiché $A \setminus \left(\bigcup_m K_m\right) \subset \bigcup_m (A_m \setminus K_m)$. Inoltre, essendo ν una misura finita, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \nu\big(A \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_n)\big) = \nu\left(A \setminus \left(\bigcup_m K_m\right)\right)$$

cosicché, posto $K_\varepsilon = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ per n sufficientemente grande, si ha che K_ε è un insieme compatto contenuto in A tale che $\nu(A \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$.

Poiché aperti e chiusi di $\mathbb{R}^N$ sono unione al più numerabile di compatti, dal passo precedente si deduce che $\mathcal{A}$ contiene tutti gli aperti e tutti i chiusi di $\mathbb{R}^N$. Conseguentemente, anche

$$\mathcal{B}' = \{A \in \mathcal{A} :\ A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}\}$$

ha la medesima proprietà. Inoltre, se $A_m \subset \mathcal{B}'$ $(m \geq 1)$ e $A = \bigcup_m A_m$, si ha $A \in \mathcal{B}'$ per le proprietà precedenti. In conclusione, $\mathcal{B}'$ è una $\sigma-$algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ contenente tutti gli aperti e contenuta per costruzione nella $\sigma-$algebra di Borel di $\mathbb{R}^N$. Risulta quindi $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ ed in particolare $B \in \mathcal{B}'$. Da $\mathcal{B}' \subset \mathcal{A}$ e dalla definizione di $\mathcal{A}$ segue l'asserto.

Sia dapprima $E = B$ con $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ insieme di Borel in $\mathbb{R}^N$ e siano

$$B_n = B \cap \big\{x :\ n-1 \leq \|x\| < n\big\}, \qquad n \geq 1.$$

Gli insiemi B_n così definiti sono insiemi di Borel disgiunti tali che $B = \bigcup_n B_n$ con $\mu(B_n) < +\infty$ per ogni n. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni n esiste K_n compatto tale che $K_n \subset B_n$ e $\mu(B_n \setminus K_n) \leq \varepsilon/2^{n+1}$. L'insieme $F_\varepsilon = \bigcup_n K_n$ è chiuso perché unione di una famiglia localmente finita di chiusi e risulta $F_\varepsilon \subset B$ e

$$\mu(B \setminus F_\varepsilon) = \sum_n \mu(B_n \setminus K_n) \leq \varepsilon/2.$$

Ripetendo il medesimo argomento per l'insieme complementare B^{c}, si determina un insieme chiuso F_ε tale che $F_\varepsilon \subset B^{\mathrm{c}}$ e $\mu(B^{\mathrm{c}} \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon/2$. L'insieme $V_\varepsilon = F_\varepsilon^{\mathrm{c}}$ è quindi aperto e tale che $B \subset V_\varepsilon$ e da $V_\varepsilon \setminus B = B^{\mathrm{c}} \setminus F_\varepsilon$ segue $\mu(V_\varepsilon \setminus B) \leq \varepsilon/2$ e questo prova (a) nel caso di un insieme di Borel.

Sia quindi $E \in \mathcal{S}$ un insieme tale che $\mu(E) < +\infty$ e sia B un insieme di Borel tale che $E \subset B$ e $\mu(E) = \mu(B)$. Da $\mu(E) < +\infty$ segue allora $\mu(B \setminus E) = 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste allora V_ε aperto tale che $B \subset V_\varepsilon$ e $\mu(V_\varepsilon \setminus B) \leq \varepsilon/2$ e si ha quindi

$$\mu(V_\varepsilon \setminus E) = \mu(V_\varepsilon \setminus B) + \mu(B \setminus E) = \mu(V_\varepsilon \setminus B) \leq \varepsilon/2.$$

Nel caso in cui sia $\mu(E) = +\infty$ si considerano gli insiemi

$$E_n = E \cap \big\{x :\ n-1 \leq \|x\| < n\big\}, \qquad n \geq 1,$$

e si procede come nel caso precedente determinando un insieme aperto V_ε tale che $E \subset V_\varepsilon$ e $\mu(V_\varepsilon \setminus E) \leq \varepsilon/2$.

Consideriamo ora l'insieme complementare E^c. Per quanto stabilito sopra, esiste un insieme aperto V_ε tale che $E^{\mathrm{c}} \subset V_\varepsilon$ e $\mu(V_\varepsilon \setminus E^{\mathrm{c}}) \leq \varepsilon/2$. Posto $F_\varepsilon = V_\varepsilon^{\mathrm{c}}$, l'insieme F_ε è chiuso e tale che $F_\varepsilon \subset E$ e $V_\varepsilon \setminus E^{\mathrm{c}} = E \setminus F_\varepsilon$ da cui segue $\mu(E \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon/2$ e questo completa la dimostrazione di (a).

(b) Per ogni $n \geq 1$ siano F_n chiuso e V_n aperto associati ad E e a $\varepsilon = 1/n$. Allora, $B_1 = \bigcup_n F_n$ e $B_2 = \bigcap_n V_n$ sono insiemi di tipo $\mathcal{F}_\sigma$ e $\mathcal{G}_\delta$ rispettivamente tali che $B_1 \subset E \subset B_2$ e da $\mu(B_2 \setminus B_1) \leq \mu(V_n \setminus F_n) \leq 1/n$ per ogni n segue la conclusione. $\square$

Possiamo conseguentemente caratterizzare gli insiemi Lebesgue misurabili di $\mathbb{R}^N$.

Corollario 5.7. *Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *E è Lebesgue misurabile in $\mathbb{R}^N$;*

(b) *per ogni $\varepsilon > 0$ esistono F_ε chiuso e V_ε aperto tali che*

$$F_\varepsilon \subset E \subset V_\varepsilon \qquad e \qquad |V_\varepsilon \setminus F_\varepsilon| \leq \varepsilon;$$

(c) *esistono insiemi di Borel $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ $(i = 1\,, 2)$ tali che*

$$B_1 \subset E \subset B_2 \qquad e \qquad |B_2 \setminus B_1| = 0.$$

Dimostrazione. Le due implicazioni (a) $\implies$ (b) $\implies$ (b) non sono altro che il teorema precedente applicato alla misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$ e la restante implicazione è conseguenza della completezza della misura di Lebesgue. $\square$

Questo risultato prova in particolare che, nel linguaggio di Capitolo 3, la misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$ è una misura di Radon completa in $\mathbb{R}^N$
Le proprietà che caratterizzano gli insiemi Lebesgue misurabili di $\mathbb{R}^N$ elencate nel corollario precedente possono essere ulteriormente precisate nella maniera seguente.

Corollario 5.8. *Sia $E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ un insieme Lebesgue misurabile in $\mathbb{R}^N$. Allora,*

(a) *se $|E| < +\infty$, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono K_ε compatto e V_ε aperto tali che risulti*

$$K_\varepsilon \subset E \subset V_\varepsilon \qquad e \qquad |V_\varepsilon \setminus K_\varepsilon| \leq \varepsilon;$$

(b) *esistono insiemi K_n compatti e V_n aperti $(n \geq 1)$ tali che, posto $B_1 = \bigcup_n K_n$ e $B_2 = \bigcap_n V_n$, risulti*

$$B_1 \subset E \subset B_2 \quad e \quad |B_2 \setminus B_1| = 0;$$

(c) $|E| = \begin{cases} \sup\big\{|K| :\ K \subset E \text{ e } K \text{ compatto}\big\} \\ \inf\big\{|V| :\ E \subset V \text{ e } V \text{ aperto}\big\}. \end{cases}$

Gli insiemi di Borel B_1 e B_2 in Corollario 5.7 – (c) possono quindi essere presi tra gli insiemi di tipo σ – compatto e di tipo $\mathcal{G}_\delta$ rispettivamente e nella terminologia introdotta nel Capitolo 3 la proprietà (c) esprime il fatto che la misura di Lebesgue sia una misura di Radon regolare in $\mathbb{R}^N$.

Dimostrazione. (a) Fissato $\varepsilon > 0$, siano F_ε chiuso e V_ε aperto associati a E ed a $\varepsilon/2$ da Corollario 5.7 – (b). Gli insiemi $K_n = F_\varepsilon \cap B_n$ con $B_n = B_n[0]$ palla chiusa di centro nell'origine e raggio n $(n \geq 1)$ sono insiemi compatti tali che $|K_n| \to |F_\varepsilon|$ per $n \to +\infty$ e quindi, essendo $|F_\varepsilon| \leq |E| < +\infty$, risulta $|F_\varepsilon \setminus K_\varepsilon| \leq \varepsilon/2$ per $K_\varepsilon = K_n$ con n opportuno da cui segue $K_\varepsilon \subset E$ e $|V_\varepsilon \setminus K_\varepsilon| \leq \varepsilon$.

(b) Per ogni $n \geq 1$, siano F_n chiuso e V_n aperto associati ad E e a $\varepsilon = 1/n$ da (a). Allora,

$$B = \bigcup_n F_n \qquad \text{e} \qquad B_2 = \bigcap_n V_n$$

sono insiemi di $\mathbb{R}^N$ di tipo $\mathcal{F}_\sigma$ e $\mathcal{G}_\delta$ rispettivamente tali che $B_1 \subset E \subset B_2$ e $|B_2 \setminus B_1| = 0$ e la conclusione segue dal fatto che ogni insieme di tipo $\mathcal{F}_\sigma$ di $\mathbb{R}^N$ è σ – compatto.

(c) Segue facilmente da (a). $\square$

Possiamo quindi provare che la misura di Lebesgue è unica tra le misure aventi le proprietà elencate in Teorema 5.2.

Teorema 5.9. *Siano $\mathcal{S}$ una σ – algebra di $\mathbb{R}^N$ e $\mu \colon \mathcal{S} \to [0\,, +\infty]$ una misura positiva di Borel non nulla con le seguenti proprietà:*

- *K compatto $\qquad \implies \qquad \mu(K) < +\infty$;*

- *per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ esiste un insieme di Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ tale che*
$$E \subset B \qquad e \qquad \mu(E) = \mu(B).$$
- $\mu(B) = \mu(B + x_0)$ *per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ ed $x_0 \in \mathbb{R}^N$.*

Allora, si ha $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ ed esiste $c > 0$ tale che
$$\mu(E) = c\,|E|\,, \qquad E \in \mathcal{S}.$$
Inoltre, se μ è completa risulta $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

La dimostrazione utilizza la scomposizione in cubi diadici degli aperti di $\mathbb{R}^N$. Denotiamo a tal fine con
$$Q^{(k)} = \left\{x = (x^1, \dots, x^N) : \ 0 \le x^n \le 1/2^k \text{ per } n = 1, \dots, N\right\}, \qquad k \ge 0,$$
il cubo compatto e non degenere della forma $(*)$ avente vertice nell'origine e lati di lunghezza $1/2^k$ e denotiamo con
$$\mathcal{Q}_k = \left\{h/2^k + Q^{(k)} : \ h \in \mathbb{Z}^N\right\}$$
la collezione di tutti i cubi compatti e non degeneri di $\mathbb{R}^N$ di lati paralleli agli assi coordinati e di lunghezza $1/2^k$ e aventi come vertici vettori le cui componenti siano razionali diadici. I cubi della famiglia $\mathcal{Q}_k$ si dicono *cubi diadici di taglia k* e la collezione di tutti i cubi diadici si denota con $\mathcal{Q}_\mathrm{d} = \bigcup_k \mathcal{Q}_k$.

Lemma 5.10. *Sia $V \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto (non vuoto). Allora, esiste una famiglia numerabile di cubi diadici $Q_j \in \mathcal{Q}_d$ $(j \ge 1)$ tali che*

(a) $\mathrm{int}(Q_i) \cap \mathrm{int}(Q_j) = \varnothing$ *per $i \ne j$;*
(b) $V = \bigcup_j Q_j$.

Per (a) i cubi diadici $\{Q_j\}_j$ sono quindi non sovrapposti.

Dimostrazione. Sia
$$\mathcal{Q}'_k = \left\{m/2^k + Q^{(k)} : \ m = (m^1, \dots, m^N) \in \mathbb{Z}^N \text{ e } |m^n| \le (k+1)2^k \text{ per ogni } n\right\}$$
la collezione di tutti i cubi diadici traslati di $Q^{(k)}$ aventi vertici in punti le cui coordinate siano multiple di $1/2^k$ e contenuti nel cubo compatto di lato $2(k+1)$ con centro nell'origine.
Poniamo $V_1 = V$ e scegliamo $k_1 \ge 0$ in modo che V_1 contenga almeno uno dei cubi diadici della famiglia $\mathcal{Q}'_{k_1}$ e denotiamo con $\mathcal{Q}''_1$ la collezione finita di tutti i cubi diadici di $\mathcal{Q}'_{k_1}$ contenuti in V_1. L'unione dei cubi diadici di $\mathcal{Q}''_1$ è un sottoinsieme compatto di V_1 e quindi l'insieme aperto
$$V_2 = V_1 \setminus \bigcup \{Q : \ Q \in \mathcal{Q}_1\}$$
è non vuoto. Scegliamo quindi $k_2 > k_1$ in modo che V_2 contenga almeno uno dei cubi diadici di $\mathcal{Q}'_{k_2}$ e denotiamo con $\mathcal{Q}''_2$ la collezione finita di tutti i cubi diadici di $\mathcal{Q}'_{k_1}$ contenuti in V_2. Iterando questo argomento si determina una successione di famiglie finite di cubi diadici $\mathcal{Q}''_h$ $(h \ge 1)$ e i cubi diadici Q_j $(j \ge 1)$ ottenuti numerando i cubi diadici dell'unione di tali famiglie godono delle proprietà elencate. □

Sostitendo ai cubi diadici compatti $Q^{(k)}$ i cubi diadici semiaperti
$$Q^{(k)} = \left\{x = (x^1, \dots, x^N) : \ 0 \le x^n < 1/2^k \text{ per } n = 1, \dots, N\right\}, \qquad k \ge 0,$$
si ottiene una scomposizione degli insiemi aperti di $\mathbb{R}^N$ in cubi diadici disgiunti.

Corollario 5.11. *Sia $V \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto (non vuoto). Esiste allora una famiglia numerabile di cubi diadici semiaperti Q_j $(j \ge 1)$ con le seguenti proprietà:*

(a) $\mathrm{cl}(Q_j) \subset V$ *per ogni* j *e* $Q_i \cap Q_j = \varnothing$ *per* $i \neq j$*;*

(b) $U = \bigcup_j Q_j$.

Dimostrazione (Teorema 5.9). Sia $Q^{(0)}$ il cubo diadico semiaperto di base di taglia $k = 0$ definito sopra. Poniamo $c = \mu(Q^{(0)}) \geq 0$ e dividiamo $Q^{(0)}$ in 2^{kN} cubi diadici disgiunti $Q_1, \ldots, Q_{2^{kN}}$ appartenenti a $\mathcal{Q}_k$. Per l'invarianza per traslazioni di μ e della misura di Lebesgue si ha

$$2^{kN}\mu(Q^{(k)}) = \sum_{1 \leq h \leq 2^{kN}} \mu(Q_h) = \mu(Q^{(0)}) = c\left|Q^{(0)}\right| = c \sum_{1 \leq h \leq 2^{kN}} |Q_h| = 2^{kN} c\left|Q^{(k)}\right|.$$

Risulta quindi $\mu(Q) = c|Q|$ per ogni cubo compatto Q di lato $1/2^k$ di forma $(*)$ cosicché lo stesso vale per ogni aperto V di $\mathbb{R}^N$ (Lemma 5.10). La stessa uguaglianza si estende a tutti gli insiemi di Borel B poiché risulta

$$\mu(B) = \inf\left\{\mu(V) : \ B \subset V \text{ e } V \text{ aperto}\right\}$$

(Teorema 5.6 – (a)) e lo stesso vale per la misura di Lebesgue (Corollario 5.8 – (c)). Inoltre, essendo μ non nulla per ipotesi, deve essere $c > 0$.
Resta da provare che vale l'inclusione $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e che l'uguaglianza di μ con c volte la misura di Lebesgue si estende a tutti gli insiemi di $\mathcal{S}$ e ciò è ancora conseguenza di Teorema 5.6 – (b): ogni insieme della σ – algebra $\mathcal{S}$ differisce infatti da un insieme di Borel di $\mathbb{R}^N$ per un insieme contenuto in un insieme di Borel μ – trascurabile. Tale insieme è Lebesgue trascuarabile in $\mathbb{R}^N$ e l'inclusione $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è quindi conseguenza della completezza della misura di Lebesgue. L'uguaglianza $\mu(E) = c|E|$ per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ è ancora conseguenza della stessa uguaglianza sugli insiemi aperti e di Teorema 5.6 – (a) e Corollario 5.8 – (c) come prima.
Infine, se la misura μ è completa, scambiando i ruoli di μ e della misura di Lebesgue nell'argomento precedente risulta $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}$ e questo completa la dimostrazione. □

Concludiamo questa rassegna delle proprietà di base della misura di Lebesgue esaminandone il comportamento in relazione alle omotetie di $\mathbb{R}^N$ in sè: la σ – algebra di Lebesgue risulta invariante per omotetia e la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ riscala di un fattore λ^N per effetto di un'omotetia di coefficiente $\lambda > 0$. Questo risultato è un caso particolare della formula di cambiamento di variabili (Teorema 5.5).

Teorema 5.12. *Siano* $A \subset \mathbb{R}^N$ *e* $\lambda > 0$*. Allora,*

(a) $|\lambda A|_* = \lambda^N |A|_*$*;*

(b) $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \iff \lambda A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Dimostrazione. (a) Si ha $\lambda R \in \mathcal{R}$ e $V_N(\lambda R) = \lambda^N V_N(R)$ per ogni rettangolo $R \in \mathcal{R}$ e per ogni $\lambda > 0$ e la conclusione segue quindi dalla definizione di misura di Lebesgue (Definizione 5.1).
(b) Per ogni coppia di insiemi A ed E di $\mathbb{R}^N$ si ha

$$A \cap (\lambda E) = \lambda\left[(E/\lambda) \cap A\right] \qquad \text{e} \qquad A \setminus (\lambda E) = \lambda\left[(E/\lambda) \setminus A\right].$$

Quindi, se E è Lebesgue misurabile in $\mathbb{R}^N$, da (a) si ricava

$$\begin{aligned} |A \cap (\lambda E)|_* + |A \setminus (\lambda E)|_* &= \lambda^N \left\{|(A/\lambda) \cap E|_* + |(A/\lambda) \setminus E|_*\right\} = \\ &= \lambda^N |A/\lambda|_* = \\ &= |A|_* \end{aligned}$$

e questo prova che anche λE è Lebesgue misurabile in $\mathbb{R}^N$. Cambiando λ in $1/\lambda$ si ottiene l'implicazione opposta. □

Un caso particolare del risultato precedente che è opportuno evidenziare esplicitamente riguarda la misura delle palle e del loro bordo al variare del raggio.

Corollario 5.13. *Sia $\omega_N = |B_1| > 0$. Allora, per ogni $r > 0$ e per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^N$ si ha*

(a) $|B_r(x_0)| = \omega_N r^N$;
(b) $|S_r(x_0)| = 0$.

Rinviamo a Esercizio 5.23 per il calcolo di ω_N in funzione della dimensione N.

Dimostrazione. La formula in (a) è un caso particolare del risultato precedente. Per (b) si ha $S_r(x_0) \subset B_{r+\varepsilon}[x_0] \setminus B_{r-\varepsilon}[x_0]$ per ogni $0 < \varepsilon < r$ cosicché risulta

$$|S_r(x_0)| \leq \omega_N \left[(r+\varepsilon)^N - (r-\varepsilon)^N\right]$$

per gli stessi ε. □

In quale senso sono piccoli gli insiemi trascurabili? Gli insiemi trascurabili sono gli insiemi piccoli rispetto alla misura. Sviluppiamo in questa parte alcune considerazioni sulle relazioni che intercorrono tra la nozione di insieme trascurabile per la misura di Lebesgue di $\mathbb{R}$ e le nozioni di piccolezza di un insieme nel senso della cardinalità e nel senso topologico della categoria di Baire.
Poiché in questa parte interverranno esclusivamente la $\sigma-$algebra e la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^N$, parleremo brevemente di misura anziché di misura di Lebesgue e di insiemi misurabili e trascurabili anziché Lebesgue misurabili e Lebesgue trascurabili.
Osserviamo per prima cosa che ogni singoletto $\{x\}$ di $\mathbb{R}^N$ è compatto e trascurabile (Teorema 5.2−(c)). Di conseguenza, ogni insieme finito o numerabile di $\mathbb{R}^N$ è trascurabile. In particolare, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme di misura nulla di $\mathbb{R}$. Si noti inoltre che

- $\mathbb{Q}$ è illimitato ma $|\mathbb{Q}| = 0$;
- $|\mathbb{Q}| = 0$ ma $|\operatorname{cl}(\mathbb{Q})| = |\mathbb{R}| = +\infty$.

In altri termini, un insieme illimitato può avere misura piccola – addirittura nulla – e la misura di un insieme e della sua chiusura possono essere molto diverse. Gli insiemi finiti o numerabili non esauriscono però la classe degli insiemi trascurabili di $\mathbb{R}$.

Esempio 5.14 (G. Cantor). Esiste un insieme $C \subset [0,1]$ con le seguenti proprietà:

- C è compatto e $\operatorname{int}(C) = \varnothing$;
- C è non numerabile;
- $|C| = 0$.

L'insieme C che costruiremo è detto *insieme di Cantor.* Esso è contemporaneamente trascurabile e non numerabile e si ottiene dall'intervallo $[0,1]$ rimuovendo una conveniente famiglia numerabile di intervalli aperti. Definiamo dunque C ponendo

$$C = \bigcap\nolimits_n C_n$$

ove C_n $(n \geq 0)$ è una famiglia decrescente di insiemi compatti, non vuoti ciascuno dei quali è unione di 2^n intervalli compatti, non degeneri e disgiunti

$$C_n = I_{n,1} \cup \cdots \cup I_{n,2^n}, \qquad n \geq 0,$$

in modo che sia $C_0 = I_{0,1} = [0,1]$ e che ricorsivamente C_{n+1} sia ottenuto da C_n come unione dei 2^{n+1} intervalli compatti, non degeneri e disgiunti che si ottengono rimuovendo da ciascun intervallo $I_{n,m}$ $(m = 1, \dots, 2^n)$ di C_n il *terzo di mezzo* ove il terzo di mezzo dell'intervallo compatto e non degenere $[a, b]$ è l'intervallo aperto

$$\left(a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3}\right).$$

A titolo di esempio, si ha

$$\begin{aligned} C_0 &= [0, 1] \\ C_1 &= [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \\ C_2 &= [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1] \end{aligned}$$

e così via. Per costruzione risulta chiaro che

- ogni insieme C_n è compatto, non vuoto e risulta $C_{n+1} \subset C_n$ per ogni n;
- $|C_0| = 1$ e $|C_{n+1}| = (2/3)|C_n|$ per ogni n.

In particolare, si ha $|C_n| = (2/3)^n$ per ogni n e, come conseguenza delle proprietà precedenti, l'insieme C definito sopra è un insieme compatto e non vuoto con $|C| = 0$. Risulta inoltre $\mathrm{int}\,(C) = \varnothing$ poiché, per costruzione, C_n è unione di intervalli disgiunti di lunghezza $1/3^n$ cosicché nessun intervallo aperto e non vuoto può essere contenuto in ogni insieme C_n. Inoltre, essendo C chiuso, si ha $C = \partial C$ cioè C coincide con il suo bordo.
Resta quindi da provare soltanto che C è non numerabile. Questo si può fare nei due modi seguenti.
Il primo modo consiste nel provare che l'insieme di Cantor C è perfetto (chiuso e privo di punti isolati) cosicché, essendo non vuoto, esso è necessariamente non numerabile (Esercizio I–3.8). Infatti, sia $x \in C$ cosicché $x \in C_n$ per ogni n. Sia quindi $m_n \in \{1, \dots, 2^n\}$ tale che $x \in I_{n,m_n}$. Almeno uno dei due estremi dell'intervallo compatto e non degenere I_{n,m_n} non coincide con x. Sia x_n tale estremo. Si ha $x_n \in C$ per ogni n poiché per costruzione gli estremi di ciascun intervallo $I_{n,m}$ $(m = 1, \dots, 2^n)$ appartengono a C_{n+j} per ogni $j \geq 0$ e quindi a C. Infine, poiché x_n ed x appartengono all'intervallo I_{n,m_n} e $|I_{n,m_n}| = 1/3^n$, si ha $x_n \to x$ per $n \to +\infty$. Questo prova che tutti i punti di C sono punti di accumulazione.
Nel secondo modo si prova direttamente che C è equipotente all'intervallo $[0, 1]$. A questo scopo, costruiamo una funzione $\varphi\colon C \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}_+}$ biettiva da C sull'insieme delle successioni di 0 ed 1 nel modo seguente. Sia $x \in C$ cosicché $x \in C_n$ per ogni n e sia quindi $m_n \in \{1, \dots, 2^n\}$ tale che $x \in I_{n,m_n}$ come nel caso precedente. Definiamo ora la successione di cifre binarie $x_n \in \{0, 1\}$ $(n \geq 1)$ ponendo

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{se } m_n \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } m_n \text{ è pari} \end{cases}$$

e poniamo quindi $\varphi(x) = \{x_n\}_n$. È chiaro che φ così definita è biettiva da C su $\{0, 1\}^{\mathbb{N}_+}$. Consideriamo quindi un'applicazione iniettiva $\psi\colon [0, 1] \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}_+}$ che fornisca la rappresentazione binaria dei numeri reali in $[0, 1]$, ad esempio quella che non utilizza successioni di cifre definitivamente uguali a 1 se non per la rappresentazione del numero 1 stesso. L'applicazione $\varphi^{-1} \circ \psi\colon [0, 1] \to C$ è dunque iniettiva coisicché la cardinalità di C è maggiore o uguale della cardinalità di $[0, 1]$. Essendo C contenuto nell'intervallo $[0, 1]$, l'insieme C risulta equipotente all'intervallo $[0, 1]$ per il teorema di Schröder-Bernstein (Teorema 4.7 in [9]).
La costruzione dell'insieme di Cantor appena descritta può essere ripetuta utilizzando un numero $0 < \xi < 1$ qualunque al posto di $1/3$. Si costruisce infatti come prima l'insieme compatto $C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$ come intersezione degli insiemi compatti $C_0 = [0, 1]$

e

$$C_n = I_{n,1} \cup \cdots \cup I_{n,2^n}, \qquad n \geq 0,$$

ove i 2^n intervalli compatti, non degeneri e disgiunti che compongono C_n per $n \geq 1$ sono ottenuti rimuovendo da ciascuno dei 2^{n-1} intervalli la cui unione è C_{n-1} la *frazione ξ-esima di mezzo* definita come l'intervallo aperto

$$\left(a + \frac{1-\xi}{2}(b-a)\,, b - \frac{1-\xi}{2}(b-a)\right).$$

nel caso dell'intervallo compatto e non degenere $[a\,, b]$. Si ha $|C_n| = (1-\xi)^n$ per ogni $n \geq 0$ e, come nel caso $\xi = 1/3$, l'insieme risultante C è compatto, non vuoto, privo di punti interni, non numerabile e avente misura nulla. □

Ogni insieme trascurabile è evidentemente privo di punti interni e questa osservazione porta in modo naturale a chiedersi se solo gli insiemi trascurabili siano privi di punti interni. Non è così: per ogni $0 < \varepsilon < 1$ è possibile costruire un insieme compatto $K_\varepsilon \subset [0\,, 1]$ con

$$\mathrm{int}(K_\varepsilon) = \varnothing \qquad \text{e} \qquad |K_\varepsilon| = \varepsilon$$

(Esercizi 5.5 o 5.6). Poiché si può evidentemente supporre che K_ε contenga gli estremi 0 e 1 dell'intervallo $[0\,, 1]$, il suo complementare $V_\varepsilon = [0\,, 1] \setminus K_\varepsilon$ risulta quindi essere un insieme aperto contenuto in $(0\,, 1)$ il cui bordo ∂V_ε è l'insieme K_ε stesso. Esistono quindi insiemi aperti di $\mathbb{R}$ con bordo di misura positiva.
Gli insiemi compatti K_ε hanno quindi interno vuoto e misura positiva e i loro complementari $V_\varepsilon = [0\,, 1] \setminus K_\varepsilon$ sono insiemi aperti in $\mathbb{R}$ e densi in $[0\,, 1]$ per ogni $0 < \varepsilon < 1$. Conseguentemente gli insiemi

$$F = \bigcup_n K_{1-1/n} \qquad \text{e} \qquad G = \bigcap_n V_{1/n}$$

sono rispettivamente un insieme di tipo $\mathcal{F}_\sigma$ magro e un insieme di tipo $\mathcal{G}_\delta$ residuo con misura $|F| = 1$ e $|G| = 0$.
Pertanto, un insieme dell'intervallo $[0\,, 1]$ può essere piccolo per la categoria di Baire e grande per la misura di Lebesgue o viceversa. Concludiamo quindi che per un insieme non vi è in genere alcun legame tra l'essere piccolo o grande secondo la categoria di Baire o piccolo o grande secondo la misura di Lebesgue benché misura di Lebesgue e topologia di $\mathbb{R}$ siano evidentemente strettamente collegate.
Gli esempi precedenti si generalizzano in dimensione maggiore di uno utilizzando i risultati di Sezione 5.4.
Concludiamo questa parte sugli insiemi trascurabili esaminando alcuni esempi di insiemi siffatti in $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 2$. Proviamo infatti che tal caso ogni insieme di codimensione (affine)[2] positiva è trascurabile in $\mathbb{R}^N$. La dimostrazione è basata sul risultato seguente che è un caso particolare del successivo Teorema 5.45.

Teorema 5.15. *Siano $L \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^N)$ un operatore lineare e $E\,, T \subset \mathbb{R}^N$ due insiemi. Allora,*

(a) *T trascurabile in $\mathbb{R}^N$ $\implies$ $L(T)$ trascurabile in $\mathbb{R}^N$;*
(b) *E misurabile in $\mathbb{R}^N$ $\implies$ $L(E)$ misurabile in $\mathbb{R}^N$.*

Questo risultato vale per operatori lineari $L \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ con $M \geq N$ ma non vale con $M < N$ (Esempio 5.39).

---

[2] La *dimensione* (*affine*) di un insieme $A \subset \mathbb{R}^N$ è il minimo della dimensione dei sottospazi affini contenenti A. In tal caso, se $n \geq 0$ è tale numero, il numero $N - n \geq 0$ è la *codimensione* (*affine*) *di* A.

Dimostrazione. (a) Sia $K = \|L\|$ la norma di L. Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $l > 0$ risulta

$$Q_l[x] \subset B_{\sqrt{N}l}[x] \qquad \text{e} \qquad L\big(B_{\sqrt{N}l}[x]\big) \subset B_{K\sqrt{N}l}[Lx] \subset Q_{K\sqrt{N}l}[Lx].$$

Poiché T è Lebesgue trascurabile, fissato $\varepsilon > 0$, esiste una famiglia al più numerabile di cubi compatti $Q_k = Q_{l_k}[x_k]$ $(k \geq 1)$ di $\mathbb{R}^N$ (Teorema 5.5) tali che

$$T \subset \bigcup_k Q_k \qquad \text{e} \qquad \sum_k |Q_k| \leq \varepsilon.$$

Posto allora

$$Q'_k = Q_{K\sqrt{N}l_k}[Lx_k], \qquad k \geq 1,$$

risulta $L(Q_k) \subset Q'_k$ per ogni k e da ciò segue

$$L(T) \subset \bigcup_k L(Q_k) \subset \bigcup_k Q'_k$$

$$\sum_k |Q'_k| = (K\sqrt{N})^N \sum_k |Q_k| \leq (K\sqrt{N})^N \varepsilon$$

e questo prova (a).

(b) Denotata con $B_n = B_n[0]$ la palla chiusa di raggio n con centro nell'origine, risulta $L(E) = \bigcup_n L(E \cap B_n)$ e quindi non è restrittivo supporre che E sia limitato. In tal caso risulta

$$E = \left(\bigcup_n K_n\right) \cup T$$

per opportuni insiemi K_n compatti $(n \geq 1)$ e T trascurabile (Teorema 5.2). Si ha allora

$$L(E) = \left(\bigcup_n L(K_n)\right) \cup L(T)$$

e la conclusione segue da (a). □

Teorema 5.16. *Sia $T \subset \mathbb{R}^N$ un insieme tale che*

$$T \subset x_0 + X_0$$

con X_0 sottospazio di $\mathbb{R}^N$ con $\dim X_0 \leq N-1$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Allora, T è trascurabile in $\mathbb{R}^N$.

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che sia $x_0 = 0$ e che T sia limitato e, posto $n = \dim X_0$, possiamo supporre anche che sia $n = N-1$ con $N \geq 2$. Supponiamo dapprima che si abbia $T \subset X_0 = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{N-1}\}$ dove $\{e_1, \dots, e_N\}$ denota la base canonica di $\mathbb{R}^N$. Esiste allora un rettangolo $R \subset \mathbb{R}^{N-1}$ della forma $(*)$ tale che risulti

$$T \subset R \times [-\varepsilon, \varepsilon] = R_\varepsilon, \qquad \varepsilon > 0.$$

L'insieme R_ε è un rettangolo di $\mathbb{R}^N$ della forma $(*)$ tale che

$$0 \leq V_N(R_\varepsilon) = 2\varepsilon V_{N-1}(R), \qquad \varepsilon > 0,$$

e dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si conclude che T è trascurabile in $\mathbb{R}^N$.

Sia quindi X_0 un sottospazio qualunque di $\mathbb{R}^N$ con $\dim X_0 = N-1$. Scegliamo allora una base ortonormale $\{u_1, \dots, u_{N-1}\}$ di X_0 ed un vettore $u_N \in \mathbb{R}^N$ con $\|u_N\| = 1$ tale che $\{u_1, \dots, u_N\}$ sia una base ortonormale di $\mathbb{R}^N$. Sia $L \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ l'operatore lineare ortogonale tale che $Le_n = u_n$ per ogni n. Posto $S = L^{-1}(T)$, risulta ovviamente $T = L(S)$ con $S \subset \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{N-1}\}$. Quindi, S è trascurabile in $\mathbb{R}^N$ cosicché anche T è tale (Teorema 5.15). □

Anche le sfere cioè la frontiera delle palle di $\mathbb{R}^N$ sono insiemi trascurabili per la misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$ (Corollario 5.13 − (b)). La stessa affermazione si estende a tutte le varietà di codimensione positiva (Esercizio 5.9).

Teorema di ricoprimento di Vitali. Il teorema di ricoprimento di Vitali che esaminiamo in questa parte garantisce la possibilità di ricoprire ogni insieme di $\mathbb{R}^N$ nel senso della misura di Lebesgue cioè a meno di insiemi Lebesgue trascurabili mediante una famiglia numerabile di palle disgiunte.
Alla base di questa possibilità vi è un proprietà di ricoprimento di origine metrica che nel caso di $\mathbb{R}^N$ permette, a partire da un ricoprimento di un insieme formato da palle (non degeneri), di estrarre una famiglia al più numerabile di palle disgiunte con le quali è possibile realizzare un ricoprimento dell'insieme di partenza al prezzo di una controllabile sovrapposizione delle palle selezionate. Questa sovrapposizione si realizza attraverso la dilatazione delle palle selezionate di un fattore fissato. Poiché la misura di Lebesgue della palla dilatata è proporzionale alla misura della palla originale (Teorema 5.12), da ciò segue la possibilità di ricoprire ogni insieme a meno di insiemi trascurabili mediante palle disgiunte.
Per semplificare l'enunciato di questo risultato di ricoprimento introduciamo la notazione seguente: per ogni palla chiusa (non degenere) B di $\mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$, denotiamo con (λB) la palla chiusa concentrica il cui raggio è $\lambda-$volte il raggio di B cioè

$$(\lambda B) = B_{\lambda r}[x], \qquad B = B_r[x],$$

per $\lambda, r > 0$ ed $x \in \mathbb{R}^N$.
Poiché in questa parte intervengono esclusivamente la $\sigma-$algebra e la misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$, conveniamo che tutti i riferimenti a misurabilità e misura siano alla $\sigma-$algebra e alla misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$.

LEMMA 5.17. *Sia $\mathcal{B}$ una famiglia non vuota di palle chiuse (non degeneri) tale che*

$$D = \sup\big\{\mathrm{diam}(B) :\ B \in \mathcal{B}\big\} < +\infty.$$

Allora, esiste una famiglia al più numerabile di palle $B_n \in \mathcal{B}$ $(n \geq 1)$ disgiunte tali che

(a) *per ogni $B \in \mathcal{B}$ esiste n tale che $B \cap B_n \neq \varnothing$;*
(b) *per ogni $B \in \mathcal{B}$ esiste n tale che $B \subset (5B_n)$.*

Evidentemente da (b) segue che risulta

$$\bigcup\{B :\ B \in \mathcal{B}\} \subset \bigcup_n (5B_n).$$

Lo stesso risultato vale per famiglie di palle aperte e inoltre, essendo lo stesso risultato in effetti valido in tutti gli spazi metrici separabili, esso vale anche per altri tipi di insiemi quali ad esempio i cubi pur di cambiare la metrica di $\mathbb{R}^N$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'insieme formato da tutte le famiglie $\mathcal{B}'$ di palle di $\mathcal{B}$ con le seguenti due proprietà che indichiamo convenzionalmente con (P):

- le palle di $\mathcal{B}'$ sono disgiunte;
- per ogni palla $B \in \mathcal{B}$ avente intersezione non vuota con una palla di $\mathcal{B}'$, esiste un'altra palla $B' \in \mathcal{B}'$ tale che

$$B \cap B' \neq \varnothing \qquad \text{e} \qquad \mathrm{diam}(B') \geq \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}(B).$$

L'insieme di tali famiglie $\mathcal{B}'$ è non vuoto poiché la collezione di palle $\{B'\}$ formata da una sola palla $B' \in \mathcal{B}$ con $\mathrm{diam}(B') \geq D/2$ verifica le proprietà (P).
Ordiniamo parzialmente per inclusione l'insieme di tutte le famiglie $\mathcal{B}'$ di palle di $\mathcal{B}$ con le proprietà (P). Per il teorema di massimalità di Hausdorff (Teorema I–1.5),

esiste un insieme totalmente ordinato e massimale di famiglie di palle $\mathcal{B}'$ aventi le proprietà (P) e sia $\mathcal{B}_{\max}$ la collezione di tutte le palle B' appartenenti alle famiglie $\mathcal{B}'$ di tale insieme totalmente ordinato e massimale.
Poiché l'insieme delle famiglie $\mathcal{B}'$ a partire dalle quali è costruito $\mathcal{B}_{\max}$ è totalmente ordinato, la collezione di palle $\mathcal{B}_{\max}$ risulta formata da palle non degeneri e disgiunte che devono quindi essere in quantità al più numerabile:

$$\mathcal{B}_{\max} = \{B_n\}_n.$$

Proviamo che la famiglia di palle $\{B_n\}_n$ ha le proprietà (a) e (b).

(a) Supponiamo per assurdo che sia $B \cap B_n = \varnothing$ per ogni n per qualche palla $B \in \mathcal{B}$. Potremmo allora scegliere un'altra palla $B' \in \mathcal{B}$ tale che sia $B' \cap B_n = \varnothing$ per ogni n e

$$\operatorname{diam}(B') \geq \frac{1}{2} \sup \left\{ \operatorname{diam}(B'') :\ B'' \in \mathcal{B} \text{ e } B'' \cap B_n = \varnothing \text{ per ogni } n \right\}.$$

Allora la collezione di palle $\mathcal{B}'_\infty = \{B_n\}_n \cup \{B'\}$ avrebbe le proprietà (P). Le palle di $\mathcal{B}'_\infty$ sono infatti tra loro disgiunte e, se una qualche palla $B'' \in \mathcal{B}$ avesse intersezione non vuota con una delle palle della famiglia $\mathcal{B}'_\infty$, si verificherebbe necessariamente uno dei due casi seguenti:

- $B'' \cap B_n \neq \varnothing$ per qualche n;
- $B'' \cap B_n = \varnothing$ per ogni n e $B'' \cap B' \neq \varnothing$.

Nel primo caso si avrebbe $B'' \cap B_m \neq \varnothing$ e $\operatorname{diam}(B_m) \geq \operatorname{diam}(B'')/2$ per qualche m poichè le palle $\{B_n\}_n$ vengono da famiglie di palle con le proprietà (P). Nell'altro caso si avrebbe $\operatorname{diam}(B') \geq \operatorname{diam}(B'')/2$ per la scelta di B'. Pertanto, la famiglia di palle $\mathcal{B}' = \{B_n\}_n \cup \{B''\}$ avrebbe le proprietà (P) e ciò violerebbe la massimalità dell'insieme totalmente ordinato di famiglie di palle con le proprietà (P) a partire dalle quali sono ottenute le palle $\{B_n\}_n$. Qesto completa la dimostrazione di (a).

(b) Per (a), per ogni palla $B \in \mathcal{B}$ risulta $B \cap B_m \neq \varnothing$ per qualche m cosicchè, poiché le palle $\{B_n\}_n$ provengono da famiglie di palle di $\mathcal{B}$ con le proprietà (P), esiste n tale che sia $B \cap B_n \neq \varnothing$ e $\operatorname{diam}(B_n) \geq \operatorname{diam}(B)/2$. Da ciò segue $B \subset (5B_n)$ per la disuguaglianza triangolare e questo completa la dimostrazione. $\square$

Il lemma di ricoprimento che abbiamo esaminato combinato con le proprietà della misura di Lebsgue dà luogo al teorema di ricoprimento di Vitali per il cui enunciato è conveniente introdurre la definizione seguente.

Definizione 5.18. Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme. Una collezione $\mathcal{B}$ di palle chiuse (non degeneri) tali che

- $A \subset \bigcup \{B :\ B \in \mathcal{B}\}$;
- $\inf \{\operatorname{diam}(B) :\ x \in B \text{ e } B \in \mathcal{B}\} = 0$ per ogni $x \in A$;

si dice *ricoprimento di Vitali di A*. $\square$

Con riferimento alla seconda proprietà, un ricoprimento di Vitali è un ricoprimento *fine* ed è sempre possibile assumere che le palle di un ricoprimento di Vitali abbiano diametro limitato.

Teorema 5.19 (G. Vitali). *Siano $A \subset \mathbb{R}$ un insieme e $\mathcal{B}$ un ricoprimento di Vitali di A. Allora, esiste una famiglia al più numerabile di palle $B_n \in \mathcal{B}$ $(n \geq 1)$ disgiunte con le seguenti proprietà:*

(a) *se $|A|_* < +\infty$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che*
$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |A \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_n)|_* \leq \varepsilon;$$
(b) $\left| A \setminus \left(\bigcup_n B_n \right) \right| = 0.$

L'insieme A non è necessariamente misurabile.

Dimostrazione. (a) Sia V un insieme aperto di $\mathbb{R}^N$ tale che $A \subset V$ e $|V| < |A|_* + 1$. È chiaro che la collezione di palle $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} :\ B \subset V\}$ è ancora un ricoprimento di Vitali di A e quindi possiamo supporre direttamente che si abbia $B \subset V$ per ogni $B \in \mathcal{B}$.
Siano quindi $\{B_n\}_n$ le palle disgiunte di $\mathcal{B}$ di Lemma 5.17 cosicché, fissato $\varepsilon > 0$, da

$$\sum_n |B_n| \leq |V| < +\infty,$$

segue

$$5^N \sum_{n>n_0} |B_n| \leq \varepsilon$$

per $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ opportuno.
Sia quindi $n \geq n_0$ fissato. Se risulta $A \subset B_1 \cup \cdots \cup B_n$ non c'è altro da provare. Altrimenti, sia $x \in A \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_n)$. Poiché $B_1 \cup \cdots \cup B_n$ è chiuso e $\mathcal{B}$ è un ricoprimento fine di A, esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$ e $B \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_n) = \varnothing$. Quindi deve aversi $B \cap B_k \neq \varnothing$ per qualche k (Lemma 5.17−(a)) e da ciò, ragionando come in Lemma 5.17−(b), segue $B \cap B_m \neq \varnothing$ e $B \subset (5B_m)$ per qualche m con m che necessariamente deve essere tale che $m > n$. Abbiamo così provato che risulta

$$A \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_n) \subset \bigcup_{m>n} (5B_m)$$

per $n \geq n_0$ da cui segue

$$|A \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_n)|_* \leq 5^N \sum_{m>n} |B_m| \leq \varepsilon$$

per gli stessi n (Teorema 5.12) e questo prova l'asserto.
(b) Siano $\{B_n\}_n$ le palle disgiunte di $\mathcal{B}$ di Lemma 5.17. Si ha allora

$$A \setminus \left(\bigcup\nolimits_m B_m\right) \subset A \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_n)$$

per ogni n e quindi, se $|A|_* < +\infty$, (b) segue da (a) per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.
Se invece risulta $|A|_* = +\infty$, consideriamo gli insiemi

$$A_k = A \cap V_k \qquad \text{con} \qquad V_k = \left\{x :\ k-1 < \|x\| < k\right\},$$

per $k \geq 1$ e, supponendo che ogni insieme A_k sia non vuoto, poniamo

$$\mathcal{B}_k = \left\{B \in \mathcal{B} :\ B \subset V_k\right\}, \qquad k \geq 1.$$

Ogni famiglia $\mathcal{B}_k$ è un ricoprimento di Vitali di A_k e le palle di $\mathcal{B}_h$ sono disgiunte dalle palle di $\mathcal{B}_k$ per $h \neq k$. Essendo $|A_k|_* < +\infty$ per ogni k, per quanto visto prima esistono famiglie al più numerabili di palle disgiunte$\{B^k_m\}_m \subset \mathcal{B}_k$ tali che

$$\left|A_k \setminus \left(\bigcup\nolimits_m B^k_m\right)\right| = 0, \qquad k \geq 1.$$

Posto $\{B_n\}_n = \left\{B^k_m :\ m \geq 1 \text{ e } k \geq 1\right\}$, si ha $B_m \cap B_n = \varnothing$ per $m \neq n$ e

$$\left|A \setminus \left(\bigcup\nolimits_n B_n\right)\right|_* \leq \sum_k \left|A_k \setminus \left(\bigcup\nolimits_m B^k_m\right)\right| + \sum_k |A \cap S_k| = 0$$

(Corollario 5.13) e questo completa la dimostrazione. □

Il risultato precedente stabilisce che le palle disgiunte $\{B_n\}_n$ estratte da $\mathcal{B}$ ricoprono tutto A nel senso della misura di Lebesgue. Esso tuttavia non afferma che la misura di $(\bigcup_n B_n) \setminus A$ sia piccola. Questa proprietà non è in genere vera ma si può ottenere quando A è un insieme aperto.

COROLLARIO 5.20. *Sia $V \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto (non vuoto) e sia $\delta > 0$. Allora, esiste una famiglia numerabile $\{B_n\}_n$ di palle chiuse (non degeneri) tali che*

- $0 < \operatorname{diam}(B_n) \le \delta$ *e* $B_n \subset V$ *per ogni* n;
- $B_m \cap B_n = \varnothing$ *per* $m \neq n$;

con le seguenti proprietà:

(a) *se* $|V| < +\infty$, *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $n_0 = n_0(\varepsilon) \ge 1$ *tale che*
$$|V \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_n)| \le \varepsilon, \qquad n \ge n_0;$$
(b) $\left|V \setminus \left(\bigcup_n B_n\right)\right| = 0.$

DIMOSTRAZIONE. L'insieme $\mathcal{B}$ formato da tutte le palle chiuse (non degeneri) B contenute in V e tali che $0 < \operatorname{diam}(B) \le \delta$ è un ricoprimento di Vitali di V e la conclusione segue dal teorema precedente. $\square$

5.2. Funzioni misurabili ed integrabili secondo Lebesgue

Sviluppiamo in questa sezione la terminologia ed alcuni risultati specifici relativi all'integrazione di funzioni a valori reali o complessi rispetto alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$. Dimostriamo in particolare che, nel caso di funzioni definite su intervalli della retta, l'integrale secondo Lebesgue che abbiamo sin qui sviluppato coincide con l'usuale integrale secondo Riemann quando questo esiste[3] ed esaminiamo altresì come caratterizzare le funzioni limitate definite su intervalli che sono Riemann integrabili.
In tutta questa sezione denotiamo come al solito con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ il campo dei numeri reali o complessi.

Funzioni misurabili ed integrabili in $\mathbb{R}^N$. Consideriamo in questa parte la terminologia ed esaminiamo alcuni risultati specifici relativi alle funzioni misurabili ed agli integrali nel caso particolare della $\sigma-$algebra e della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$.
Una funzione $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ si dice

- *Lebesgue misurabile in* $\mathbb{R}^N$ se f è $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)-$misurabile;
- *Lebesgue integrabile in* $\mathbb{R}^N$ se f è $\mathcal{L}^N-$integrabile;

e, nel secondo caso, per denotare l'integrale su un insieme $E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ scriveremo brevemente
$$\int_E f \qquad \text{o} \qquad \int_E f(x)\,dx,$$
in luogo di
$$\int_E f\,d\mathcal{L}^N$$
ove non vi sia ambiguità. Le stesse considerazioni si applicano evidentemente a funzioni a valori reali estesi $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_\infty$ purché l'integrale di f rispetto alla misura di Lebesgue sia ben definito.
Quando poi è $N = 1$ e l'insieme d'integrazione E è un intervallo I non vuoto di $\mathbb{R}$ di estremi $-\infty \le a = \inf I < \sup I = b \le +\infty$, poniamo come consuetudine
$$\int_I f = \int_a^b f.$$

[3] Questo risultato si estende agli integrali di Riemann delle funzioni di più variabili reali ed anche agli integrali di Riemann generalizzati purché assolutamente convergenti.

Il fatto che il simbolo a destra non distingua se gli estremi di I appartengano all'insieme di integrazione oppure no è evidentemente irrilevante per le proprietà dell'integrale. Ancora quando $N = 1$ ed f è integrabile, poniamo come d'uso

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

quando $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ cosicché vale l'usuale formula di additività dell'integrale sugli intervalli orientati

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f, \qquad a, b, c \in \mathbb{R},$$

indipendentemente dall'ordinamento dei numeri a, b e c.
Nelle applicazioni si incontrano frequentemente funzioni che non sono definite su tutto $\mathbb{R}^N$ ma solo su sottoinsiemi. A tali funzioni i risultati precedenti non sono formalmente applicabili ma questa difficoltà può essere facilmente aggirata osservando che, se E è un insieme Lebesgue misurabile di $\mathbb{R}^N$, la collezione degli insiemi Lebesgue misurabili contenuti in E, ovvero

$$\mathcal{S}(E) = \left\{F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) : \ F \subset E\right\},$$

è una $\sigma-$algebra di sottoinsiemi di E detta ovviamente *$\sigma-$algebra di Lebesgue in E* e che la restrizione $\mathcal{L}^N_E$ della misura di Lebesgue $\mathcal{L}^N$ ad $\mathcal{S}(E)$ è a sua volta una misura positiva su $\mathcal{S}(E)$ detta *misura di Lebesgue in E* che continueremo ad indicare con $\mathcal{L}^N$. Conseguentemente, dato un insieme Lebesgue misurabile E di $\mathbb{R}^N$, una funzione $f\colon E \to \mathbb{K}$ si dice

- *Lebesgue misurabile in E* se f è $\mathcal{S}(E)-$misurabile;
- *Lebesgue integrabile in E* se f è $\mathcal{L}^N-$integrabile.

In questo modo tutti i risultati relativi agli integrali rispetto alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ si estendono al caso di funzioni $f\colon E \to \mathbb{K}$ con E insieme Lebesgue misurabile di $\mathbb{R}^N$. Osserviamo inoltre che, posto

$$f_E(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

si ha che f è Lebesgue misurabile/integrabile su E se e solo se la sua estensione f_E è Lebesgue misurabile/integrabile su $\mathbb{R}^N$ nel qual caso si ha

$$\int_E f = \int_{\mathbb{R}^N} f_E.$$

Inoltre, una funzione $f\colon E \to \mathbb{K}$ si dice *localmente Lebesgue integrabile in E* se f è Lebesgue misurabile in E e risulta

$$\int_K |f| < +\infty$$

per ogni insieme compatto $K \subset E$.
Anche queste considerazioni si applicano evidentemente al caso di funzioni a valori reali estesi $f\colon E \to \mathbb{R}_\infty$.
Elenchiamo ora alcune condizioni sufficienti per l'integrabilità di funzioni definite su insiemi di $\mathbb{R}^N$. Ci limitiamo qui a considerazioni estremamente elementari le cui dimostrazioni seguono facilmente dalle considerazioni svolte sino a questo punto. Non essendoci ambiguità, per evitare di appesantire la terminologia, nel seguito di questo paragrafo parliamo brevemente di insiemi e funzioni misurabili e di funzioni integrabili in luogo di Lebesgue misurabili e Lebesgue integrabili rispettivamente.

TEOREMA 5.21. *Siano $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile ed $f : E \to \mathbb{K}$ una funzione. Allora,*

(a) *f continua in $E \quad \Longrightarrow \quad f$ misurabile in E;*
(b) *$|E| < +\infty$ e f misurabile e limitata in $E \quad \Longrightarrow \quad f$ integrabile in E;*
(c) *$|E| < +\infty$ e f continua e limitata in $E \quad \Longrightarrow \quad f$ integrabile in E.*

In particolare, l'affermazione (c) si applica quando E è un insieme compatto K di $\mathbb{R}^N$ ed f è una funzione continua in K oppure quando E è un insieme aperto U di $\mathbb{R}^N$ ed f è una funzione continua e limitata in U. Una situazione più generale è descritta nel corollario seguente.

COROLLARIO 5.22. *Siano $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile ed $f : E \to \mathbb{K}$ una funzione con la seguente proprietà: esiste $T \subset E$ insieme trascurabile tale che la restrizione di f ad $E \setminus T$ sia continua. Allora,*

(a) *f è misurabile in E;*
(b) *se f è anche limitata in E e $|E| < +\infty$, f è integrabile in E.*

Il corollario precedente si applica in particolare al caso in cui l'insieme

$$D = \{x \in E : \ f \text{ non è continua in } x\}$$

dei punti di discontinuità di f è trascurabile: se ad esempio U è un insieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^N$ ed $f : U \to \mathbb{K}$ è una funzione limitata in U e discontinua in un insieme al più numerabile di punti di U, f risulta integrabile in U.
Per quanto riguarda la misurabilità e l'integrabilità di funzioni definite su intervalli della retta reale, limitiamoci a menzionare esplicitamente il caso delle funzioni a valori reali monotòne: se I è un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione monotòna, f è Borel misurabile in I e, se f è anche limitata e tale è anche l'intervallo I, allora f risulta integrabile in I. Questo accade in particolare quando I è un intervallo compatto. La stessa conclusione vale nel caso di una funzione continua a valori complessi definita su un intervallo compatto di $\mathbb{R}$.

Approssimazione di funzioni misurabili ed integrabili in $\mathbb{R}^N$. La restrizione ad insiemi aperti di $\mathbb{R}^N$ della misura di Lebesgue è una misura di Radon e quindi le funzioni Lebesgue misurabili definite in insiemi aperti di $\mathbb{R}^N$ si approssimano mediante funzioni continue a supporto compatto (Corollario 3.14). Nel caso della misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$ la validità della versione C^∞ del teorema di Urysohn (Teorema I–2.189) consente di realizzare la stessa approssimazione mediante funzioni C^∞ a supporto compatto.
Poiché in questa parte intervengono esclusivamente la $\sigma-$algebra e la misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$, conveniamo che tutti i riferimenti a misurabilità e misura siano alla $\sigma-$algebra e alla misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$ o di un opportuno insieme Lebesgue misurabile.

TEOREMA 5.23. *Siano $V \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e $f : V \to \mathbb{K}$ una funzione misurabile in V. Allora, esistono funzioni $\varphi_n \in C_c^\infty(V)$ $(n \geq 1)$ tali che*

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = f(x) \qquad \textit{per q.o. } x \in V.$$

Inoltre, se f è limitata risulta

$$\max_{x \in V} |\varphi_n(x)| \leq \sup_{x \in V} |f(x)|, \qquad n \geq 1.$$

Alla dimostrazione premettiamo la seguente versione C^∞ per funzioni semplici del teorema di Lusin.

LEMMA 5.24. *Sia* $s\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ *una funzione semplice e misurabile tale che*

$$|\{s \neq 0\}| < +\infty.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste* $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ *tale che*

$$|\{\varphi_\varepsilon \neq s\}| \leq \varepsilon \qquad e \qquad \max_{x\in\mathbb{R}^N} |\varphi_\varepsilon(x)| \leq \max_{x\in\mathbb{R}^N} |s(x)|.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$s(x) = s_1 1_{E_1}(x) + \cdots + s_n 1_{E_n}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

con $s_m \in \mathbb{K}$ e $s_m \neq 0$ per ogni m e con $E_1, \dots, E_n$ insiemi misurabili e disgiunti con $|E_m| < +\infty$ per ogni m. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni m sia K_m un insieme compatto tale che

$$K_m \subset E_m \qquad \text{e} \qquad |E_m \setminus K_m| \leq \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Poiché gli insiemi compatti $K_1, \dots, K_n$ sono disgiunti, esistono altrettanti insiemi aperti V_m disgiunti tali che

$$K_m \subset V_m \qquad \text{e} \qquad |V_m \setminus K_m| \leq \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Per la versione C^∞ del teorema di Urysohn (Teorema I–2.189) per ogni m esiste una funzione $\varphi_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $K_m \prec \varphi_m \prec V_m$. Si ha

$$\{\varphi_m \neq 1_{E_m}\} \subset (V_m \setminus K_m) \cup (E_m \setminus K_m)$$

e quindi per la funzione $\varphi_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^N)$ definita da

$$\varphi_\varepsilon(x) = s_1\varphi_1(x) + \cdots s_n\varphi_n(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

risulta $|\{\varphi_\varepsilon \neq s\}| \leq \varepsilon$. Inoltre, essendo gli insiemi V_m disgiunti, si ha

$$\max_{x\in\mathbb{R}^N} |\varphi(x)| = \max_{m=1,\dots,n} |s_m| = \max_{x\in\mathbb{R}^N} |s(x)|$$

e questo completa la dimostrazione. □

DIMOSTRAZIONE (TEOREMA 5.23.) Dividiamo la dimostrazione nei due casi seguenti.

Caso 1. $|V| < +\infty$.

Sia $f_h = \min\{|f|, h\}$ $(h \geq 1)$. Poiché V ha misura finita, per un'opportuna successione strettamente crescente di interi h_k $(k \geq 1)$ si ha

$$|\{f_{h_k} \neq f\}| \leq 1/2k, \qquad k \geq 1.$$

Per ogni k esiste allora una funzione semplice e misurabile $s_k\colon V \to \mathbb{K}$ tale che

$$|s_k(x)| \leq |f_{h_k}(x)| \quad \forall\, x \in V \qquad \text{e} \qquad \sup_{x\in V} \bigl|s_k(x) - f_{h_k}(x)\bigr| < 1/k$$

(Corollario 2.10) e per il lemma precedente a ciascuna funzione s_k possiamo associare una funzione $\varphi_k \in C_c^\infty(V)$ tale che

$$|\{\varphi_k \neq s_k\}| \leq 1/2k \qquad \text{e} \qquad \max_{x\in V} |\varphi_k(x)| \leq \max_{x\in V} |s_k(x)|.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}\{|\varphi_k - f| \geq 1/k\} &\subset \{|\varphi_k \neq s_k\} \cup \{|s_k - f_{h_k}| \geq 1/k\} \cup \{f_{h_k} \neq f\} = \\ &= \{|\varphi_k \neq s_k\} \cup \{|f_{h_k} \neq f|\}\end{aligned}$$

da cui segue

$$|\{|\varphi_k - f| \geq 1/k\}| \leq 1/2k + 1/2k = 1/k$$

per ogni k. Pertanto, a meno di sottosuccessioni, risulta $\varphi_k \to f$ quasi ovunque in V per $k \to +\infty$ (Corollario 2.74) ed inoltre, nel caso sia f limitata, si ha

$$\max_{x\in V} |\varphi_k(x)| \leq \max_{x\in V} |s_k(x)| \leq \sup_{x\in V} |f(x)|.$$

Caso 2. $|V| = +\infty$.

Siano V_n $(n \geq 1)$ una enumerazione degli insiemi aperti non vuoti

$$V \cap \{x : \ m-1 < \|x\| < m\}, \qquad m \geq 1,$$

cosicché risulta $V \setminus (\bigcup_n V_n) | = 0$. Per ogni n si ha $|V_n| < +\infty$ e quindi esiste una successione di funzioni $\varphi_{n,k} \in C_c^\infty(V)$ $(k \geq 1)$ con $\operatorname{supp}(\varphi_{n,k}) \subset V_n$ per ogni k tale che $\varphi_{n,k} \to f$ quasi ovunque in V_n per $k \to +\infty$. La successione di funzioni $\varphi_n \in C_c^\infty(V)$ $(n \geq 1)$ definita da

$$\varphi_n = \varphi_{1,n} + \varphi_{2,n} + \cdots \varphi_{n,n}, \qquad n \geq 1,$$

converge a f quasi ovunque in V e infine, se f è limitata in V, si ha

$$\max_{x \in V} |\varphi_n(x)| \leq \sup_{x \in V} |f(x)|$$

per ogni n poiché la stessa proprietà vale per ogni funzione $\varphi_{n,k}$ in V_n. $\square$

Corollario 5.25. *Siano $V \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e $f \colon V \to \mathbb{K}$ una funzione integrabile in V tale che*

$$\int_V f\varphi = 0, \qquad \varphi \in C_c^\infty(V).$$

Allora, $f(x) = 0$ per q.o. $x \in V$.

Dimostrazione. Sia $E \subset V$ un insieme misurabile in $\mathbb{R}^N$ e siano $\varphi_n \in C_c^\infty(V)$ $(n \geq 1)$ funzioni tali che $\varphi_n(x) \to 1_E(x)$ per q.o $x \in V$ con $|\varphi_n(x)| \leq 1$ per ogni $x \in V$ e per ogni n (Teorema 5.25). Si ha allora

$$\int_E f = \lim_{n \to +\infty} \int_V \varphi_n f = 0$$

per il teorema di convergenza dominata e dall'arbitrarietà dell'insieme misurabile $E \subset V$ segue la conclusione. $\square$

Concludiamo questa parte con un risultato di approssimazione specifico per le funzioni di una variabile. Una funzione semplice e misurabile $s \colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ della forma

$$s(x) = \sum_{1 \leq h \leq k} \lambda_h 1_{I_h}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

con $\lambda_h \in \mathbb{K}$ e I_h $(h = 1, \ldots, k)$ intervalli disgiunti si dice *funzione a gradini.*

Proposizione 5.26. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo (non degenere) e $f \colon I \to \mathbb{K}$ una funzione integrabile. Allora, esiste una successione $s_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ di funzioni a gradini tali che*

(a) *$s_n \to f$ quasi ovunque in I per $n \to +\infty$;*

(b) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_I |s_n - f| = 0.$

Inoltre, se f è limitata in I, si possono scegliere le funzioni s_n in modo che si abbia

(c) $\displaystyle\sup_{x \in I} |s_n(x)| \leq \sup_{x \in I} |f(x)|.$

Dimostrazione. Siano $\varepsilon > 0$ fissato e $u_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ una funzione semplice e misurabile tale che

- $u_\varepsilon = 0$ in $\mathbb{R} \setminus I$ e $|u_\varepsilon(x)| \leq |f(x)|$ per ogni $x \in I$;
- $\displaystyle\int_I |u_\varepsilon - f| = \leq \varepsilon$;

(Corollario 2.10). In particolare, u_ε risulta integrabile in I. Si ha

$$u_\varepsilon = \sum_{1\le h\le k} \lambda_h 1_{E_h}$$

con coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ non nulli e insiemi $E_1, \dots, E_k$ misurabili e disgiunti. Essendo u_ε integrabile in I, da $\lambda_h \neq 0$ segue che deve essere $|E_h| < +\infty$ per ogni h cosicché, scelto $K \geq |\lambda_h|$ per ogni h, per le proprietà della misura di Lebesgue esistono insiemi aperti e disgiunti $V_1, \dots, V_k$ contenuti in $\operatorname{int}(I)$ tali che risulti

$$\sum_h |V_h \triangle E_h| \leq \varepsilon/3K.$$

Per la funzione semplice e misurabile

$$t_\varepsilon = \sum_h \lambda_h 1_{V_h}$$

risulta allora

$$\int_I |t_\varepsilon - f| \leq \int_I |u_\varepsilon - f| + \int_I |u_\varepsilon - t_\varepsilon| \leq \varepsilon/3 + \sum_h |\lambda_h||V_h \triangle E_h| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3.$$

Poiché gli insiemi aperti V_h hanno misura finita, per effetto di Lemma 5.10 è possibile determinare per ogni h una famiglia finita $I_{h,1}, \dots, I_{h,j_h}$ ($j_h \geq 1$) di intervalli semiaperti a destra, disgiunti e contenuti in V_h tali che

$$|V_h \setminus (I_{h,1} \cup \dots \cup I_{h,j_h})| \leq \frac{\varepsilon}{3k|\lambda_h|}.$$

Rinumeriamo come $[a_m, b_m)$ ($m = 1, \dots, n$) gli intervalli disgiunti così ottenuti e denotiamo con λ_m il coefficiente λ_h corrispondente all'aperto V_h che contiene l'intervallo $[a_m, b_m)$. Per la funzione a gradini s_ε definita da

$$s_\varepsilon = \sum_{1\le m\le n} \lambda_m 1_{[a_m, b_m)}$$

si ha

$$\int_I |s_\varepsilon - t_\varepsilon| = \sum_{1\le h\le k} |\lambda_h||V_h \setminus (I_{h,1} \cup \dots \cup I_{h,j_h})| \leq \varepsilon/3$$

da cui segue infine

$$\int_I |s_\varepsilon - f| \leq \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1/j$ e ponendo $s_j = s_{1/j}$ per ogni $j \geq 1$ si ricava (b) e resta solo da provare (a). Per la disuguaglianza di Chebychev si ha

$$\varepsilon|\{|s_j - f| \geq \varepsilon\}| \leq \int_I |s_j - f| \leq 1/j, \qquad j \geq 1,$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Pertanto, $s_j \to f$ in misura in I per $j \to +\infty$ e quindi $s_n \to f$ quasi ovunque in I per $n \to +\infty$ per un'opportuna sottosuccessione $s_n = s_{j_n}$ (Corollario 2.74).
Infine, è evidente dalla costruzione delle funzioni a gradini s_n che, qualora sia $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in I$ per qualche $M \geq 0$, si abbia anche $|s_n(x)| \leq M$ per ogni x e n. □

Integrale di Riemann e integrale di Lebesgue. Sviluppiamo in questa parte alcune considerazioni relative all'integrale di Riemann per funzioni di una variabile reale alla luce della definizione di integrale secondo Lebesgue, dimostrando in particolare l'uguaglianza tra i due tipi di integrale quando il primo esiste. Per la definizione e le proprietà dell'integrale di Riemann di funzioni di una variabilie reale rinviamo a [4] o [14].

Sia $f\colon [a\,,b] \to \mathbb{K}$ $(-\infty < a \leq b < +\infty)$ una funzione limitata. Onde evitare ambiguità oppure l'uso di noiose circonlocuzioni, conveniamo temporaneamente di denotare gli integrali secondo Riemann e secondo Lebesgue di f sull'intervallo $[a\,,b]$ (qualora esistano) con i simboli

$$\mathrm{R}-\int_a^b f \qquad \text{e} \qquad \mathrm{L}-\int_a^b f$$

rispettivamente. Vale allora il risultato seguente.

Teorema 5.27. *Sia $f\colon [a\,,b] \to \mathbb{K}$ una funzione Riemann integrabile in $[a\,,b]$. Allora, f è Lebesgue integrabile in $[a\,,b]$ e si ha*

$$R-\int_a^b f = L-\int_a^b f.$$

In breve, l'integrale secondo Lebesgue estende l'integrale secondo Riemann. La funzione di Dirichlet $f = 1_{\mathbb{Q}}$ è un esempio di funzione che è Lebesgue integrabile nell'intervallo $[0\,,1]$ ma che non è Riemann integrabile nello stesso intervallo. Un ulteriore esempio della stessa situazione è dato dalla funzione caratteristica $g = 1_C$ dell'insieme di Cantor C (Esempio 5.14 e Teorema 5.28). Il risultato precedente si estende agli integrali di Riemann in più variabili ed agli integrali di Riemann generalizzati assolutamente convergenti per i quali rinviamo a [23].

Dimostrazione. La dimostrazione segue facilmente dalla definizione di integrale secondo Riemann per la quale rinviamo ad esempio a [4] o [14].
Poniamo per brevità $I = [a\,,b]$ e senza perdita di generalità supponiamo f reale. Essendo f Riemann integrabile in I per ipotesi, per ogni $n \geq 1$ esiste una suddivisione $P_n = \{a = t_{n,0} < t_{n,1} < \cdots < t_{n,k_n} = b\}$ di I $(k_n \geq 1)$ tale che, posto

$$\begin{cases} M_{n,k}^- = \inf\big\{f(t):\ t_{n,k-1} \leq t \leq t_{n,k}\big\} \\ M_{n,k}^+ = \sup\big\{f(t):\ t_{n,k-1} \leq t \leq t_{n,k}\big\} \end{cases} \qquad k = 1\,,\ldots,k_n,$$

e denotate con

$$S^{\pm}(f\,,P_n) = \sum_k M_{n,k}^{\pm}\,(t_{n,k} - t_{n,k-1})\,, \qquad n \geq 1,$$

le somme di Riemann inferiori e superiori di f relative alla suddivisione P_n, si ha $0 \leq S^+(f\,,P_n) - S^-(f\,,P_n) \leq 1/n$ per ogni n. Inoltre, possiamo supporre che sia $P_n \subset P_{n+1}$ per ogni n. Posto quindi

$$I_{n,k} = \begin{cases} [t_{n,k-1}\,,t_{n,k}) & 1 \leq k \leq k_n - 1 \\ [t_{n,k_n-1}\,,b] & k = k_n \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \alpha_{n,k}^- &= \inf\big\{f(t):\ t \in I_{n,k}\big\} \\ \alpha_{n,k}^+ &= \sup\big\{f(t):\ t \in I_{n,k}\big\}\,, \end{aligned}$$

le funzioni a gradini definite da

$$s_n^{\pm} = \sum_k \alpha_{n,k}^{\pm} 1_{I_{n,k}}, \qquad n \geq 1,$$

sono funzioni Borel misurabili e tali che $s_n^- \leq s_{n+1}^- \leq f \leq s_{n+1}^+ \leq s_n^+$ in I e

$$S^-(f\,,P_n) \leq \mathrm{L}-\int_a^b s_n^- \leq \mathrm{L}-\int_a^b s_n^+ \leq S^+(f\,,P_n)$$

per ogni n. Le funzioni definite da $s^- = \sup_n s_n^-$ e $s^+ = \inf_n s_n^+$ sono quindi Borel misurabili e tali che $s^- \leq f \leq s^+$ in I e

$$\mathrm{L}-\int_a^b \big(s^+ - s^-\big) = 0.$$

Quindi, risulta $s^+ = s^-$ quasi ovunque in I e questo prova che f è Lebesgue misurabile in I. Infine, da

$$S^-(f\,,P_n) \le \mathrm{L}-\int_a^b s_n^- \le \mathrm{L}-\int_a^b f \le \mathrm{L}-\int_a^b s_n^+ \le S^+(f\,,P_n)$$

per ogni n segue l'uguaglianza dell'integrale di Riemann e di Lebesgue di f. □

Possiamo infine utilizzare la misura di Lebesgue per caratterizzare le funzioni limitate Riemann integrabili.

Teorema 5.28 (H. Lebesgue). *Sia $f\colon [a\,,b] \to \mathbb{K}$ una funzione limitata e sia*

$$D = \big\{x \in [a\,,b] :\ f \text{ non è continua in } x\big\}$$

l'insieme dei punti di discontinuità di f. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) *f è Riemann integrabile in $[a\,,b]$;*
(b) *l'insieme D è Lebesgue trascurabile.*

In altre parole, una funzione limitata su un intervallo compatto $[a\,,b]$ è Riemann integrabile se e solo se è continua quasi ovunque in $[a\,,b]$. Per quanto possa essere evidente, è comunque opportuno evidenziare che l'ipotesi che l'insieme D dei punti di discontinuità di f sia trascurabile non significa che esista una funzione $g\colon [a\,,b] \to \mathbb{K}$ continua tale che l'insieme $\{g \ne f\}$ sia trascurabile né è sufficiente che esista un insieme trascurabile $T \subset [a\,,b]$ tale che la restrizione $f_{|[a\,,b]\setminus T}$ di f a $[a\,,b] \setminus T$ sia continua.

Dimostrazione. Non è restrittivo suppporre che f sia reale.

(a) Sia f Riemann integrabile sull'intervallo $[a\,,b]$ e, con le notazioni della dimostrazione di Teorema 5.27, poniamo

$$T = \{s^- < s^+\} \cup \left(\bigcup_n P_n\right)$$

cosicché risulta $|T| = 0$. Proviamo che f è continua in ogni punto $x \in [a\,,b] \setminus T$. Fissati dunque $x \in [a\,,b]\setminus T$ ed $\varepsilon > 0$, sia $n \ge 1$ tale che risulti $0 \le s_n^+(x) - s_n^-(x) \le \varepsilon$. Esiste allora $k' \in \{1, \dots, k_n\}$ tale che $t_{n,k'-1} < x < t_{n,k'}$ e $s_n^\pm(y) = \alpha_{n,k'}^\pm$ per ogni $t_{n,k'-1} < y < t_{n,k'}$. Quindi, scelto $0 < \delta < \min\{t_{n,k'} - x\,, x - t_{n,k'-1}\}$, per $|y-x| \le \delta$ risulta

$$0 \le |f(y) - f(x)| \le \alpha_{n,k'}^+ - \alpha_{n,k'}^- = s_n^+(x) - s_n^-(x) \le \varepsilon.$$

(b) Sia ora $|D| = 0$ e sia $M > 0$ tale che risulti $|f(x)| \le M$ per ogni $x \in [a\,,b]$. Fissato $\varepsilon > 0$, esistono $\{I_k\}_k$ intervalli compatti e non degeneri di $\mathbb{R}$ per i quali risulta $D \subset \bigcup_k I_k$ e

$$(*) \qquad \sum_k |I_k| < \varepsilon/4M$$

e possiamo sostituire ad essi altrettanti intervalli aperti che denotiamo ancora con I_k in modo tale che $(*)$ continui a valere. La funzione f è continua in ogni punto di

$$K = [a\,,b] \setminus \left(\bigcup_k I_k\right)$$

e quindi ad ogni punto $x \in K$ possiamo associare un intervallo I_x aperto in $\mathbb{R}$ contenente x tale che si abbia

$$\sup\big\{|f(y_2) - f(y_1)| :\ y_i \in I_x \cap [a\,,b]\ (i = 1, 2)\big\} \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Pertanto, $\{I_k\}_k \cup \{I_x : x \in K\}$ è un ricoprimento aperto di $[a,b]$ e quindi ammette un sottoricoprimento finito, diciamo $J_1, \ldots, J_n$ per qualche $n \geq 1$. Supponendo che tale ricoprimento sia minimale, possiamo supporre che esista una suddivisione $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ dell'intervallo $[a,b]$ e che gli intervalli $J_1, \ldots, J_n$ siano numerati in modo che risulti $[t_{m-1}, t_m] \subset J_m$ per ogni m. Quindi, ogni intervallo $[t_{m-1}, t_m]$ della suddivisione P di $[a,b]$ è contenuto in uno degli intervalli $\{I_k\}_k$ per i quali si ha $(*)$ oppure è tale che risulti

$$\sup\big\{|f(y_2) - f(y_1)| : \ t_{m-1} \leq y_i \leq t_m \ (i = 1,2)\big\} \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Pertanto, per le somme di Riemann inferiore e superiore di f relative alla suddivisione P si ha

$$\begin{aligned} 0 &\leq S^+(f,P) - S^-(f,P) \leq \\ &\leq \sum_m{}' \left(M_m^+ - M_m^-\right)(t_m - t_{m-1}) + \sum_m{}'' \left(M_m^+ - M_m^-\right)(t_m - t_{m-1}) \leq \end{aligned}$$

ove la prima sommatoria è estesa agli indici m relativi ad intervalli $[t_{m-1}, t_m]$ del primo tipo e la seconda agli indici corrispondenti ad intervalli del secondo tipo cosicché si ha, proseguendo la disuguaglianza

$$\leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum_m{}''(t_m - t_{m-1}) \leq \varepsilon$$

e questo prova la tesi. □

5.3. Questioni di non misurabilità

La costruzione della $\sigma-$algebra e della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ lascia aperte due domande naturali: esistono insiemi che non siano Lebesgue misurabili? Ed esistono insiemi Lebesgue misurabili che non siano anche Borel misurabili? La risposta ad entrambe le domande è affermativa in ogni dimensione.
In tutta questa sezione come nella precedente, in assenza di diversa esplicita indicazione, ogni riferimento a misurabilità e misura è di intendersi riferito alla $\sigma-$algebra e alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$.

Insiemi non misurabili secondo Lebesgue. Presentiamo in questa parte la costruzione di un insieme non misurabile secondo Lebesgue dovuta a G. Vitali. Questa costruzione utilizza l'assioma della scelta e muove dalla seguente proprietà degli insiemi di misura positiva: benché un insieme di misura positiva E possa essere privo di punti interni, ciò non può accadere per l'insieme delle differenze $E - E$.

Teorema 5.29 (H. Steinhaus). *Sia $E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ un insieme misurabile in $\mathbb{R}^N$ con $|E| > 0$. Allora,* $\operatorname{int}(E - E) \neq \varnothing$.

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che sia $|E| < +\infty$ cosicché, essendo E un insieme misurabile con misura positiva, esistono K compatto e V aperto con $K \subset E \subset V$ e $0 < |K| < |V| < 2|K|$. Sia quindi $0 < r < d(K, V^c)$ e proviamo che risulta $x \in K - K$ per ogni x con $\|x\| < r$. A questo scopo, consideriamo gli insiemi compatti K ed $x + K$. Entrambi sono contenuti in V poiché $\|x\| < r$ e non possono essere disgiunti altrimenti si avrebbe

$$2|K| = |K| + |x + K| = |K \cup (x + K)| \leq |V| < 2|K|.$$

Da $K \cap (x + K) \neq \varnothing$ segue $x \in K - K$ e quindi $E - E$ risulta essere un intorno dell'origine. □

Introduciamo ora la seguente relazione d'equivalenza in $\mathbb{R}^N$: due vettori $x, y \in \mathbb{R}^N$ si dicono *razionalmente equivalenti* se risulta

$$x - y \in \mathbb{Q}^N$$

e in tal caso si scrive $x \equiv y \mod (\mathbb{Q}^N)$ o brevemente $x \equiv y$.
Le cui classi d'equivalenza della relazione così definita sono le classi laterali del sottogruppo $\mathbb{Q}^N$ del gruppo additivo $(\mathbb{R}^N, +)$. Essendo questo un gruppo abeliano, $\mathbb{Q}^N$ ne è un sottogruppo normale e l'insieme quoziente $\mathbb{R}^N/\equiv$ è a sua volta un gruppo abeliano rispetto all'operazione indotta su di esso da $\mathbb{R}^N$.
Chiamiamo *insieme di Vitali in* $\mathbb{R}^N$ ogni insieme V di $\mathbb{R}^N$ contenente uno ed un solo elemento di ciascuna classe d'equivalenza di $\mathbb{R}^N/\equiv$.
L'esistenza di insiemi di Vitali in $\mathbb{R}^N$ è garantita dalla validità dell'assioma della scelta. Proviamo ora che nessun insieme di Vitali in $\mathbb{R}^N$ è misurabile.

TEOREMA 5.30 (G. Vitali). *Sia V un insieme di Vitali in $\mathbb{R}^N$. Allora, V non è misurabile.*

DIMOSTRAZIONE. Posto $V_q = q + V$ con $q \in \mathbb{Q}^N$, risulta

- $V_{q_1} \cap V_{q_2} = \varnothing$ per $q_1 \neq q_2$;
- $\bigcup \{V_q : q \in \mathbb{Q}^N\} = \mathbb{R}^N$;
- $\operatorname{int}(V_q - V_q) = \varnothing$ per ogni $q \in \mathbb{Q}^N$.

Infatti, le prime due affermazioni sono ovvie e, se fosse $\operatorname{int}(V_q - V_q) \neq \varnothing$ per qualche $q \in \mathbb{Q}^N$, esisterebbe $p \in \mathbb{Q}^N$ con $p \neq 0$ della forma $p = (x + q) - (y + q)$ per qualche $x, y \in V$. Quindi x ed y sarebbero razionalmente equivalenti e ciò contraddirebbe la definizione di V.
Se V fosse misurabile, tali sarebbero tutti i traslati V_q che quindi dovrebbero avere misura positiva per le prime due proprietà elencate sopra e per l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue. Ma in tal caso la differenza $V_q - V_q$ avrebbe interno non vuoto (Teorema 5.29) in contraddizione con la terza affermazione. □

Dalla dimostrazione del teorema precedente ricaviamo anche che non esiste alcuna misura numerabilmente additiva "naturale" e non banale (non identicamente nulla) definita su tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ dove l'aggettivo naturale sta ad indicare che la misura è invariante per traslazioni e finita sugli insiemi limitati. Più precisamente, non esiste nessuna misura positiva $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, +\infty]$ non banale con le seguenti proprietà:

- $\mu(A) = \mu(A + x)$ per ogni $A \subset \mathbb{R}^N$ ed $x \in \mathbb{R}^N$;
- $\mu(B) < +\infty$ se $B \subset \mathbb{R}^N$ è limitato.

Infatti, nella definizione di insieme di Vitali V si può assumere che sia $V \subset [0, 1]$. In tal caso, dalle prime due proprietà di V_q elencate nella dimostrazione di Teorema 5.29 e dall'ipotesi che μ sia invariante per traslazioni e finita sugli insiemi limitati seguirebbe necessariamente $\mu(V) = 0$ e dunque μ sarebbe banale. È possibile tuttavia costruire una misura positiva con tali proprietà se si accetta di sostituire la numerabile additività con la finita additività (Esempio **??**).
Esaminiamo ora più dettagliatamente la dislocazione – per così dire – degli insiemi non misurabili e la loro relazione con gli insiemi misurabili. A tal fine, è utile la seguente variante per la misura di Lebesgue della condizione di misurabilità di Caratheodory (Teorema 1.37).

LEMMA 5.31. *Sia $E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ un insieme misurabile in $\mathbb{R}^N$ con $|E| < +\infty$ e sia $A \subset E$ un suo sottoinsieme. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *A è misurabile in $\mathbb{R}^N$;*

(b) $|E| = |A|_* + |E \setminus A|_*$.

Dimostrazione. È sufficiente provare che (b) implica (a), essendo l'altra implicazione ovvia.
Sia $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ un insieme di Borel in $\mathbb{R}^N$ tale che risulti $E \setminus A \subset B$ e $|B| = |A|_*$. L'esistenza di tale insieme è conseguenza della definizione stessa di misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$. Si ha $E \setminus A \subset E \cap B \subset B$ e quindi risulta

$$|E \setminus A|_* \leq |E \cap B| \leq |B| = |E \setminus A|_*$$

cioè $|E \cap B| = |E \setminus A|_*$. Si ha allora

$$|E| = |E \cap B| + |E \setminus B| = |E \setminus A|_* + |E \setminus B|$$

cosicché deve essere $|E \cap B| = |A|_*$ per l'uguaglianza in (b). Risulta infine

$$E \setminus B \subset E \setminus (E \setminus A) = E \cap A \subset A$$

e la conclusione segue quindi da Corollario 1.39. □

Teorema 5.32. *Sia $E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ un insieme misurabile in $\mathbb{R}^N$ con $|E| > 0$. Allora,*

(a) *esiste un insieme $A \subset E$ che non è misurabile in $\mathbb{R}^N$;*
(b) *se $0 < |E| < +\infty$, esistono $A, B \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tali che*
- *$A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = E$;*
- *$|E| < |A|_* + |B|_*$.*

La prima affermazione mostra che gli insiemi non misurabili non sono confinati in qualche parte "sfortunata" di $\mathbb{R}^N$ ma sono – per così dire – dappertutto e la seconda affermazione garantisce che ogni insieme Lebesgue misurabile di misura positiva e finita si scompone in due parti non misurabili.

Dimostrazione. (a) Sia $E_n = E \cap V_{q_n}$ ove V è un insieme di Vitali e $\{q_n\}_n = \mathbb{Q}^N$ è un'enumerazione dei punti a coordinate razionali. Se ogni E_n fosse misurabile, si avrebbe $|E_n| > 0$ per qualche n da cui seguirebbe

$$\varnothing \neq \operatorname{int}(E_n - E_n) \subset \operatorname{int}(V_{q_n} - V_{q_n})$$

e ció contraddirebbe le proprietà degli insiemi di Vitali.
(b) Sia $A \subset E$ un insieme che non è Lebesgue misurabile e sia $B = E \setminus A$. Se fosse $|E| = |A|_* + |B|_*$, gli insiemi A, B sarebbero Lebesgue misurabili (Lemma 5.31). □

A conclusione di questa discussione sugli insiemi non misurabili, modifichiamo la costruzione di Vitali in modo da suddividere tutto lo spazio $\mathbb{R}^N$ in due parti non misurabili secondo Lebesgue aventi la proprietà di non contenere insiemi misurabili se non ovviamente quelli di misura nulla o equivalentemente di tagliare in modo non banale ogni insieme misurabile di misura positiva.

Teorema 5.33. *Esiste un insieme $A \subset \mathbb{R}^N$ con la seguente proprietà: per ogni insieme $E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ misurabile in $\mathbb{R}^N$ si ha*

$$E \subset A \text{ oppure } E \subset A^c \qquad \Longrightarrow \qquad |E| = 0.$$

Per la dimostrazione è opportuno introdurre le notazioni seguenti: siano

$$\mathbb{Z}_p^N = \left\{m = (m^1, \ldots, m^N) : \ m^n \text{ pari per ogni } n = 1, \ldots, N\right\};$$
$$\mathbb{Z}_d^N = \left\{m = (m^1, \ldots, m^N) : \ m^n \text{ pari per ogni } n = 1, \ldots, N\right\};$$

i sottoinsiemi di $\mathbb{Z}^N$ formati dai vettori con tutte le componenti pari e con tutte le componenti dispari rispettivamente e sia G il sottogruppo del gruppo additivo $\mathbb{R}^N$ definito da

$$G = \left\{q + \sqrt{2}m : \ q \in \mathbb{Q}^N \text{ e } m \in \mathbb{Z}_p^N \cup \mathbb{Z}_d^N\right\}.$$

formato dai vettori della forma $g = q+\sqrt{2}m$ con $q \in \mathbb{Q}^N$ e $m = (m^1, \dots, m^N) \in \mathbb{Z}^N$ aventi componenti m^n tutte pari o tutte dispari. In analogia con quanto fatto in precedenza, conveniamo di definire quindi G – *equivalenti* due vettori $x, y \in \mathbb{R}^N$ quando risulta

$$x - y \in G$$

e di scrivere in tal caso $x \equiv y \mod (G)$ o brevemente $x \equiv_G y$. La relazione così definita è evidentemente una relazione di equivalenza in $\mathbb{R}^N$.
Chiamiamo allora *insieme di Vitali di tipo G in* $\mathbb{R}^N$ ogni insieme V di $\mathbb{R}^N$ contenente uno ed un solo elemento di ciascuna classe d'equivalenza di $\mathbb{R}^N / \equiv_G$.
Anche in questo caso l'esistenza di insiemi siffatti è garantita dalla validità dell'assioma della scelta. Possiamo ora procedere alla dimostrazione di Teorema 5.33.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo

$$G_p = \left\{ g = q + \sqrt{2}m : \ q \in \mathbb{Q}^N \ \text{ e } m \in \mathbb{Z}_p^N \right\};$$
$$G_d = \left\{ g = q + \sqrt{2}m : \ q \in \mathbb{Q}^N \ \text{ e } m \in \mathbb{Z}_d^N \right\}.$$

Chiaramente G_p è un sottosgruppo di G e risulta

$$G = G_p \cup G_d \qquad \text{e} \qquad G_p \cap G_d = \varnothing.$$

Inoltre, G_p e G_d sono densi in $\mathbb{R}^N$ e risulta

$$G_d = \sqrt{2}(e_1 + \cdots + e_N) + G_p$$

ove $\{e_1, \dots, e_N\}$ denota la base caonica di $\mathbb{R}^N$.
Sia $V \subset \mathbb{R}^N$ un insieme di Vitali di tipo G. Posto $V_g = g+V$ per $g \in G$, esattamente come in Teorema 5.30 si ha

- $V_{g_1} \cap V_{g_2} = \varnothing$ per $g_1 \neq g_2$;
- $\bigcup \{V_g : \ g \in G\} = \mathbb{R}^N$;
- $\operatorname{int}(V_g - V_g) = \varnothing$ per ogni $g \in G$.

Sia quindi A l'insieme definito da

$$A = \bigcup_{g \in G_p} V_g.$$

Consideriamo allora un insieme misurabile E di $\mathbb{R}^N$ tale che $E \subset A$. Se fosse $|E| > 0$, si avrebbe $\operatorname{int}(E - E) \neq \varnothing$ e quindi, essendo G_d denso in $\mathbb{R}^N$, esisterebbero $g \in G_d$ e $g_i \in G_p$ e $v_i \in V$ $(i = 1, 2)$ tali che risulti

$$g = (g_1 + v_1) - (g_2 + v_2) \qquad \text{ovvero} \qquad g + (g_2 - g_1) = v_1 - v_2.$$

Essendo $g + (g_2 - g_1) \neq 0$, i vettori v_1 e v_2 sarebbero G – equivalenti e ciò è assurdo.
Consideriamo infine un insieme misurabile E di $\mathbb{R}^N$ tale che $E \subset A^c$. Si ha

$$A^c = \bigcup_{g \in G_d} V_g = \sqrt{2}(e_1 + \cdots + e_N) + A$$

da cui segue $E - \sqrt{2}(e_1 + \cdots + e_N) \subset A$. Essendo E misurabile in $\mathbb{R}^N$, anche $E - \sqrt{2}(e_1 + \cdots + e_N)$ è tale cosicché risulta $|E| = |E - \sqrt{2}(e_1 + \cdots + e_N)| = 0$ per quanto provato prima e questo completa la dimostrazione. □

Insiemi misurabili secondo Lebesgue ma non secondo Borel. L'esistenza di insiemi Lebesgue misurabili che non siano però Borel misurabili in $\mathbb{R}$ può essere dedotta in modo indiretto sulla base di un argomento di cardinalità. Infatti, l'insieme di Cantor C (Esempio 5.14) è equipotente all'intervallo $[0, 1]$ ed è trascurabile per la misura di Lebesgue cosicché dalla completezza della misura di Lebesgue si deduce che la σ – algebra di Lebesgue $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ha cardinalità $2^{\mathfrak{c}}$. D'altro canto, la σ – algebra di

Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ha cardinalità $\mathfrak{c}$ (Corollario 1.12. Poichè $\mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}}$ per il teorema di Cantor, esistono $2^{\mathfrak{c}}$ insiemi di $\mathbb{R}$ che sono Lebesgue misurabili ma non Borel misurabili.
Una dimostrazione alternativa e più costruttiva dell'esistenza di insiemi Lebesgue misurabili che non sono Borel misurabili utilizza l'insieme di Cantor C (Esempio 5.14) e la funzione di Cantor–Vitali che costruiremo esplicitamente nella sezione successiva (Esempio 6.6). Ci limitiamo qui ad evidenziarne le proprietà necessarie alla presente costruzione. La funzione di Cantor–Vitali $V\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gode delle seguenti proprietà:

(a) V è continua, crescente e tale che $V([0,1]) = [0,1]$;
(b) V è costante su ogni componente connessa di $[0,1] \setminus C$.

Poiché l'insieme $[0,1] \setminus C$ è un aperto di $\mathbb{R}$, le sue componenti connesse sono al più numerabili (in effetti numerabili), cioè esiste una famiglia numerabile $\{J_n\}_n$ di intervalli aperti, non vuoti e disgiunti di $\mathbb{R}$ tale che si abbia $[0,1] \setminus C = \bigcup_n J_n$. Si ha quindi

$$1 = \big|[0,1] \setminus C\big| = \sum_n |J_n|$$

e, alla luce di (b), poniamo $y_n = V(J_n)$ per ogni n cosicché si ha $V([0,1]\setminus C) = \{y_n\}_n$. Sia quindi $\Phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\Phi(x) = x + V(x), \qquad x \in [0,1].$$

Essa è continua, strettamente crescente e tale che $\Phi([0,1]) = [0,2]$ cosicché Φ è un omeomorfismo di $[0,1]$ su $[0,2]$. Inoltre, si ha $\Phi([0,1] \setminus C) = \bigcup_n (y_n + J_n)$ e da ciò segue

$$\big|\Phi([0,1] \setminus C)\big| \le \sum_n |y_n + J_n| = \sum_n |J_n| = 1$$

cosicché da

$$2 = \big|\Phi([0,1])\big| = \big|\Phi(C)\big| + \big|\Phi([0,1] \setminus C)\big|$$

segue $\big|\Phi(C)\big| \ge 1$. Abbiamo così provato che Φ è una funzione continua che manda l'insieme di Cantor avente misura nulla in un insieme compatto $\Phi(C)$ di misura di positiva[4]. Poiché $\big|\Phi(C)\big| \ge 1$, esiste un insieme $A \subset \Phi(C)$ non misurabile (Teorema 5.32 – (a)). Quindi, $\Phi^{-1}(A)$ è un insieme misurabile poiché contenuto in C che ha misura nulla ma non può essere un insieme Borel misurabile perchè altrimenti anche A sarebbe tale essendo Φ un omeomorfismo (Esercizio 1.4).

Paradosso di Banach–Tarski. Illustriamo in quest'ultima parte una sorprendente conseguenza dell' esistenza di insiemi non misurabili.
Siano A e B due insiemi di $\mathbb{R}^N$. Diremo che essi sono *equiscomponibili* se esistono due partizioni $\{A_1, \dots, A_n\}$ e $\{B_1, \dots, B_n\}$ di A e B rispettivamente ed altrettante rototraslazioni $\Phi_m(x) = R_m x + x_m$, $x \in \mathbb{R}^N$, ($x_m \in \mathbb{R}^N$ e $R_m \in SO(N)$ per ogni m) tali che

$$B_m = \Phi_m(A_m), \qquad m = 1, \dots, n.$$

In tal caso scriveremo $A \sim B$. È chiaro che la relazione appena introdotta è una relazione d'equivalenza. Denotata con B la palla chiusa di raggio unitario e centro nell'origine, possiamo enunciare il seguente sorprendente risultato.

TEOREMA 5.34 (S. Banach–A. Tarski). *Sia $B = B_1[0]$ la palla chiusa di $\mathbb{R}^3$ di raggio unitario e centro nell'origine e sia $x_0 \in \mathbb{R}^3$ un vettore con $\|x_0\| > 0$. Allora,*

$$B \sim B \cup (B + x_0).$$

[4]Nella terminolgia della successiva Sezione 5.5, Φ non è una N – funzione.

È evidente che la scomposizione di B e dell'unione delle sue due copie B e $B + x_0$ è fatta mediante insiemi non misurabili secondo Lebesgue ed è possibile dimostrare che la scomposizione può essere realizzata con esattamente cinque pezzi ma non con meno. Per questo e per molti altri risultati su questo e su argomenti collegati rinviamo a [20] o a [26].
La natura paradossale di questo risultato risiede in realtà solo nel pregiudizio ingenuo consistente nel ritenere che ogni insieme possa essere misurato in modo naturale e che la misura sia preservata dalle rototraslazioni. A ben vedere, il paradosso di Banach–Tarski non è – per così dire – più paradossale della rassicurante e familiare proprietà di Dedekind degli insiemi infiniti di cui in fondo è una variante.
Osserviamo inoltre che il paradosso di Banach–Tarski permette di escludere l'esistenza di una funzione d'insiemi finitamente additiva $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \to [0, +\infty]$ invariante per rototraslazioni e non banale (qui s'intende tale che $0 < \mu(B) < +\infty$). Come già osservato in precedenza, la non esistenza di una misura numerabilmente additiva con la stessa proprietà è conseguenza in particolare della costruzione di Vitali di insiemi non misurabili secondo Lebesgue.
Il paradosso di Banach–Tarski vale in dimensione $N \geq 3$ ma non vale in dimensione $N \leq 2$. Per $N = 1, 2$ è effettivamente possibile costruire una funzione positiva finitamente additiva definita su tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che sia invariante per rototraslazioni e non banale ([]). Il motivo di questa sorprendente differenza è di natura algebrica: il gruppo $SO(3)$ delle rotazioni di $\mathbb{R}^3$ contiene un sottogruppo libero con due generatori e lo stesso vale per $SO(N)$ con $N \geq 3$ mentre tutte le rotazioni di $SO(2)$ commutano tra loro cosicché $SO(2)$ non possiede alcun sottogruppo siffatto. L'esitenza di tale sottogruppo consente una decomposizione di $SO(3)$ simile in qualche modo a quella utilizzata nella costruzione di Vitali a partire dalla quale si ottiene in modo non banale la tesi. Rinviamo ancora a [26] per la dimostrazione ed un'ampia trattazione del problema.

5.4. La misura di Lebesgue come misura prodotto

Identificando lo spazio euclideo $\mathbb{R}^{M+N}$ con il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$, la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^{M+N}$ risulta essere il completamento della misura prodotto della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^M$ e della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ ed è pertanto possibile applicare alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^{M+N}$ i risultati esaminati in Sezione 2.4 ed in particolare i teoremi di Fubini–Tonelli (Teoremi 2.60 e 2.61). Presentiamo in questa parte una dimostrazione di tali risultati elementare e specifica per la misura di Lebesgue che prescinde dai risultati astratti sul prodotto di misure.
Poiché in questa sezione interverranno soltanto la $\sigma -$algebra e la misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$, ogni riferimento a misurabilità e integrabilità in $\mathbb{R}^N$ senza ulteriori specificazioni saranno sempre riferite alla $\sigma -$algebra e alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$.

La misura di Lebsgue come misura prodotto. Utilizziamo in questa parte le notazioni già introdotte in Sezione 2.4. Identifichiamo dunque lo spazio euclideo $\mathbb{R}^{M+N}$ $(M, N \geq 1)$ con il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ rappresentando conseguentemente i vettori di $\mathbb{R}^{M+N}$ nella forma

$$(x, y) \in \mathbb{R}^{M+N} \qquad \text{con } x \in \mathbb{R}^M \text{ e } y \in \mathbb{R}^N$$

e denotiamo quindi con $\pi_1 \in L(\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ e $\pi_2 \in L(\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ le proiezioni canoniche sui due fattori. Denotiamo inoltre con $\mathcal{L}^M \otimes \mathcal{L}^N$ la misura prodotto delle misure di Lebesgue in $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ definita sulla $\sigma -$algebra prodotto $\mathcal{S}(\mathbb{R}^M) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ delle $\sigma -$algebre di Lebesgue $\mathcal{S}(\mathbb{R}^M)$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ di $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ rispettivamente.

Il teorema seguente illustra la relazione tra la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^{M+N}$ definita sulla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N)$ di $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$ e la misura prodotto $\mathcal{L}^M\otimes\mathcal{L}^N$ definita sulla $\sigma-$algebra prodotto $\mathcal{S}(\mathbb{R}^M)\otimes\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 5.35. *Valgono le seguenti affermazioni:*

(a) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^M)\otimes\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N)$;
(b) $\mathcal{L}^{M+N}=\mathcal{L}^M\otimes\mathcal{L}^N$ *su* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^M)\otimes\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$;
(c) $\mathcal{L}^{M+N}$ *è il completamento di* $\mathcal{L}^M\otimes\mathcal{L}^N$.

Dimostrazione. (a) Siano $E_1\subset\mathbb{R}^M$ e $E_2\subset\mathbb{R}^N$ due insiemi misurabili di $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ rispettivamente. Risulta allora

$$E_1=B_1\cup T_1 \qquad \text{e} \qquad E_2=B_2\cup T_2$$

con $B_1\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ e $B_2\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ insiemi di Borel di $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ rispettivamente e $T_1\subset\mathbb{R}^M$ e $T_2\subset\mathbb{R}^N$ insiemi trascurabili di $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ rispettivamente (Corollario 5.7 $-$ (c)). Si ha dunque

$$E_1\times E_2=(B_1\times B_2)\cup(B_1\times T_2)\cup(T_1\times B_2)\cup(T_1\times T_2)$$

e, poiché $B_1\times B_2$ è un insieme di Borel in $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$ (Esercizio 1.4) e i restanti insiemi $B_1\times T_2$, $T_1\times B_2$ e $T_1\times T_2$ sono trascurabili in $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$, risulta $E_1\times E_2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N)$ e la conclusione segue dalla definizione di $\sigma-$algebra prodotto.

(b) Sia R un rettangolo compatto di $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$. Allora, R è della forma $R=S\times T$ con S, T rettangoli compatti di $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ e si ha

$$\mathcal{L}^{M+N}(S\times T)=\mathcal{L}^M(S)\mathcal{L}^N(T).$$

Siano quindi V e W insiemi aperti di $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ rispettivamente. Gli aperti V e W sono unione numerabile di cubi diadici non sovrapposti $\{S_i\}_i$ e $\{T_j\}_j$ (Lemma 5.10). Si ha allora

$$U=V\times W=\left(\bigcup_i S_i\right)\left(\bigcup_j T_j\right)=\bigcup_{i,j}S_i\times T_j$$

cosicché, essendo anche i rettangoli $S_i\times T_j$ non sovrapposti, risulta

$$\mathcal{L}^{M+N}(U)=\sum_{i,j}\mathcal{L}^{M+N}(S_i\times T_j)=\sum_{i,j}\mathcal{L}^M(S_i)\mathcal{L}^N(T_j)=$$
$$=\left(\sum_i\mathcal{L}^M(S_i)\right)\left(\sum_j\mathcal{L}^N(T_j)\right)=\mathcal{L}^M(V)\mathcal{L}^N(W).$$

Siano quindi H e K insiemi compatti di $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ rispettivamente. Per ogni coppia di insiemi aperti V e W di $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ tali che $H\subset V$ e $K\subset W$ si ha

$$\mathcal{L}^{M+N}(H\times K)\le\mathcal{L}^{M+N}(V\times W)=\mathcal{L}^M(V)\mathcal{L}^N(W)$$

e da ciò segue

$$\mathcal{L}^{M+N}(H\times K)\le\mathcal{L}^M(H)\mathcal{L}^N(K)$$

per la regolarità esterna della misura di Lebesgue. Viceversa, sia U aperto di $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$ tale che $H\times K\subset U$. Esistono allora V e W insiemi aperti di $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ rispettivamente tali che risulti $H\times K\subset V\times W\subset U$. Si ha allora

$$\mathcal{L}^{M+N}(U)\ge\mathcal{L}^{M+N}(V\times W)=\mathcal{L}^M(V)\mathcal{L}^N(W)\ge\mathcal{L}^M(H)\mathcal{L}^N(K)$$

e da ciò segue

$$\mathcal{L}^{M+N}(H\times K)\ge\mathcal{L}^M(H)\mathcal{L}^N(K).$$

Abbiamo così provato che risulta

$$\mathcal{L}^{M+N}(V\times W)=\mathcal{L}^M(V)\mathcal{L}^N(W) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}^{M+N}(H\times K)=\mathcal{L}^M(H)\mathcal{L}^N(K)$$

per V e W aperti di $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ rispettivamente e per H e K compatti di $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ rispettivamente. Consideriamo infine due insiemi misurabili e limitati E e F di $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ rispettivamente. Per ogni scelta di insiemi $H\,,K$ compatti e $U\,,V$ aperti tali che $H \subset E \subset U$ e $K \subset F \subset V$ si ha

$$\mathcal{L}^M(H)\mathcal{L}^N(K) = \mathcal{L}^{M+N}(H\times K) \le \mathcal{L}^{M+N}(E\times F) \le \mathcal{L}^{M+N}(U\times V) = \mathcal{L}^M(U)\mathcal{L}^N(V)$$

da cui segue $\mathcal{L}^{M+N}(E\times F) = \mathcal{L}^M(E)\mathcal{L}^N(F)$ (Corollario 5.8) e la stessa uguaglianza si estende ad insiemi E e F misurabili di $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ ma non necessariamente limitati per approssimazione.

Abbiamo così provato che risulta $\mathcal{L}^{M+N} = \mathcal{L}^M \otimes \mathcal{L}^N$ su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^M)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e quindi la stessa uguaglianza si estende alla $\sigma-$algebra prodotto $\mathcal{S}(\mathbb{R}^M)\otimes\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (Teorema 1.47).

(c) Consideriamo dapprima un insieme $E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N)$. Esistono allora due insiemi di Borel $B^\pm \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N)$ tali che risulti

$$B^- \subset E \subset B^+ \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}^{M+N}(B^+\setminus B^-) = 0.$$

Poiché risulta $\mathcal{B}(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (Esercizio 2.16) e $\mathcal{L}^{M+N} = \mathcal{L}^M\otimes\mathcal{L}^N$ su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^M)\otimes\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ per (b), il completamento di $\mathcal{L}^M\otimes\mathcal{L}^N$ estende $\mathcal{L}^{M+N}$: denotata con $\big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^M)\otimes\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\big)^*$ la $\sigma-$algebra e con $\big(\mathcal{L}^M\otimes\mathcal{L}^N\big)^*$ la misura ottenute come completamento della misura prodotto $\mathcal{L}^M\otimes\mathcal{L}^N$ definita su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^M)\otimes\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (Proposizione 1.28), risulta allora

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N) \subset \big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^M)\otimes\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\big)^* \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{M+N} = \big(\mathcal{L}^M\otimes\mathcal{L}^N\big)^* \text{ su } \mathcal{S}(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N).$$

Viceversa, consideriamo un insieme $E \in \big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^M)\otimes\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\big)^*$. Esistono allora due insiemi $E^\pm \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^M)\otimes\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tali che risulti

$$E^- \subset E \subset E^+ \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}^M\otimes\mathcal{L}^N(E^+\setminus E^-) = 0.$$

Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^M)\otimes\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N)$ e $\mathcal{L}^{M+N} = \mathcal{L}^M\otimes\mathcal{L}^N$ su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^M)\otimes\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ segue

$$E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}^{M+N}(E) = \big(\mathcal{L}^M\otimes\mathcal{L}^N\big)^*(E)$$

e questo conclude la dimostrazione. □

Teoremi di Tonelli e Fubini per la misura di Lebesgue. Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$ è il completamento dellla misura prodotto delle misure di Lebesgue in $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ cosicché per la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$ valgono in particolare i teoremi di Fubini–Tonelli (Teoremi 2.60 e 2.61) che riconducono il calcolo di misure e integrali in $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$ al calcolo di integrali iterati. Presentiamo in questa parte una dimostrazione diretta ed elementare di tali risultati per la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$ che non fa uso della nozione di prodotto di misure.

Utilizziamo anche in questa parte le notazioni di Sezione 2.4: identifichiamo lo spazio euclideo $\mathbb{R}^{M+N}$ $(M\,,N\ge 1)$ con il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$ rappresentando i vettori di $\mathbb{R}^{M+N}$ nella forma

$$(x\,,y) \in \mathbb{R}^{M+N} \qquad \text{con } x\in\mathbb{R}^M \text{ e } y\in\mathbb{R}^N$$

e denotiamo con $\pi_1 \in L(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M)$ e $\pi_2 \in L(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$ le proiezioni canoniche sui due fattori. Denotiamo inoltre con

$$E_x = \big\{y\in\mathbb{R}^N : (x\,,y)\in E\big\} \qquad \text{e} \qquad E^y = \big\{x\in\mathbb{R}^M : (x\,,y)\in E\big\}$$

le sezioni di un insieme $E \subset \mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$ ad $x\in\mathbb{R}^M$ ed $y\in\mathbb{R}^N$ fissati. Analogamente denotiamo con

$$f_x(y) = f(x\,,y),\quad y\in E_x \qquad \text{e} \qquad f_x(y) = f(x\,,y),\quad y\in E_x$$

le sezioni ad $x \in \pi_1(E)$ e $y \in \pi_2(E)$ fissati di una funzione $f : E \to Z$ a valori in un insieme arbitrario.
Il teorema seguente fornisce la formula di riduzione per la misura di Lebesgue.

Teorema 5.36. *Sia $E \subset \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile in $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$. Allora, esiste $T \subset \mathbb{R}^M$ insieme trascurabile in $\mathbb{R}^M$ tale che*

(a) *la sezione E_x è misurabile in $\mathbb{R}^N$ per ogni $x \in \mathbb{R}^M \setminus T$;*
(b) *la funzione*

$$m_E(x) = \begin{cases} \mathcal{L}^N(E_x) & \text{se } x \in \mathbb{R}^M \setminus T \\ +\infty & \text{se } x \in T \end{cases}$$

è misurabile in $\mathbb{R}^M$ e si ha

$$(*) \qquad \mathcal{L}^{M+N}(E) = \int_{\mathbb{R}^M} m_E(x)\, d\mathcal{L}^M(x).$$

Con abuso di notazione l'uguaglianza in $(*)$ si riscrive in maniera più suggestiva nella forma seguente

$$\mathcal{L}^{M+N}(E) = \int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{L}^N(E_x)\, d\mathcal{L}^M(x).$$

Vale inoltre ovviamente un analogo enunciato in cui i ruoli dei due fattori $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ sono scambiati.
La dimostrazione di Teorema 5.36 si articola nei lemmi seguenti relativi rispettivamente al caso di un insieme $E = U$ aperto e di un insieme $E = K$ compatto.

Lemma 5.37. *Sia $U \subset \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Allora,*

(a) *la sezione U_x è un insieme aperto in $\mathbb{R}^N$ per ogni $x \in \mathbb{R}^M$;*
(b) *la funzione $x \in \mathbb{R}^M \mapsto \mathcal{L}^N(U_x) \in [0, +\infty]$ è Borel misurabile in $\mathbb{R}^M$ e si ha*

$$\mathcal{L}^{M+N}(U) = \int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{L}^N(U_x)\, d\mathcal{L}^M(x).$$

Dimostrazione. Le sezioni di un insieme aperto sono aperte e quindi occorre provare solo (b). Sia

$$R = [a^1, b^1) \times \cdots \times [a^{M+N}, b^{M+N})$$

($a^m < b^m$ $m = 1, \ldots, M+N$) un rettangolo semiaperto di $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$. Allora R è della forma $R = S \times T$ con S e T rettangoli semiaperti di $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ rispettivamente. Si ha allora $\mathcal{L}^{M+N}(R) = \mathcal{L}^M(S)\mathcal{L}^N(T)$ e

$$\mathcal{L}^N(R_x) = \mathcal{L}^N(T) 1_S(x), \qquad x \in \mathbb{R}^M,$$

cosicché la funzione $x \in \mathbb{R}^M \mapsto \mathcal{L}^N(R_x) \in [0, +\infty]$ è Borel misurabile in $\mathbb{R}^M$.
Siano quindi $R_j = S_j \times T_j$ $(j \geq 1)$ rettangoli semiaperti e disgiunti di $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ tali che $\bigcup_j R_j = U$ (Lemma 5.10). Posto $I_x = \{j : x \in S_j\}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^M$, si ha

$$U_x = \bigcup_{j \in I_x} T_j$$

e per $j_1, j_2 \in I_x$ con $j_1 \neq j_2$ risulta $T_{j_1} \cap T_{j_2} = \varnothing$ cosicchè si ha

$$\mathcal{L}^N(U_x) = \sum_{j \in I_x} \mathcal{L}^N(T_j) = \sum_j \mathcal{L}^N(T_j) 1_{S_j}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^M.$$

La funzione $x \in \mathbb{R}^M \mapsto \mathcal{L}^N(U_x) \in [0, +\infty]$ è quindi Borel misurabile in $\mathbb{R}^M$ e si ha

$$\int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{L}^N(U_x)\, d\mathcal{L}^M(x) = \sum_j \mathcal{L}^N(T_j) \int_{\mathbb{R}^M} 1_{S_j}(x)\, d\mathcal{L}^M(x) =$$

$$= \sum_j \mathcal{L}^M(S_j)\mathcal{L}^N(T_j) = \sum_j \mathcal{L}^{M+N}(R_j) = \mathcal{L}^{M+N}(U)$$

e questo completa la dimostrazione. □

LEMMA 5.38. *Sia $K \subset \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ un insieme compatto. Allora,*

(a) *la sezione K_x è un insieme compatto in $\mathbb{R}^N$ per ogni $x \in \mathbb{R}^M$;*
(b) *la funzione $x \in \mathbb{R}^M \mapsto \mathcal{L}^N(K_x) \in [0, +\infty)$ è Borel misurabile in $\mathbb{R}^M$ e si ha*
$$\mathcal{L}^{M+N}(K) = \int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{L}^N(K_x)\, d\mathcal{L}^M(x).$$

DIMOSTRAZIONE. Le sezioni di un insieme compatto sono insiemi compatti (Teorema I–2.44) e quindi occorre provare solo (b). Siano a tal fine V_j $(j \geq 1)$ insiemi aperti e limitati tali che sia $V_{j+1} \subset V_j$ per ogni j e $K = \bigcap_j V_j$. Si ha allora

$$K_x = \bigcap\nolimits_j (V_j)_x \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}^N(K_x) = \lim_{j\to+\infty} \mathcal{L}^N((V_j)_x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^M$ per la continuità della misura lungo le successioni decrescenti di insiemi di misura finita e quindi la funzione $x \in \mathbb{R}^M \mapsto \mathcal{L}^N(K_x) \in [0, +\infty)$ risulta Borel misurabile in $\mathbb{R}^M$. Infine da

$$0 \leq \mathcal{L}^N(K_x) \leq \mathcal{L}^N((V_1)_x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^M,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^M$ e da

$$\int_{\mathbb{R}_M} \mathcal{L}^N((V_1)_x)\, d\mathcal{L}^M(x) = \mathcal{L}^{M+N}(V_1) < +\infty,$$

utilizzando il teorema di convergenza dominata e la continuità della misura lungo le successioni decrescenti di insiemi di misura finita si ricava la formula in (b). □

DIMOSTRAZIONE (TEOREMA 5.36). Sia dapprima E un insieme misurabile e limitato di $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$. Si ha $\mathcal{L}^{M+N}(E) < +\infty$ ed esistono allora due successioni di insiemi K_j compatti e V_j aperti $(j \geq 1)$ tali che risulti

$$K_j \subset E \subset V_j \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}^{M+N}(V_j \setminus K_j) \leq 1/j$$

per ogni j. Possiamo inoltre supporre che risulti $K_j \subset K_{j+1}$ e $V_{j+1} \subset V_j$ per ogni j e che, essendo E limitato, anche V_1 e di conseguenza anche tutti gli altri insiemi aperti V_j siano limitati. Allora, le funzioni definite da

$$\begin{aligned} k(x) &= \sup_j \mathcal{L}^N\big((K_j)_x\big) = \lim_{j\to+\infty} \mathcal{L}^N\big((K_j)_x\big) \\ v(x) &= \inf_j \mathcal{L}^N\big((V_j)_x\big) = \lim_{j\to+\infty} \mathcal{L}^N\big((V_j)_x\big) \end{aligned} \qquad x \in \mathbb{R}^M$$

sono Borel misurabili in $\mathbb{R}^M$ e tali che $0 \leq k(x) \leq v(x) < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}^M$. Per il lemma di Fatou (Teorema 2.22) risulta allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^M} [v(x) - k(x)]\; d\mathcal{L}^M(x) &\leq \liminf_{j\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{L}^N\big((V_j \setminus K_j)_x\big)\; d\mathcal{L}^M(x) = \\ &= \liminf_{j\to+\infty} \mathcal{L}^{M+N}(V_j \setminus K_j) = 0. \end{aligned}$$

Pertanto, l'insieme $T = \{k < v\}$ è trascurabile in $\mathbb{R}^M$ e per ogni punto $x \in \mathbb{R}^M \setminus T$ la corrispondente sezione E_x risulta misurabile in $\mathbb{R}^N$ e la funzione $m_E \colon \mathbb{R}^M \to [0, +\infty]$ definita in (b) risulta misurabile in $\mathbb{R}^M$ poiché si ha $k(x) = m_E(x) = v(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^M \setminus T$ (Proposizione 2.12). Si ha infine

$$\mathcal{L}^{M+N}(K_j) = \int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{L}^N\big((K_j)_x\big)\; d\mathcal{L}^M(x) \leq$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^M} k(x)\, d\mathcal{L}^M(x) = \int_{\mathbb{R}^M} m_E(x)\, d\mathcal{L}^M(x) = \int_{\mathbb{R}^M} v(x)\, d\mathcal{L}^M(x) \le$$
$$\le \int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{L}^N\big((V_j)_x\big)\ d\mathcal{L}^M(x) = \mathcal{L}^{M+N}(V_j)$$

per ogni j e l'uguaglianza in $(*)$ segue da

$$\lim_{j\to+\infty} \mathcal{L}^{M+N}(K_j) = \lim_{j\to+\infty} \mathcal{L}^{M+N}(V_j) = \mathcal{L}^{M+N}(E).$$

Consideriamo quindi il caso di un insieme E misurabile e illimitato di $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$. Sia $E_n = E \cap B_n$ $(n \ge 1)$ ove come al solito $B_n = B_n[0]$ denota la palla chiusa di centro nell'origine e raggio n e, per quanto provato nella prima parte della dimostrazione, per ogni n sia T_n un insieme trascurabile di $\mathbb{R}^M$ tale che $(E_n)_x$ sia misurabile in $\mathbb{R}^N$ per ogni $x \in \mathbb{R}^M \setminus T_n$. Non è evidentemente restrittivo supporre che sia anche $T_n \subset T_{n+1}$ per ogni n. L'insieme $T = \bigcup_n T_n$ è quindi trascurabile in $\mathbb{R}^M$ e risulta $E_x \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ per ogni punto $x \in \mathbb{R}^M \setminus T$. Inoltre, le funzioni $m_n = m_{E_n}$ definite da

$$m_n(x) = \begin{cases} \mathcal{L}^N\big((E_n)_x\big) & \text{se } x \in \mathbb{R}^M \setminus T_n \\ 0 & \text{se } x \in T_n \end{cases}$$

sono misurabili in $\mathbb{R}^M$ per ogni n e da $T_n \subset T_{n+1}$ e $(E_n)_x \subset (E_{n+1})_x$ per ogni $x \notin T_{n+1}$ segue che deve essere $m_n \le m_{n+1}$ in $\mathbb{R}^M$ per ogni n. Definendo allora la funzione $m_E\colon \mathbb{R}^M \to [0,+\infty]$ come nell'enunciato, risulta $m_n \to m_E$ puntualmente in $\mathbb{R}^M$ per $n \to +\infty$ e quindi la funzione m_E risulta misurabile in $\mathbb{R}^M$. Infine si ha

$$\mathcal{L}^{M+N}(E) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}^{M+N}(E_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^M} m_n\, d\mathcal{L}^M = \int_{\mathbb{R}_M} m_E\, d\mathcal{L}^M$$

per il teorema di convergenza monotòna e questo completa la dimostrazione. □

L'esempio seguente mostra che effettivamente non tutte le sezioni di un insieme misurabile sono tali e che neppure le proiezioni canoniche di un insieme misurabile sono necessariamente misurabili.

Esempio 5.39. Sia $A \subset [0,1]$ un insieme che non sia misurabile in $\mathbb{R}$ (Teorema 5.32). Allora, l'insieme

$$E = \{0\} \times A$$

è misurabile in $\mathbb{R}^2$ poiché la sua misura esterna di Lebesgue è nulla ma la sua sezione E_0 per $x = 0$ e la sua proiezione $\pi_2(E)$ sul secondo fattore di $\mathbb{R}^2$ è l'insieme $A \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

Dalla formula di riduzione per la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ si ricava per linearità e approssimazione la corrispondente formula per gli integrali delle funzioni misurabili in $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ a valori non negativi.

Teorema 5.40 (G. Fubini–L. Tonelli I). *Sia $f\colon \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \to [0,+\infty]$ una funzione misurabile in $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$. Allora, esiste $T \subset \mathbb{R}^M$ insieme trascurabile in $\mathbb{R}^M$ tale che*

(a) *la sezione $y \in \mathbb{R}^N \mapsto f_x(y) \in [0,+\infty]$ è misurabile in $\mathbb{R}^N$ per ogni $x \in \mathbb{R}^M \setminus T$;*

(b) *la funzione $\varphi\colon \mathbb{R}^M \to [0,+\infty]$ definita da*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f_x(y)\, d\mathcal{L}^N(y) & \textit{se } x \in \mathbb{R}^M \setminus T \\ +\infty & \textit{se } x \in T \end{cases}$$

è misurabile in $\mathbb{R}^M$ e si ha

$$(**) \qquad \int_{\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N} f(x,y)\, d\mathcal{L}^{M+N}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^M} \varphi(x)\, d\mathcal{L}^M(x).$$

Possiamo ripetere qui le considerazioni già svolte a margine di Teorema 2.60. Con abuso di notazione l'uguaglianza in (∗∗) si riscrive in maniera più suggestiva nella forma seguente

$$\int_{\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N} f(x,y)\,d\mathcal{L}^{M+N}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^M}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,d\mathcal{L}^N(y)\right)d\mathcal{L}^M(x)$$

e vale ovviamente un analogo enunciato in cui i ruoli dei due fattori $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ sono scambiati cosicché nelle ipotesi del teorema si ha l'uguaglianza degli integrali iterati:

$$\int_{\mathbb{R}^M}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,d\mathcal{L}^N(y)\right)d\mathcal{L}^M(x) = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,d\mathcal{L}^M(x)\right)d\mathcal{L}^N(y).$$

Inoltre, l'insieme trascurabile $T \subset \mathbb{R}^M$ dei punti x per i quali la sezione f_x di f non è misurabile in $\mathbb{R}^N$ può effettivamente essere non vuoto (Esempio 5.39).

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso di una funzione $f = s$ semplice, non negativa e misurabile in $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$ della forma

$$s(x) = s_1 1_{E_1}(x) + \cdots + s_j 1_{E_j}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

($s_i \geq 0$ e $E_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N)$ per $i = 1,\dots,j$ disgiunti). Per ogni i esiste allora un insieme T_i trascurabile in $\mathbb{R}^M$ tale che

- $(E_i)_x \subset \mathbb{R}^N$ sia misurabile in $\mathbb{R}^N$ per ogni $x \in \mathbb{R}^M \setminus T_i$;
- la funzione $m_i\colon \mathbb{R}^M \to [0,+\infty]$ definita da

  $$m_i(x) = \begin{cases} \mathcal{L}^N\big((E_i)_x\big) & \text{se } x \in \mathbb{R}^M\setminus T_i \\ +\infty & \text{se } x \in T_i \end{cases}$$

  sia misurabile in $\mathbb{R}^M$;

e risulti

$$\mathcal{L}^{M+N}(E_i) = \int_{\mathbb{R}^M} m_i(x)\,d\mathcal{L}^M(x).$$

L'insieme $T = T_1\cup\cdots\cup T_j$ è trascurabile in $\mathbb{R}^M$ e per ogni $x \notin T$ la funzione

$$s_x(y) = s_1 1_{(E_1)_x}(y) + \cdots + s_j 1_{(E_j)_x}(y), \qquad y \in \mathbb{R}^N,$$

è misurabile in $\mathbb{R}^N$ cosicché vale (a). Si ha inoltre

$$\varphi(x) = \int_{E_x} s_x(y)\,d\mathcal{L}^N(y) = s_1 m_{E_1}(x) + \cdots + s_j m_{E_j}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^M\setminus T,$$

e poiché la funzione

$$x \in \mathbb{R}^M \mapsto s_1 m_{E_1}(x) + \cdots + s_j m_{E_j}(x)$$

è misurabile in $\mathbb{R}^M$, tale è anche la funzione φ definita da (b) con $f = s$. Risulta infine

$$\int_{\mathbb{R}^M}\varphi\,d\mathcal{L}^M = \sum_{1\leq i\leq j} s_i \int_{\mathbb{R}^M} m_i(x)\,d\mathcal{L}^M(x) = \sum_{1\leq i\leq j} s_i\mathcal{L}^{M+N}(E_i) = \int_{\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N} s\,d\mathcal{L}^{M+N}$$

e questo completa la dimostrazione nel caso di una funzione semplice, non negativa e misurabile in $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$.

Nel caso generale di una funzione $f\colon \mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N \to [0,+\infty]$ non negativa e misurabile in $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$, consideriamo una successione di funzioni $s_k\colon \mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N \to [0,+\infty)$ $(k \geq 1)$ semplici, non negative e misurabili in $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$ tali che si abbia

- $s_k \leq s_{k+1}$ in $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$ per ogni k;
- $s_k \to f$ puntualmente in $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$ per $k \to +\infty$;

(Teorema 2.9) e, per quanto provato sopra, per ogni k denotiamo con T_k un insieme trascurabile in $\mathbb{R}^M$ tale che la sezione $y \in \mathbb{R}^N \mapsto (s_k)_x(y) \in [0, +\infty)$ di s_k sia misurabile in $\mathbb{R}^N$ per ogni $x \notin T_k$ e la funzione

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (s_k)_x(y)\, d\mathcal{L}^N(y) & \text{se } x \in \mathbb{R}^M \setminus T_k \\ +\infty & \text{se } x \in T_k \end{cases}$$

sia misurabile in $\mathbb{R}^M$ e tale che

$$(***) \qquad \int_{\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N} s_k(x, y)\, d\mathcal{L}^{M+N}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^M} \varphi_k(x)\, d\mathcal{L}^M(x).$$

L'insieme $T = \bigcup_k T_k$ è trascurabile in $\mathbb{R}^M$ e per ogni $x \notin T$ le corrispondenti sezioni $y \in \mathbb{R}^N \mapsto (s_k)_x(y) \in [0, +\infty)$ di tutte le funzioni s_k sono misurabili in $\mathbb{R}^N$. Poiché risulta

$$\lim_{k \to +\infty} (s_k)_x(y) = f_x(y), \qquad y \in \mathbb{R}^M,$$

per ogni x, le sezioni $y \in \mathbb{R}^N \mapsto f_x(y) \in [0, +\infty]$ risultano misurabili in $\mathbb{R}^N$ per ogni $x \notin T$ e quindi la funzione φ in (b) risulta ben definita. Inoltre, si ha

$$\lim_{k \to +\infty} \varphi_k(x) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^M,$$

per il teorema di convergenza monotòna e quindi φ è misurabile in $\mathbb{R}^M$. Infine, da $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$ in $\mathbb{R}^M$ per ogni k, per lo stesso motivo si può passare al limite in ambo i membri di $(***)$ ricavando così $(**)$ e questo completa la dimostrazione. □

Ricaviamo infine la formula di riduzione per gli integrali di funzioni integrabili in $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ a valori reali o complessi.

TEOREMA 5.41 (G. Fubini–L. Tonelli II). *Sia $f \colon \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ una funzione integrabile in $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$. Allora, esiste $T \subset \mathbb{R}^M$ insieme trascurabile in $\mathbb{R}^M$ tale che*

(a) *la sezione $y \in \mathbb{R}^N \mapsto f_x(y) \in \mathbb{K}$ è integrabile in $\mathbb{R}^N$ per ogni $x \in \mathbb{R}^M \setminus T$;*

(b) *la funzione $\varphi \colon \mathbb{R}^M \to \mathbb{K}$ definita da*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f_x(y)\, d\mathcal{L}^N(y) & \text{se } x \in \mathbb{R}^M \setminus T \\ 0 & \text{se } x \in T \end{cases}$$

è integrabile in $\mathbb{R}^M$ e si ha

$$\int_{\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N} f(x, y)\, d\mathcal{L}^{M+N}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^M} \varphi(x)\, d\mathcal{L}^M(x).$$

DIMOSTRAZIONE. Non è restrittivo supporre che la funzione f sia a valori reali. Allora la parte positiva f^+ e la parte negativa f^- di f sono funzioni non negative e misurabili in $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ tali che

$$\int_{\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N} f^{\pm}\, d\mathcal{L}^{M+N} \leq \int_{\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N} |f|\, d\mathcal{L}^{M+N} < +\infty.$$

Per il teorema di Fubini–Tonelli per funzioni non negative (Teorema 5.40) esistono allora $T^{\pm}$ insiemi trascurabili di $\mathbb{R}^M$ tali che le sezioni

$$y \in \mathbb{R}^N \mapsto f_x^{\pm}(y) = (f^{\pm})_x(y) \in [0, +\infty)$$

sono misurabili in $\mathbb{R}^N$ per ogni $x \notin T^{\pm}$ e le funzioni

$$\varphi^{\pm}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f_x^{\pm}(y)\, d\mathcal{L}^N(y) & \text{se } x \in \mathbb{R}^M \setminus T^{\pm} \\ 0 & \text{se } x \in T^{\pm} \end{cases}$$

sono misurabili in $\mathbb{R}^M$ e tali che

$$\int_{\mathbb{R}^M} \varphi^\pm \, d\mathcal{L}^M = \int_{\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N} f^\pm \, d\mathcal{L}^{M+N} \leq \int_{\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N} |f| \, d\mathcal{L}^{M+N} < +\infty.$$

Conseguentemente, le funzioni $\varphi^\pm$ sono integrabili in $\mathbb{R}^M$. Inoltre, l'insieme

$$T = T^+ \cup T^- \cup \{\varphi^+ < +\infty\} \cup \{\varphi^- < +\infty\}$$

è trascurabile in $\mathbb{R}^M$ e per ogni $x \notin T$ la sezione $y \in \mathbb{R}^n \mapsto f_x = f_x^+ - f_x^-$ di f è integrabile in $\mathbb{R}^N$ cosicché la funzione φ in (b) risulta ben definita. Inoltre, si ha $\varphi(x) = \varphi^+(x) - \varphi^-(x)$ per ogni $x \notin T$ e quindi φ risulta integrabile in $\mathbb{R}^M$. Infine si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^M} \varphi \, d\mathcal{L}^M &= \int_{\mathbb{R}^M} \varphi^+ \, d\mathcal{L}^M - \int_{\mathbb{R}^M} \varphi^- \, d\mathcal{L}^M = \\ &= \int_{\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N} f^+ \, d\mathcal{L}^{M+N} - \int_{\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N} f^- \, d\mathcal{L}^{M+N} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N} f \, d\mathcal{L}^{M+N} \end{aligned}$$

e questo completa la dimostrazione. □

Relativamente alle ipotesi dei risultati precedenti, si possono adattare alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ gli esempi di Sezione 2.4: l'ipotesi di integrabilità della funzione f in Teorema 5.41 non può essere eliminata (Esercizio 5.19) e, assumendo la validità dell'ipotesi del continuo, lo stesso vale anche per l'ipotesi di misurabilità in $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ dell'insieme E in Teorema 5.36 e della funzione f in Teorema 5.40 (Esercizio 5.20).
Concludiamo questa parte con la versione per funzioni fattorizzate del teorema di Fubini–Tonelli. La dimostrazione è ovvia.

Corollario 5.42. *Siano $f\colon \mathbb{R}^M \to \mathbb{K}$ e $g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ funzioni integrabile in $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ rispettivamente. Allora, la funzione*

$$f \otimes g(x,y) = f(x)g(y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N,$$

è integrabile in $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ e risulta

$$\int_{\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N} f(x)g(y) \, d\mathcal{L}^{M+N}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^M} f(x) \, d\mathcal{L}^M(x) \cdot \int_{\mathbb{R}^N} g(y) \, d\mathcal{L}^N(y).$$

Questo risultato si estende per induzione al caso di un numero qualunque di fattori.

5.5. Cambiamento di variabili negli integrali

Esaminiamo in questa sezione come cambia la misura di un insieme – e di conseguenza come cambiano anche gli integrali – per effetto di un cambiamento di variabili $y = \Phi(x)$ di $\mathbb{R}^N$. Più esplicitamente, dato un insieme E di $\mathbb{R}^N$, sotto quali ipotesi sul cambiamento di variabili Φ si ha che $\Phi(E)$ è misurabile secondo Lebesgue quando E è tale? Ed in tal caso, come è possibile esprimere la misura di $\Phi(E)$ in funzione di E e di Φ? Esamineremo queste due questioni, prima nel caso di cambiamenti di variabili lineari e successivamente nel caso di cambiamenti di variabili differenziabili.
I risultati di questa sezione sono elementari nel senso che prescindono dal teorema di Radon–Nikodym (Teorema 4.20). Formule di cambiamento di variabili più generali di quelle qui presentate saranno esaminate nella successiva Sezione **??**.
Anche in questa sezione interverranno soltanto la σ−algebra e la misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$ e quindi ogni riferimento a misurabilità e integrabilità di insiemi e funzioni definite in $\mathbb{R}^N$ senza ulteriori specificazioni sarà sempre da intendersi riferito alla σ−algebra e alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$.

N − funzioni. Siano $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme e $\Phi\colon A \to \mathbb{R}^N$ una funzione. Se la funzione Φ ha la proprietà di mandare insiemi misurabili contenuti in A in insiemi che sono ancora misurabili, in particolare Φ deve essere tale che

$$T \subset A \text{ e } T \text{ trascurabile} \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(T) \text{ trascurabile}$$

poichè ogni insieme misurabile di misura positiva in $\mathbb{R}^N$ contiene un insieme che non è misurabile (Teorema 5.32 − (a)). Questa osservazione motiva la definizione seguente.

Definizione 5.43. Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme. Una funzione $\Phi\colon A \to \mathbb{R}^N$ con la seguente proprietà:

$$T \subset A \text{ misurabile e } |T| = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\Phi(T)| = 0$$

si dice N *–funzione in* A. □

La proprietà espressa nella definizione precedente si dice anche *proprietà* N *di Lusin* e le N − funzioni in A sono quindi le funzioni che hanno la proprietà N di Lusin in A.
Vedremo tra poco che le funzioni lipschitziane e le funzioni differenziabili sono N − funzioni. Più interessante ancora è osservare che la funzione di Cantor–Vitali del successivo Esempio 6.6 non è tale poiché manda l'insieme di Cantor C (Esempio 5.14) in un compatto di misura piena in $[0, 1]$.
Il ruolo delle N − funzioni in relazione al problema considerato è evidenziato dal seguente risultato elementare.

Teorema 5.44. *Siano* $A \subset \mathbb{R}^N$ *un insieme e* $\Phi\colon A \to \mathbb{R}^N$ *una* N *–funzione continua in* A*. Allora,*

$$E \subset A \text{ e } E \text{ misurabile in } \mathbb{R}^N \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(E) \text{ misurabile in } \mathbb{R}^N.$$

Dimostrazione. Sia $E \subset A$ un insieme misurabile in $\mathbb{R}^N$. Allora E è della forma

$$E = \left(\bigcup_n K_n \right) \cup T$$

con K_n compatto ($n \geq 1$) e T trascurabile (Corollario 5.8). Risulta quindi

$$\Phi(E) = \left(\bigcup_n \Phi(K_n) \right) \cup \Phi(T)$$

e questo prova l'asserto. □

Proviamo ora che le funzioni lipschitziane e le funzioni differenziabili hanno la proprietà N di Lusin.

Teorema 5.45. *Siano* $A \subset \mathbb{R}^N$ *un insieme e* $\Phi \in \mathrm{Lip}(A, \mathbb{R}^N)$ *una funzione lipschitziana. Allora, esiste* $K \geq 0$ *tale che risulti*

$$|\Phi(B)|_* \leq K |B|_*$$

per ogni $B \subset A$*.*

In particolare, ogni funzione $\Phi \in \mathrm{Lip}(A, \mathbb{R}^N)$ è una N − funzione continua in A e la costante K può essere stimata con

$$K \leq [N \,\mathrm{Lip}(\Phi)]^N.$$

Questa stima non è tuttavia ottimale.

Dimostrazione. Per il lemma di McShane (Teorema I–3.33) applicato ad ogni componente Φ^n $(n = 1, \ldots, N)$ di Φ possiamo supporre che sia $A = \mathbb{R}^N$.
Sia $K = \mathrm{Lip}(\Phi)$ la costante di Lipschitz di Φ. Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $l > 0$ risulta

$$Q_l[x] \subset B_{\sqrt{N}l}[x] \qquad \text{e} \qquad \Phi\big(B_{\sqrt{N}l}[x]\big) \subset B_{K\sqrt{N}l}[\Phi(x)] \subset Q_{K\sqrt{N}l}[\Phi(x)].$$

Sia quindi $B \subset A$ un insieme qualunque e siano $Q_k = Q_{l_k}[x_k]$ $(k \geq 1)$ cubi compatti e non degeneri della forma $(*)$ tali che $B \subset \bigcup_k Q_k$. Posto allora

$$Q'_k = Q_{K\sqrt{N}l_k}[\Phi(x_k)], \qquad k \geq 1,$$

risulta $\Phi(Q_k) \subset Q'_k$ per ogni k e da ciò segue

$$\Phi(B) \subset \bigcup_k \Phi(Q_k) \subset \bigcup_k Q'_k \qquad \text{e} \qquad \sum_k |Q'_k| = \Big(K\sqrt{N}\Big)^N \sum_k |Q_k|.$$

Passando all'estremo inferiore tra tutte le famiglie numerabili di cubi compatti e non degeneri della forma $(*)$ che ricoprono B si prova l'asserto. (Teorema 5.5). $\square$

Teorema 5.46. *Siano $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme e $\Phi\colon A \to \mathbb{R}^N$ una funzione tale che*

$$\limsup_{y \to x} \frac{\|\Phi(y) - \Phi(x)\|}{\|y - x\|} < +\infty, \qquad x \in A \cap A'.$$

Allora, Φ è una N –funzione continua in A.

In particolare ciò vale con $A = U$ aperto e $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^N$ funzione differenziabile in U.

Dimostrazione. È conveniente in questa dimostrazione utilizzare la metrica d_∞ di $\mathbb{R}^N$ definita da

$$d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max_{n=1,\ldots,N} |x^n - y^n|$$

per ogni $x = (x^1, \ldots, x^N), y = (y^1, \ldots, y^N) \in \mathbb{R}^N$. Tale metrica è equivalente alla metrica euclidea ed i cubi chiusi $Q_l[x]$ risultano essere le palle chiuse in tale metrica.
La funzione Φ è chiaramente continua in ogni punto di A e, essendo l'insieme $A \setminus A'$ al più numerabile, possiamo supporre che sia $A \subset A'$. Poniamo quindi

$$K(x) = \limsup_{y \to x} \frac{\|f(y) - f(x)\|_\infty}{\|y - x\|_\infty}, \qquad x \in A,$$

e, per ogni $k, n \geq 1$, denotiamo con $A_{k,n}$ l'insieme costituito da tutti i punti $x \in A$ con la seguente proprietà: per ogni cubo compatto $Q = Q_l[x']$ $(x' \in \mathbb{R}^N$ e $l > 0)$ tale che $x \in Q$ e $0 < l \leq 1/k$ si ha

$$|\Phi(A \cap Q)|_* \leq n|Q|.$$

Proviamo che risulta

$$A = \bigcup_{n,k} A_{k,n}.$$

A tal fine, fissato $x \in A$, scegliamo $n \geq 1$ tale che $n > [2K(x)]^N$. Esiste allora $r > 0$ tale che

$$y \in A \text{ e } \|y - x\|_\infty \leq r \qquad \Longrightarrow \qquad \|\Phi(y) - \Phi(x)\|_\infty \leq \big(\sqrt[N]{n}/2\big)\, \|y - x\|_\infty$$

e quindi, scegliendo $k \geq 1$ tale che $1/k \leq r/2$, per ogni cubo compatto $Q = Q_l[x']$ $(x' \in \mathbb{R}^N$ e $l > 0)$ tale che $x \in Q$ e $0 < l \leq 1/k$ si ha

$$y \in A \cap Q \quad \Longrightarrow \quad \|y - x\|_\infty \leq 2l \leq r \quad \Longrightarrow \quad \|\Phi(y) - \Phi(x)\|_\infty \leq \big(\sqrt[N]{n}/2\big)\, \|y - x\|_\infty$$

e dunque risulta

$$y \in A \cap Q \quad \Longrightarrow \quad \Phi(y) \in Q_{\sqrt[N]{n}l}[\Phi(x)]$$

e da ciò segue

$$|\Phi(A \cap Q)|_* \leq n|Q|$$

per ogni cubo Q siffatto. Quindi $x \in A_{k,n}$ e abbiamo così provato l'asserto. Consideriamo ora un insieme T trascurabile in $\mathbb{R}^N$ con $T \subset A$. Si ha

$$T = \bigcup_{k,n} T \cap A_{k,n}$$

ed è quindi sufficiente provare che risulta $|\Phi(T \cap A_{n,k})| = 0$ per ogni n e k. Poiché ogni insieme $T \cap A_{n,k}$ è trascurabile, fissato $\varepsilon > 0$, esistono $Q_j^{k,n}$ $(j \geq 1)$ cubi compatti e non degeneri della forma $(*)$ tali che si abbia

$$T \cap A_{n,k} \subset \bigcup_j Q_j^{k,n} \qquad \text{e} \qquad \sum_j |Q_j^{k,n}| \leq \varepsilon/n.$$

Possiamo ovviamente supporre che sia $(T \cap A_{k,n}) \cap Q_j^{k,n} \neq \varnothing$ per ogni j e che il semilato di ogni cubo $Q_j^{k,n}$ sia minore o uguale a $1/k$ cosicché si ha

$$|\Phi(T \cap A_{k,n})|_* \leq \sum_j \left|\Phi\left((T \cap A_{k,n}) \cap Q_j^{k,n}\right)\right|_* \leq n \sum_j |Q_j^{k,n}| \leq \varepsilon$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue l'asserto. □

Cambiamenti di variabili lineari. Esaminiamo in questa parte come cambia la misura di Lebesgue di un insieme per effetto di una trasformazione lineare.

TEOREMA 5.47. *Siano $L \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^N)$ un operatore lineare e $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile in $\mathbb{R}^N$. Allora,*

(a) *$L(E)$ è misurabile in $\mathbb{R}^N$;*
(b) $|L(E)| = |\det L| \cdot |E|$.

L'uguaglianza in (b) va intesa nel senso della convenzione per cui risulta $0 \cdot \infty = 0$. La dimostrazione si articola nei lemmi seguenti.

LEMMA 5.48. *Sia $L \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^N)$ un isomorfismo di $\mathbb{R}^N$. Allora,*

(a) *L è una N–funzione in $\mathbb{R}^N$;*
(b) *esiste $c > 0$ tale che $|L(E)| = c|E|$ per ogni insieme E misurabile in $\mathbb{R}^N$.*

DIMOSTRAZIONE. Gli isomorfismi lineari $L, L^{-1} \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^N)$ sono funzioni lipschitziane in $\mathbb{R}^N$ e quindi risulta

$$(*) \qquad (1/K)|A|_* \leq |L(A)|_* \leq K|A|_*, \qquad A \subset \mathbb{R}^N,$$

per qualche costante $K > 0$ opportuna (Teorema 5.45). Quindi vale (a) e la funzione $\mu\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to [0, +\infty]$ definita da

$$\mu(E) = |L(E)|, \qquad E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

risulta essere una misura positiva sulla σ–algebra $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ non identicamente nulla, finita sui compatti e invariante per traslazioni. Inoltre da $(*)$ si ricava che μ è anche completa e la conclusione segue quindi da Teorema 5.9. □

Per completare la dimostrazione di Teorema 5.47 resta solo da provare che la costante di proporzionalità in Lemma 5.48 risulta essere $c = |\det L|$ e ciò si ricava dall'esame di alcuni tipi di isomorfismi di $\mathbb{R}^N$ di tipo speciale. A tal fine, denotata con $\{e_1, \ldots, e_N\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^N$, diciamo che un operatore lineare $L \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^N)$ $(N \geq 2)$ è un operatore lineare di

- *scambio* se $L = S_{i,j}$ $(i \neq j)$ ove $S_{i,j}e_n = \begin{cases} e_j & \text{se } n = i \\ e_i & \text{se } n = j \\ e_n & \text{se } n \neq i \text{ e } n \neq j; \end{cases}$
- *taglio* se $L = T_{i,j}$ $(i \neq j)$ ove $T_{i,j}e_n = \begin{cases} e_i + e_j & \text{se } n = j \\ e_n & \text{se } n \neq j; \end{cases}$
- *dilatazione* se $L = D_{i,\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$ ove $D_{i,\lambda}e_n = \begin{cases} \lambda e_i & \text{se } n = i \\ e_n & \text{se } n \neq i. \end{cases}$

Rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^N$, gli operatori lineari di scambio $S_{i,j}$, di taglio $T_{i,j}$ e di dilatazione $D_{i,\lambda}$ sono rappresentati dalle matrici le cui colonne nell'ordine sono

$$S_{i,j} = \begin{cases} (e_1, \dots, e_j, \dots, e_i, \dots, e_N) & \text{se } i < j \\ (e_1, \dots, e_i, \dots, e_j, \dots, e_N) & \text{se } i > j, \end{cases}$$

$$T_{i,j} = \begin{cases} (e_1, \dots, e_i, \dots, e_i + e_j, \dots, e_N) & \text{se } i < j \\ (e_1, \dots, e_i + e_j, \dots, e_i, \dots, e_N) & \text{se } i > j, \end{cases}$$

$$D_{i,\lambda} = (e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_N).$$

Si ha evidentemente $S_{i,j} = S_{j,i}$ per ogni $i \neq j$. Inoltre, ogni operatore lineare elementare è un isomorfismo di $\mathbb{R}^N$ su se stesso e si ha

$$\det S_{i,j} = -1; \qquad \det T_{i,j} = 1; \qquad \det D_{i,\lambda} = \lambda;$$

per ogni $1 \leq i, j \leq N$ e $i \neq j$ o per ogni $i = 1, \dots, N$ e $\lambda \neq 0$.
Gli operatori lineari dei tre tipi indicati si dicono *isomorfismi elementari*.
Proviamo ora che la tesi di Teorema 5.47 vale per ogni operatore lineare elementare e che ogni isomorfismo di $\mathbb{R}^N$ si fattorizza come prodotto di composizione di operatori lineari elementari.

Lemma 5.49. *Sia $L \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^N)$ un isomorfismo elementare. Allora,*

$$|L(E)| = |\det L| \cdot |E|, \qquad E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Dimostrazione. La tesi è evidente quando L è un operatore lineare di scambio e non è difficile verificare che vale anche per gli operatori lineari di dilatazione indipendentemente dal segno di $\lambda \neq 0$. Ci resta quindi da considerare il caso dell'operatore di taglio $L = T_{i,j}$ $(i \neq j)$ ed è sufficiente considerare il solo caso $T_{1,2}$ poiché risulta

$$T_{i,j} = S_{2,j} \circ S_{1,i} \circ T_{1,2} \circ S_{1,i} \circ S_{2,j}, \qquad i \neq j.$$

Consideriamo dapprima il caso $N = 2$ e sia $R = [a, b] \times [c, d]$ $(a < b$ e $c < d)$ un rettangolo compatto e non degenere di $\mathbb{R}^2$. La matrice che rappresenta $T_{1,2}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $T_{1,2}$ agisce quindi su ciascun segmento orizzontale $[a, b] \times \{y\}$ come una traslazione di ampiezza y cioè si ha

$$T_{1,2}([a, b] \times \{y\}) = [a + y, b + y] \times \{y\},$$

per ogni $y \in \mathbb{R}$. Rappresentando allora R come unione di segmenti orizzontali

$$R = \bigcup_{c \leq y \leq d} [a, b] \times \{y\},$$

risulta

$$T_{1,2}(R) = \bigcup_{c \leq y \leq d} T_{1,2}([a, b] \times \{y\}) = \bigcup_{c \leq y \leq d} [a + y, b + y] \times \{y\}.$$

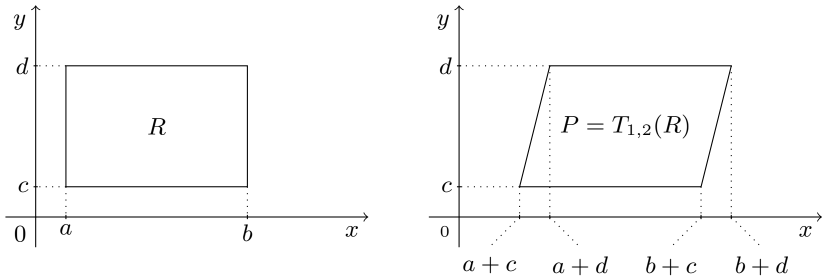


FIGURA 5.1. Azione dell'operatore di taglio $T_{1,2}$.

Pertanto, l'operatore lineare di taglio $T_{1,2}$ manda il rettangolo R di vertici (a, c), (b, c), (b, d) e (a, d) nel parallelogramma P di vertici $(a + c, c)$, $(b + c, c)$, $(b + d, d)$ e $(a + c, d)$ come illustrato in Figura 5.1.
Per la formula di riduzione per gli insiemi compatti (Lemma 5.38) risulta allora $|T_{1,2}(R)| = |P| = |R|$ per ogni rettangolo compatto R di $\mathbb{R}^2$.
Consideriamo ora l'operatore di taglio $T_{1,2}$ di $\mathbb{R}^N$ nel caso $N > 2$. Sia

$$R = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^N, b^N]$$

($a^n < b^n$ per $n = 1, \ldots, n$) un rettangolo compatto e non degenere di $\mathbb{R}^N$ avente i lati paralleli agli assi. Esso è allora della forma $R = S \times T$ dove S e T sono rettangoli dello stesso tipo di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^{N-2}$ rispettivamente. L'operatore di taglio $T_{1,2}$ di $\mathbb{R}^N$ manda allora il rettangolo $R = S \times T$ nell'insieme $P \times T$ dove P è un parallelogramma compatto di $\mathbb{R}^2$ tale che $|P| = |S|$. Risulta allora

$$|T_{1,2}(R)| = |P \times T| = |P| \cdot |T| = |S| \cdot |T| = |S \times T| = |R|$$

(Teorema 5.35) e quindi la tesi vale per l'operatore di taglio $T_{1,2}$ di $\mathbb{R}^N$ quando $E = R$ è un rettangolo compatto e non degenere di $\mathbb{R}^N$ con i lati paralleli agli assi e la stessa conclusione vale allora per gli insiemi aperti e quindi per gli insiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$ per regolarità esterna. □

LEMMA 5.50. *Sia $L \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^N)$ $(N \geq 2)$ un isomorfismo di $\mathbb{R}^N$. Allora, esistono $L_h \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^N)$ $(h = 1, \ldots, k)$ isomorfismi elementari tali che*

$$L = L_k \circ \cdots \circ L_1.$$

Rinviamo per la dimostrazione a ...

DIMOSTRAZIONE. Se L è un isomorfismo di $\mathbb{R}^N$ su se stesso, la tesi segue evidentemente da Lemma 5.49 e 5.50. Altrimenti, risulta $\det L = 0$ e, per ogni insieme E misurabile in $\mathbb{R}^N$, la sua immagine $L(E)$ risulta trascurabile essendo contenuto in un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^N$ (Teorema 5.16). □

ESEMPIO 5.51. Siano $v_1, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^N$ vettori linearmente indipendenti. Calcoliamo la misura del poliedro

$$P = \left\{x = x^1 v_1 + \cdots + x^N v_N : \ 0 \leq x^n \leq 1 \text{ per ogni } n\right\}.$$

Sia $L \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^N)$ l'isomorfismo di $\mathbb{R}^N$ tale che $Le_n = v_n$ per ogni n. Si ha allora $P = L(Q)$ dove

$$Q = \left\{x = (x^1, \ldots, x^N) : \ 0 \leq x^n \leq 1 \text{ per ogni } n\right\}$$

è il cubo compatto di lato unitario in $\mathbb{R}^N$. Risulta allora

$$|P| = |\det L| = |\det(v_1, \ldots, v_N)|$$

poiché i vettori $v_1, \dots, v_N$ nell'ordine sono le colonne della matrice che rappresenta l'isomorfismo L rispetto alla base canonica[5] di $\mathbb{R}^N$. $\square$

Da Teorema 5.47 si ricava la formula di cambiamento di variabili lineare per gli integrali.

TEOREMA 5.52. *Sia* $L \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^N)$ *un isomorfismo di* $\mathbb{R}^N$ *e siano*

- $F \subset \mathbb{R}^N$ *un insieme misurabile in* $\mathbb{R}^N$*;*
- $f\colon F \to [0, +\infty]$ *una funzione misurabile in* F*.*

Allora,

(a) $E = L^{-1}(F)$ *è misurabile in* $\mathbb{R}^N$*;*
(b) $x \in E \mapsto f(Lx) \in [0, +\infty]$ *è misurabile in* E*;*
(c) *si ha*

$$\int_F f(y)\,dy = |\det L| \int_E f(Lx)\,dx.$$

La dimostrazione si ottiene come al solito considerando dapprima il caso di funzioni semplici, misurabili e non negative nel qual caso il teorema segue da Teorema 5.47 per linearità e ricavando poi il caso generale per approssimazione con funzioni semplici, misurabili e non negative mediante il teorema di convergenza monotòna. Lo stesso risultato vale con $f\colon F \to \mathbb{K}$ integrabile in F.
I risultati di questa parte si estendono in modo ovvio alle funzioni affini da $\mathbb{R}^N$ in sé e in particolare da essi segue l'invarianza per rototraslazioni della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$.

COROLLARIO 5.53. *Sia*

$$\Phi(x) = Rx + x_0, \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

($R \in SO(N)$ *e* $x_0 \in \mathbb{R}^N$) *una rototraslazione di* $\mathbb{R}^N$*. Allora,*

$$|\Phi(E)| = |E|, \qquad E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Cambiamenti di variabili differenziabili. I risultati del paragrafo precedente relativi a cambiamenti di variabili lineari si estendono a trasformazioni differenziabili con continuità poiché ogni funzione siffatta è localmente approssimabile attorno ad ogni punto da una funzione affine.
Per illustrare questi risultati ricordiamo che, se U è un insieme aperto di $\mathbb{R}^N$ e $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^N$ è una funzione differenziabile in U, la funzione

$$J\Phi(x) = \left|\det\left(\Phi'(x)\right)\right|, \qquad x \in U,$$

si dice *jacobiano* di Φ. Se risulta $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$ e $J\Phi(x) > 0$ per ogni $x \in U$, allora la funzione Φ è un'appplicazione aperta e localmente invertibile per il teorema di inversione locale (Teorema 9.24 in [14]) e, se Φ è anche iniettiva, essa è un diffeomorfismo di U sull'aperto $V = \Phi(U)$. Viceversa, se $U, V \subset \mathbb{R}^N$ sono due insiemi aperti e $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$ è un diffeomorfismo di U su V, risulta $J\Phi(x) > 0$ per ogni $x \in U$.
I risultati di questa parte sono basati sul teorema seguente.

TEOREMA 5.54. *Siano* $U \subset \mathbb{R}^N$ *un insieme aperto,* $x_0 \in U$ *un punto e* $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^N$ *una funzione tale che*

- Φ *è continua e aperta in* U*;*
- Φ *è differenziabile in* x_0*.*

[5] Con le notazioni dell'algebra multilineare si ha $\det(v_1, \dots, v_N) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_N$.

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ con la seguente proprietà: per ogni cubo chiuso $Q_l = Q_l[x]$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ tale che $x_0 \in Q_l$ e $0 < l \leq \delta$ si ha

(a) $Q_l \subset U$;

(b) $\left| \dfrac{|\Phi(Q_l)|}{|Q_l|} - J\Phi(x_0) \right| \leq \varepsilon$.

La disuguaglianza in (b) si riscrive in maniera equivalente nella forma

$$\Big| |\Phi(Q_l)| - J\Phi(x_0)|Q_l| \Big| \leq \varepsilon |Q_l|, \qquad 0 < l \leq \delta,$$

e mostra che la misura dell'immagine mediante Φ del cubo Q_l coincide con la misura dell'immagine mediante l'operatore lineare $\Phi'(x_0)$ dello stesso cubo Q_l a meno di un errore relativo che può essere reso arbitrariamente piccolo. In particolare, da (b) si ricava che risulta

$$\lim_{l \to 0^+} \frac{|\Phi\,(Q_l)|}{|Q_l|} = J\Phi(x_0)$$

per ogni famiglia di cubi chiusi $Q_l \subset U$ di lato $l > 0$ tali che $x_0 \in Q_l$ per ogni l.

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che sia $x_0 = 0$ e $\Phi(0) = 0$ ed è conveniente utilizzare anche in questa dimostrazione la norma $\|\cdot\|_\infty$ di $\mathbb{R}^N$ come in Teorema 5.46. Dividiamo inoltre la dimostrazione nei due casi seguenti: $J\Phi(0) > 0$ o $J\Phi(0) = 0$.

Caso 1: $J\Phi(0) > 0$. Poniamo per brevità

$$L = \Phi'(0) \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^N); \qquad J = J\Phi(0); \qquad C = 1/\|L^{-1}\|;$$

dove $\|\cdot\|$ denota ovviamente la norma degli operatori lineari associata alla norma $\|\cdot\|_\infty$ di $\mathbb{R}^N$. Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo poi $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$ ed $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ nella maniera seguente

$$0 < \lambda < \min\left\{\frac{\varepsilon}{N2^N J}, 1\right\}; \qquad 0 < \eta < \min\left\{\frac{C\lambda}{2}, C(1-\lambda)\right\};$$

e, essendo Φ differenziabile in $x_0 = 0$, scegliamo infine $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ in modo che risulti $0 < 2\delta < d_\infty(0, U^c)$ cosicché vale (a) e che si abbia inoltre

$$\|y\|_\infty \leq 2\delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|\Phi(y) - Ly\|_\infty \leq \eta \|y\|_\infty.$$

Proviamo che con questa scelta di δ vale la tesi in (b).
A tal fine, consideriamo un qualunque cubo fissato $Q_l = Q_l[x]$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ tale che $0 < l \leq \delta$ e $0 \in Q_l$ e denotiamo con

$$Q_l^\pm = Q_{(1\pm\lambda)l}[x], \qquad 0 < l \leq \delta,$$

i cubi chiusi concentrici di centro x e lati $(1\pm\lambda)l$ rispettivamente. Si ha evidentemente

$$(**) \qquad L(Q_l^-) \subset L(Q_l) \subset L(Q_l^+)$$

cosicché, ricordando che è

$$0 \leq b^n - a^n \leq nb^{n-1}(b-a), \qquad 0 \leq a \leq b,$$

per la scelta di λ risulta (Teorema 5.47)

$$0 \leq \frac{|L(Q_l^+)|}{|Q_l|} - \frac{|L(Q_l^-)|}{|Q_l|} = \left[(1+\lambda)^N - (1-\lambda)^N\right] J \leq N2^N J\lambda \leq \varepsilon.$$

Supponiamo ora di aver provato che, per la scelta di δ fatta, risulti anche

$$(***) \qquad L(Q_l^-) \subset \Phi(Q_l) \subset L(Q_l^+).$$

Si avrebbe allora

$$\frac{|L(Q_l^-)|}{|Q_l|} \leq \frac{|\Phi(Q_l)|}{|Q_l|} \leq \frac{|L(Q_l^+)|}{|Q_l|}$$

ed al contempo per $(**)$ risulta anche (Teorema 5.47)

$$\frac{|L(Q_l^-)|}{|Q_l|} \leq J \leq \frac{|L(Q_l^+)|}{|Q_l|}.$$

Pertanto, si avrebbe

$$0 \leq \left| \frac{|\Phi(Q_l)|}{|Q_l|} - J \right| \leq \frac{|L(Q_l^+)|}{|Q_l|} - \frac{|L(Q_l^-)|}{|Q_l|} \leq \varepsilon$$

che è la tesi.
Per concludere la dimostrazione nel caso $J\Phi(0) > 0$ resta quindi da provare soltanto la validità di $(***)$.
Consideriamo dapprima la seconda inclusione $\Phi(Q_l) \subset L(Q_l^+)$ in $(***)$ e proviamo che si ha $\Phi(Q_l) \cap L(\mathbb{R}^N \setminus Q_l^+) = \varnothing$ ovvero che risulta

$$y \in Q_l \text{ e } z \notin Q_l^+ \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(y) \neq Lz.$$

Consideriamo infatti due vettori $y \in Q_l$ e $z \notin Q_l^+$ ed osserviamo che, per la scelta di y e z, deve essere $\|y\|_\infty \leq 2l$ e $\|y - z\|_\infty \geq \lambda l$ cosicché risulta

$$\begin{aligned}\|\Phi(y) - Lz\|_\infty &\geq \|Ly - Lz\|_\infty - \|\Phi(y) - Ly\|_\infty \geq \\ &\geq C\|y - z\|_\infty - \eta\|y\|_\infty \geq C\lambda l - 2\eta l = \big(C\lambda - 2\eta\big)\, l > 0\end{aligned}$$

per la scelta di η.
Consideriamo quindi l'altra inclusione $L(Q_l^-) \subset \Phi(Q_l)$. È conveniente in questo caso sostituire i cubi chiusi Q_l e Q_l^- con i cubi aperti $C_l = \mathrm{int}(Q_l)$ e $C_l^\pm = \mathrm{int}(Q_l^\pm)$.
Consideriamo quindi l'insieme $W = L(C_l^-)$ che è aperto e connesso in $\mathbb{R}^N$ poiché L è un omeomorfismo di $\mathbb{R}^N$ su se stesso e scriviamo W come unione dei due insiemi

$$W_1 = L(C_l^-) \cap \Phi(C_l) \qquad \text{e} \qquad W_2 = L(C_l^-) \setminus \Phi(C_l).$$

Essendo Φ una funzione aperta, l'insieme W_1 è aperto in $\mathbb{R}^N$ e proviamo che anche W_2 è tale. Infatti, se $y \in \partial C_l$ e $z \in C_l^-$, si ha anche in questo caso $\|y\|_\infty \leq 2l$ e $\|y - z\|_\infty > \lambda l$ e quindi, ragionando come prima, risulta

$$\|\Phi(y) - Lz\|_\infty \geq C\|y - z\|_\infty - \eta\|y\|_\infty \geq C\lambda l - 2\eta l = \big(C\lambda - 2\eta\big)\, l > 0.$$

Pertanto, nessun punto del bordo del cubo C_l è mandato da Φ in un punto di $L(C_l^-)$ cosicché risulta

$$W_2 = L(C_l^-) \setminus \Phi(C_l) = L(C_l^-) \setminus \Phi(Q_l)$$

e dunque anche W_2 è aperto in $\mathbb{R}^N$. Proviamo che risulta $\Phi(x) \in W_1$ cosicché deve essere $W_2 = \varnothing$ cioè $L(C_l^-) \subset \Phi(C_l)$. Si ha ovviamente $\Phi(x) \in \Phi(C_l)$ e, se fosse $\Phi(x) \notin L(C_l^-)$, si avrebbe $\Phi(x) = Ly$ per un opportuno $y \notin C_l^-$. Si avrebbe allora $\|x\|_\infty \leq l$ e $\|y - x\|_\infty \geq (1 - \lambda)l$ da cui seguirebbe

$$\begin{aligned}0 = \|\Phi(x) - Ly\|_\infty &\geq \|Lx - Ly\|_\infty - \|\Phi(x) - Lx\|_\infty \geq \\ &\geq C\|x - y\|_\infty - \eta\|x\|_\infty \geq \\ &\geq C(1 - \lambda)l - \eta l = \big[C(1 - \lambda) - \eta\big]\, l > 0\end{aligned}$$

e ciò è assurdo. Infine, essendo L un isomorfismo lineare di $\mathbb{R}^N$ su se stesso, da $L(C_l^-) \subset \Phi(C_l)$ segue

$$L(Q_l^-) = \mathrm{cl}\big(L(Q_l^-)\big) \subset \mathrm{cl}\big(\Phi(C_l)\big) \subset \Phi(Q_l)$$

e questo completa la dimostrazione nel caso $J\Phi(0) > 0$.
Caso 2: $J\Phi(0) = 0$. Sia $L = \Phi'(0) \in L(\mathbb{R}^N)$ come prima e consideriamo il cubo compatto $Q = Q_1[0]$ di semilato unitario e centro nell'origine. L'insieme $L(Q)$ è contenuto in $\mathrm{im}(L)$ che è un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^N$ e quindi è trascurabile in $\mathbb{R}^N$

(Teorema 5.16). Fissato $\varepsilon > 0$, ragionando come nella dimostrazione di Teorema 5.16, si trova $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tale che, posto

$$E_\eta = \left\{ z : \ d_\infty(z\,, L(Q)) \le \eta \right\},$$

risulta $|E_\eta| \le \varepsilon$. Come nel caso precedente, scegliamo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ in modo tale che risulti $0 < 2\delta < d_\infty(0\,, U^{\mathrm{c}})$ cosicché vale (a) e che si abbia inoltre

$$(****) \qquad \|y\|_\infty \le 2\delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|\Phi(y) - Ly\|_\infty \le \eta \|y\|_\infty.$$

Proviamo che con questa scelta di δ vale la tesi in (b).
A tal fine, consideriamo un qualunque cubo fissato $Q_l = Q_l[x]$ ($x \in \mathbb{R}^N$) tale che $0 < l \le \delta$ e $0 \in Q_l$. Si ha allora

$$y \in Q_l \quad \Longrightarrow \quad \|y\|_\infty \le 2l \quad \Longrightarrow \quad \Phi(y) \in \left\{ z : \ d_\infty\big(z\,, L(Q_l)\big) \le 2l\eta \right\}$$

per $(****)$ e risulta

$$\begin{aligned}\left\{ z : \ d_\infty\big(z\,, L(Q_l)\big) \le 2l\eta \right\} &\subset \left\{ z : \ d_\infty\big(z/(2l)\,, L(Q)\big) \le \eta \right\} = \\ &= (2l) \left\{ z : \ d_\infty\big(z\,, L(Q)\big) \le \eta \right\} = (2l) E_\eta\end{aligned}$$

poichè si ha $Q_l/(2l) \subset Q$. Abbiamo così provato che risulta $\Phi(Q_l) \subset (2l)E_\eta$ cosicché si ha

$$\frac{|\Phi(Q_l)|}{|Q_l|} \le \frac{(2l)^N |E_\eta|}{|Q_l|} = |E_\eta| \le \varepsilon$$

per ogni cubo Q_l tale che $0 \in Q_l$ e $0 < l \le \delta$ e questo completa la dimostrazione. $\square$

Nel teorema precedente l'ipotesi che la funzione Φ sia aperta è in realtà superflua. Essa è stata usata solo nel caso non singolare $\Phi'(0) \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^N)$ per provare quanto segue: se $Q^- \subset Q$ sono cubi concentrici le cui facce distano almeno ε e se Φ non sposta alcun punto di Q a distanza pari o superiore ad ε, allora risulta $Q^- \subset \Phi(Q)$. Questa proprietà è vera per tutte le funzioni continue ma, benché apparentemente intuitiva, la sua dimostrazione non è banale ed utilizza il teorema di punto fisso di Brouwer (Teorema 7.24 in [15]).
L'osservazione che l'ipotesi che Φ sia aperta serve solo nel caso non singolare unita al fatto che le funzioni di classe C^1 sono aperte nell'insieme aperto ove lo jacobiano è positivo fornisce la seguente versione C^1 di Teorema 5.54.

Corollario 5.55. *Siano $U \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e $\Phi \in C^1(U\,, \mathbb{R}^N)$ una funzione di classe C^1. Allora, per ogni $x_0 \in U$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon\,, x_0) > 0$ con la seguente proprietà: per ogni cubo chiuso $Q_l = Q_l[x]$ ($x \in \mathbb{R}^N$) tale che $x_0 \in Q_l$ e $0 < l \le \delta$ si ha*

(a) *$Q_l \subset U$;*

(b) $\left| \dfrac{|\Phi(Q_l)|}{|Q_l|} - J\Phi(x_0) \right| \le \varepsilon.$

Possiamo provare ora la formula di cambiamento di variabili per la misura di Lebesgue.

Teorema 5.56. *Siano $U \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperte e $\Phi \in C^1(U\,, \mathbb{R}^N)$ una funzione iniettiva in U e sia*

$$\mu(E) = |\Phi(E)|, \qquad E \in \textit{misurabile}.$$

Allora,

(a) *μ è una misura positiva di Radon in U tale che $\mathcal{N}(\mathcal{L}^N) \subset \mathcal{N}(\mu)$;*

(b) *si ha*

$$\mu(E) = \int_E J\Phi.$$

L'insieme aperto U è uno spazio di Hausdorff locamente compatto nella topologia indotta da $\mathbb{R}^N$ e nel linguaggio di Sezione 4.2 lo jacobiano di Φ è la derivata di Radon–Nikodym della misura positiva μ rispetto alla restrizione della misura di Lebesgue alla $\sigma-$algebra degli insiemi misurabili di U (Teorema 4.20). Inoltre, la derivata di Radon–Nikodym di μ rispetto a $\mathcal{L}^N$ si calcola effettivamente come limite di rapporti incrementali della misura μ rispetto alla misura di Lebesgue (Teorema 5.54). Ritorneremo su questa osservazione nella successiva Sezione **??**.

Dimostrazione. La funzione Φ è una $N-$funzione in U (Teorema 5.46) cosicché la funzione μ è ben definita sulla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}(U)$ degli insiemi misurabili di U. Essendo Φ iniettiva, μ risulta anche essere una misura positiva su $\mathcal{S}(U)$ e inoltre risulta $\mathcal{N}(\mathcal{L}^N) \subset \mathcal{N}(\mu)$ sempre perché Φ è una $N-$funzione.
Proviamo ora l'uguaglianza in (b). Sia $Q \subset U$ un cubo compatto e non degenere con i lati paralleli agli assi coordinati. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni punto $x \in Q$ siano $\delta_1(x) = \delta_1(\varepsilon, x) > 0$ il numero associato a x e a $\varepsilon/2|Q|$ da Corollario 5.55 e $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ tale che

$$x, y \in Q \text{ e } \|x - y\|_\infty \le \delta_2 \qquad \Longrightarrow \qquad |J\Phi(x) - J\Phi(y)| \le \frac{\varepsilon}{2|Q|}.$$

Posto allora

$$\delta(x) = \min\left\{\delta_1(x), \delta_2\right\} > 0, \qquad x \in Q,$$

per il teorema di Cousin (Teorema I–3.20) esiste una collezione finita di cubi compatti e non degeneri con i lati paralleli agli assi coordinati Q_m e altrettanti punti $x_m \in Q_m$ $(m = 1, \dots, n)$ tali che

- $Q = Q_1 \cup \cdots \cup Q_n$;
- $\operatorname{int}(Q_{m_1}) \cap \operatorname{int}(Q_{m_2}) = \varnothing$ per $m_1 \neq m_2$;
- $\operatorname{diam}(Q_m) \le \delta(x_m)$ per ogni m.

Si ha allora

$$\Big||\Phi(Q_m)| - J\Phi(x_m)|Q_m|\Big| \le \frac{\varepsilon}{2|Q|}|Q_m|$$
$$\int_{Q_m} \big|J\Phi - J\Phi(x_m)\big| \le \frac{\varepsilon}{2|Q|}|Q_m|$$

per ogni m per la scelta di δ cosicché, essendo i cubi Q_m non sovrapposti, risulta

$$\begin{aligned}\left||\Phi(Q)| - \int_Q J\Phi\right| &\le \sum_m \left||\Phi(Q_m)| - \int_{Q_m} J\Phi\right| \le \\ &\le \sum_m \Big||\Phi(Q_m)| - J\Phi(x_m)|Q_m|\Big| + \sum_m \int_{Q_m} \big|J\Phi - J\Phi(x_m)\big| \le \\ &\le \sum_m \frac{\varepsilon}{2|Q|}|Q_m| + \sum_m \frac{\varepsilon}{2|Q|}|Q_m| \le \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

e questo prova (b) nel caso di un cubo chiuso Q contenuto in U. Poiché ogni insieme aperto di $\mathbb{R}^N$ è unione di una famiglia numerabile di cubi diadici non sovrapposti (Teorema 5.5), l'uguaglianza in (b) vale anche per ogni insieme aperto $E = V$ contenuto in U per numerabile additività. Resta così da provare l'uguaglianza (b) per un insieme E misurabile in $\mathbb{R}^N$ tale che $E \subset U$. A tal fine, consideriamo dapprima un insieme aperto $V \subset U$ la cui chiusura $\operatorname{cl}(V)$ sia un sottoinsieme compatto di U e sia E un insieme misurabile in $\mathbb{R}^N$ tale che $E \subset V$. Per ogni

$n \geq 1$ esistono allora K_n compatto e V_n aperto tali che risulti $K_n \subset E \subset V_n$ e $|V_n \setminus K_n| \leq 1/n$ e da ciò segue

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{V_n\setminus K_n} J\Phi = 0$$

(Teorema 2.33). Si ha quindi

$$\begin{aligned}\left|\mu(E) - \int_E J\Phi\right| &\leq |\mu(E) - \mu(V_n)| + \left|\int_{V_n} J\Phi - \int_E J\Phi\right| \leq \\ &\leq \mu(V_n \setminus K_n) + \int_{V_n\setminus K_n} J\Phi = \\ &= 2\int_{V_n\setminus K_n} J\Phi \to 0\end{aligned}$$

per $n \to +\infty$. Sia infine E un insieme misurabile in $\mathbb{R}^N$ contenuto in U e sia $\{U_n\}_n$ una esaustione di U mediante aperti precompatti (Teorema I–2.188). Posto allora $E_n = E \cap U_n$ per ogni n, risulta

$$\mu(E_n) = \int_{E_n} J\Phi$$

per ogni n e l'uguaglianza in (b) segue per la continuità delle misure sulle successioni crescenti di insiemi (Proposizione 1.22 – (b)).
Abbiamo così provato (b) e resta solo da provare che μ è una misura di Radon. Chiaramente, μ è una misura di Borel in U finita sui compatti e, per la regolarità della misura di Lebesgue, per ogni insieme E misurabile in $\mathbb{R}^N$ esiste un insieme di Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ tale che $E \subset B \subset U$ e $|B \setminus E| = 0$. Si ha allora

$$\mu(B) = \mu(E) + \mu(B \setminus E) = \mu(E)$$

poiché si ha $\mathcal{N}(\mathcal{L}^N) \subset \mathcal{N}(\mu)$ e la conclusione segue da Teorema 3.8. □

Una volta stabilito come cambia la misura di un insieme per effetto di un cambiamento di variabili di classe C^1 si ricava facilmente l'analoga formula per gli integrali.

TEOREMA 5.57. *Siano $U, V \subset \mathbb{R}^N$ due insiemi aperti e $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$ un diffeomorfismo di U su V. Siano inoltre*

- *$F \subset \Phi(U)$ un insieme misurabile;*
- *$f\colon F \to [0, +\infty]$ funzione misurabile in F.*

Allora,

(a) *l'insieme $E = \Phi^{-1}(F)$ è misurabile in U;*
(b) *la funzione $(f \circ \Phi)J\Phi\colon E \to [0, +\infty]$ è misurabile in E e risulta*

$$\int_F f = \int_E (f \circ \Phi)J\Phi.$$

La formula in (b) è detta *formula di cambiamento di variabili negli integrali.* Lo jacobiano $J\Phi$ che compare a destra tiene tiene conto di come il cambio di variabili Φ modifica la misura degli insiemi. Lo stesso risultato vale con le ovvie modifiche con $f\colon F \to \mathbb{K}$ funzione integrabile in F.

DIMOSTRAZIONE. L'insieme $E = \Phi^{-1}(F)$ è misurabile in U (Teorema 5.46).
Consideriamo dapprima il caso di una funzione $s\colon F \to [0, +\infty)$ semplice, non negativa e misurabile in F della forma

$$s = \sum_{1\leq m\leq n} c_m 1_{F_m}$$

con $\{F_1,\ldots,F_n\}$ partizione misurabile di F, $c_m \geq 0$ $(m=1,\ldots,n)$ e $c_m = 0$ se $|F_m| = +\infty$. Posto $E_m = \Phi^{-1}(F_m)$ per ogni m, gli insiemi $\{E_1,\ldots,E_n\}$ costituiscono a loro volta una partizione misurabile di E e per definizione risulta

$$1_{E_m} = 1_{F_m} \circ \Phi$$

per ogni m. La funzione

$$(s\circ\Phi)\,J\Phi = \left(\sum_{1\leq m\leq n} c_m(1_{F_m}\circ\Phi)\right) J\Phi = \left(\sum_{1\leq m\leq n} c_m 1_{E_m}\right) J\Phi$$

risulta quindi essere misurabile in U e per Teorema 5.56 si ha

$$\int_F s = \sum_m c_m|F_m| = \sum_m c_m \int_{E_m} J\Phi = \int_E \left(\sum_m c_m 1_{E_m}\right) J\Phi = \int_E (s\circ\Phi) J\Phi.$$

Questo prova la tesi nel caso di una funzione semplice, non negativa e misurabile in F. Il caso generale segue come al solito per convergenza monotòna. □

Esercizi

Negli esercizi seguenti tutti i riferimenti a misurabilità e misura sono relativi alla $\sigma-$algebra e alla misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$ e tutti gli integrali sono fatti rispetto alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$.

5.1. Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme misurabile con $|E| > 0$. Provate che per ogni $0 < t < |E|$ esiste un insieme misurabile E_t tale che $E_t \subset E$ e $|E_t| = t$.

5.2. Sia C l'insieme di Cantor. Provate che $x \in C$ se e solo se esiste una successione $c_n(x) \in \{0,2\}$ $(n \geq 1)$ tale che

$$x = \sum_{n\geq 1} \frac{c_n(x)}{3^n}.$$

5.3. Per ogni $x \in [0,1)$, siano $c_n(x) \in \{0,\ldots,9\}$ $(n \geq 1)$ le cifre della rappresentazione decimale limitata[6] di x cosicché risulta

$$x = \sum_n \frac{c_n(x)}{10^n}.$$

Provate che l'insieme

$$E = \big\{x \in [0,1) : \ c_n(x) \neq 9 \text{ per ogni } n\big\}$$

è misurabile e calcolatene la misura.

5.4. Siano $c_n(x)$ $(n \geq 1)$ le cifre della rappresentazione decimale di x come in Esercizio 5.2. Provate che gli insiemi

$$E = \big\{x \in [0,1) : \ c_n(x) \text{ dispari per ogni } n\big\}\,;$$
$$F = \big\{x \in [0,1) : \ c_n(x) \text{ dispari definitivamente}\big\}\,;$$
$$G = \big\{x \in [0,1) : \ c_n(x) \text{ pari per infiniti } n\big\}\,;$$

sono misurabili e calcolatene le misure.

[6] Ad esempio, per $x = 1/2$, si sceglie la rappresentazione decimale $1/2 = 0.5000\ldots$ anziché $1/2 = 0.4999\ldots$.

5.5. Modificando opportunamente la costruzione dell'insieme di Cantor C (Esempio 5.14), per ogni $0 < \varepsilon < 1$ costruite un insieme $C_\varepsilon \subset [0,1]$ con le seguenti proprietà:

(a) C_ε è compatto e $\operatorname{int}(C_\varepsilon) = \varnothing$;
(b) $|C_\varepsilon| = \varepsilon$.

Gli insimi C_ε così costruiti prendono il nome di *insiemi di Cantor di misura positiva.*

5.6. Per ogni $0 < \varepsilon < 1$, costruite

(a) un insieme aperto $V_\varepsilon \subset (0,1)$ tale che $\mathbb{Q} \cap (0,1) \subset V_\varepsilon$ e $|V_\varepsilon| = \varepsilon$;
(b) un insieme compatto $K_\varepsilon \subset [0,1]$ tale che $K_\varepsilon \cap \mathbb{Q} = \{0,1\}$ e $|K_\varepsilon| = \varepsilon$.

Perché non può essere $\bigcap_n V_{1/n} = \mathbb{Q} \cap (0,1)$?

5.7. Per ogni $0 < \varepsilon < 1$, costruite un insieme di Borel $B_\varepsilon \subset (0,1)$ tale che risulti $|B_\varepsilon| \le \varepsilon$ e

$$0 < |B_\varepsilon \cap I| < |I|$$

per ogni intervallo aperto (non vuoto) $I \subset (0,1)$.

5.8. Siano $0 < \delta < 2$. Provate che esiste $\kappa = \kappa(\delta, N) \ge 1$ con la seguente proprietà: se $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^N$ sono vettori tali che

- $\|x_m\| \le 1$ per $m = 1, \ldots, n$;
- $\|x_{m'} - x_{m''}\| \ge \delta$ per $m' \ne m''$;

risulta $n < \kappa$.

5.9. Sia M una varietà differenziabile di $\mathbb{R}^N$ con $\dim M = n$ ($1 \le n < N$ e $N \ge 2$). Provate che M è trascurabile.

5.10. Costruite una funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ limitata e Lebesgue integrabile in $[0,1]$ che non è uguale quasi ovunque ad alcuna funzione Riemann integrabile in $[0,1]$.

5.11. Una funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *funzione a gradino* se è una combinazione lineare di caratteristiche di intervalli limitati di $\mathbb{R}$. Provate che, se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile in $\mathbb{R}$, esiste una successione di funzioni a gradino $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($n \ge 1$) per le quali risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_n - f| = 0.$$

5.12. Sia $\{q_n : n \ge 1\} = \mathbb{Q}$ una enumerazione dei razionali di $(0,1)$ e siano

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{|t|} & t \ne 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f(t) = \sum_{n\ge1} \frac{1}{2^n}\varphi(t - q_n)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Provate che

(a) $f(t) < +\infty$ per q.o. $t \in (0,1)$ e $\displaystyle\int_0^1 f < +\infty$;
(b) f è illimitata in ogni intervallo non degenere di $(0,1)$;
(c) la proprietà (b) vale anche se si modifica f su un insieme trascurabile.

5.13. Costruite una successione di funzioni continue $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ($n \ge 1$) tali che

(a) $0 \leq f_n(x) \leq 1$ per ogni $x \in [0,1]$ e per ogni n;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = 0$;

(c) la successione $\{f_n(x)\}_n$ non converge per alcun $x \in [0,1]$.

5.14. Calcolate
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n e^{x/2}\, dx \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n e^{-2x}\, dx.$$

5.15. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Calcolate
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-n) \frac{x}{1+|x|}\, dx.$$

5.16. Siano $f_n\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ le funzioni definite da
$$f_n(t) = a\mathrm{e}^{-nat} - b\mathrm{e}^{-nbt}, \qquad t > 0,$$
con $0 < a < b$. Provate che

(a) ogni f_n è integrabile in $(0,+\infty)$ con $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = 0$;

(b) $\displaystyle\sum_n \int_0^{+\infty} |f_n| = +\infty$.

Provate quindi che la serie di funzioni
$$f(t) = \sum_n f_n(t)$$
converge per $t > 0$ e definisce $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ integrabile tale che
$$\int_0^{+\infty} f = \log(b/a).$$

5.17. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme filtrante degli insiemi finiti (non vuoti) $F \subset [0,1]$. Costruite una successione generalizzata di funzioni continue $f_F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ $(F \in \mathcal{F})$ tali che

- $0 \leq f_F \leq 1$ in $[0,1]$ per ogni $F \in \mathcal{F}$;
- $\displaystyle\lim_{F \text{ finito}} f_F(x) = 1$ puntualmente in $[0,1]$;
- $\displaystyle\lim_{F \text{ finito}} \int_F f_F = 1$

Questo prova che il teorema di convergenza dominata non vale per le successioni generalizzate.

5.18. Provate che per ogni $t \in (0,+\infty]$ esiste un insieme $A_t \subset \mathbb{R}$ non misurabile con $|A_t|_* = t$.

5.19. Costruite una funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua tale che sia
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\, dx < +\infty \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\, dy < +\infty$$
per ogni x e y e tale che le funzioni
$$x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy \qquad \text{e} \qquad y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx$$

siano integrabili con

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\right)dx \neq \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

5.20. Assumendo la validità dell'ipotesi del continuo e ragionando come in Esempio 2.52, costruite un insieme $A \subset [0,1]\times[0,1]$ tale che

- $(A_x)^c$ è al più numerabile per ogni $x \in [0,1]$;
- A^y è al più numerabile per ogni $y \in [0,1]$

Provate che risulta

$$\int_0^1\left(\int_0^1 1_A(x,y)\,dy\right)dx = 1 \quad \text{e} \quad \int_0^1\left(\int_0^1 1_A(x,y)\,dx\right)dy = 0$$

e concludete quindi che A non è misurabile in $\mathbb{R}^2$.

5.21. Sia $f\colon \mathbb{R}^N \to [0,+\infty]$ una funzione. Provate che f è misurabile in $\mathbb{R}^N$ se e solo se il suo sottografico

$$A(f) = \left\{(x,t):\ 0 \le t \le f(x) \text{ e } x \in \mathbb{R}^N\right\}$$

è misurabile in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ e che in tal caso risulta

$$\mathcal{L}^{N+1}(A(f)) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx.$$

5.22. Usando le coordinate sferiche e il teorema di Fubini–Tonelli provate che per l'integrale di Gauss risulta

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

5.23. Sia

$$B^n = \{x:\ \|x\| \le 1\}, \qquad (n \ge 1)$$

la palla chiusa di $\mathbb{R}^n$ con centro nell'origine e raggio unitario e sia $\omega_n = |B^n|$ la sua misura. Provate che risulta

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}, \qquad n \ge 1,$$

e calcolate il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \omega_n.$$

5.24. Data la funzione $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ e $y \in \mathbb{R}^N$, la y – *traslazione di* f o brevemente *traslazione di* f è la funzione $\tau_y f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ definita da

$$\tau_y f(x) = f(x+y), \qquad x \in \mathbb{R}^N \quad (y \in \mathbb{R}^N).$$

Provate che per ogni $y \in \mathbb{R}^N$ valgono le seguenti affermazioni:

(a) se f è misurabile in $\mathbb{R}^N$, allora $\tau_y f$ è misurabile in $\mathbb{R}^N$;

(b) se $g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ è una funzione tale che $f = g$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^N$, allora risulta $\tau_y f = \tau_y g$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^N$.

5.25. Siano $f, g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ due funzioni e siano $F, G\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ le funzioni definite da
$$F(x, y) = f(x+y) \qquad \text{e} \qquad G(x, y) = g(x+y)$$
per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Provate che

(a) se $f = g$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^N$, allora $F = G$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$;
(b) se f è misurabile in $\mathbb{R}^N$, allora F è misurabile in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

5.26. Sia
$$\Delta^N = \left\{x = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^N : \, x^n \geq 0 \text{ per ogni } n \text{ e } x^1 + \dots + x^N \leq 1\right\}$$
lo N−simplesso di $\mathbb{R}^N$ e, dati $v_1, \dots, v_N$ vettori di $\mathbb{R}^N$, sia
$$P = \left\{ \sum_{1 \leq n \leq N} x^n v_n : \, x = (x^1, \dots, x^N) \in \Delta^N \right\}.$$
Calcolate $|\Delta^N|$ e $|P|$.

5.27. Un *ellissoide di* $\mathbb{R}^N$ è un insieme $E = E(S)$ della forma
$$E(S) = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \, \langle x | Sx \rangle \leq 1\right\}$$
con $S \in \mathbb{M}^{N \times N}_{\text{sym}}$ matrice simmetrica e positiva ($S > 0$). Provate che ogni insieme compatto e convesso $K \subset \mathbb{R}^N$ tale che $0 \in \operatorname{int} K$ contiene un ellissoide di misura massima.

5.28. Siano $U \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$ una funzione iniettiva in U. Siano inoltre

- $F \subset \Phi(U)$ un insieme misurabile;
- $f\colon F \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile in F.

Provate che l'insieme $E = \Phi^{-1}(F) \cap \{J\Phi > 0\}$ è misurabile e che la funzione definita da $(f \circ \Phi)J\Phi\colon E \to [0, +\infty]$ è misurabile in E e che risulta
$$\int_F f = \int_E (f \circ \Phi) J\Phi.$$

CAPITOLO 6

Derivazione ed integrazione in $\mathbb{R}$

Questo capitolo è dedicato alle proprietà di derivabilità delle funzioni di una variabile reale alla luce dell'introduzione della misura di Lebesgue. Quali funzioni sono derivabili quasi ovunque – cioè dappertutto nel senso della misura di Lebesgue? E quando derivazione ed integrazione secondo Lebesgue sono operazioni inverse l'una dell'altra cioè vale il teorema fondamentale del calcolo? Sono questi due dei più classici problemi dell'analisi reale e la trattazione che sviluppiamo qui è anch'essa classica ed in particolare è indipendente dai risultati di teoria della misura sviluppati nel Capitolo 4 (teorema di Radon–Nikodym e decomposizione di Lebesgue), pur avendo molti dei risultati che vedremo una controparte per le misure.
Proviamo in particolare la derivabilità quasi ovunque delle funzioni monotòne e delle funzioni integrali, discutiamo i limiti di validità del teorema fondamentale del calcolo ed esaminiamo le proprietà delle funzioni a variazione limitata e delle funzioni assolutamente continue con particolare riguardo alle relazioni reciproche ed alle regole di calcolo per tali funzioni. Introduciamo infine le misure di Lebesgue–Stieltjes in $\mathbb{R}$ e ne esaminiamo la relazione con le funzioni a variazione limitata.
Poiché in questo capitolo con la sola eccezione dell'ultima sezione interverrà solo la misura di Lebesgue di $\mathbb{R}$, conveniamo per brevità di parlare di insiemi misurabili o trascurabili, di funzioni misurabili o integrabili e così via omettendo il riferimento alla misura ed alla $\sigma-$algebra di Lebesgue.

6.1. Funzioni derivabili quasi ovunque

Cominciamo in questa sezione ad esaminare le proprietà di derivabilità delle funzioni definite su intervalli di $\mathbb{R}$ alla luce dell'introduzione della misura di Lebesgue. Motivati dai classici esempi di funzioni continue non derivabili in alcun punto, proviamo dapprima che la derivabilità costituisce una proprietà eccezionale delle funzioni continue nel senso che la maggior parte di esse nel senso topologico della categoria di Baire non sono derivabili in alcun punto. Utilizzando il teorema di ricoprimento di Vitali mostriamo quindi che la situazione è radicalmente diversa per le funzioni a valori reali monotòne che sono derivabili quasi ovunque. Esaminiamo infine le proprietà delle funzioni a variazione limitata, cioè gli elementi dello spazio vettoriale generato dalle funzioni monotòne limitate.
In tutta questa sezione denotiamo con I un intervallo che supporremo sempre non degenere le cui eventuali ulteriori proprietà specificheremo ove necessario.

Funzioni continue non derivabili in alcun punto. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali. Dato $x \in I$ con $x < \sup I$, i numeri reali estesi definiti da

$$\begin{cases} D^+ f(x) = \limsup\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ D_+ f(x) = \liminf\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{cases} \qquad x \in I, \quad x < \sup I,$$

si dicono rispettivamente *derivata superiore destra* e *derivata inferiore destra di f in x*. Si ha evidentemente

$$D^+f(x) \leq D_+f(x), \qquad x \in I, \quad x < \sup I,$$

e, qualora valga l'uguaglianza, il valore comune è la *derivata destra di f in x* che si denota come al solito con

$$f'_+(x) = D^+f(x) = D_+f(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Può evidentemente essere $f'_+(x) = \pm\infty$ e, in accordo con quanto richiamato in **???**, la funzione f è *derivabile da destra in x* se esiste finita la derivata destra di f in x. Analogamente si procede per le derivate sinistre. I numeri reali estesi definiti da

$$\begin{cases} D^-f(x) = \limsup\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ D_-f(x) = \liminf\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{cases} \qquad x \in I, \quad x > \inf I,$$

si dicono rispettivamente *derivata superiore sinistra* e *derivata inferiore sinistra di f in x*. Anche in questo caso si ha

$$D^-f(x) \leq D_-f(x), \qquad x \in I, \quad x > \inf I,$$

e, qualora valga l'uguaglianza, il valore comune è la *derivata sinistra di f in x* che si denota con

$$f'_-(x) = D^-f(x) = D_-f(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

ed f si dice *derivabile da sinistra in x* se esiste finita la derivata sinistra di f in x. Infine, se $x \in I$ è un punto interno di I in cui esistono e sono uguali la derivata destra e la derivata sinistra di f in x, il valore comune di esse è la *derivata di f in x* che si denota come al solito con

$$f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

e la funzione f si dice *derivabile in x* se esiste finita la derivata di f in x. Nel caso particolare in cui sia x sia un estremo dell'intervallo, con abuso di notazione si pone

$$\begin{aligned} f'(a) &= f'_+(a) \qquad \text{se } a \in I \text{ e } a = \min I \\ f'(b) &= f'_-(b) \qquad \text{se } b \in I \text{ e } b = \max I \end{aligned}$$

e si parla brevemente di derivata a o in b anziché di derivata destra o sinistra rispettivamente.

Nel caso di una funzione a valori complessi $f\colon I \to \mathbb{C}$ si ha $f = u+iv$ con $u, v\colon I \to \mathbb{R}$ parte reale e parte immaginaria di f e per derivata, derivata destra, derivata sinistra e derivabilità di f valgono la terminologia e le notazioni già richiamata in **???**. In paricolare, f è derivabile in $x \in I$ se e solo se la parte reale u e la parte immaginaria v sono derivabili in x nel qual caso risulta

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x), \qquad x \in I.$$

Dopo questi richiami di terminologia, presentiamo due famosi esempi di funzioni continue a valori reali che non sono derivabili in alcun punto.

Esempio 6.1 (T. Takagi–B. van der Waerden). Siano $0 < a < 1$ e $b > 1$ numeri reali tali che che $ab \geq 1$. Allora, la funzione

$$T_{a,b}(x) = \sum_{m \geq 0} a^m d\left(b^m x, \mathbb{Z}\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

ha le seguenti proprietà:

(a) se $ab > 1$, $T_{a,b}$ è $\alpha-$hölderiana se e solo se $0 < \alpha \le \dfrac{\log(1/a)}{\log b}$;
(b) se $ab = 1$, $T_{a,b}$ è $\alpha-$hölderiana se e solo se $\alpha \in (0,1)$;
(c) se $b \in \mathbb{N}_+$ è pari e $ab \ge 1$, $T_{a,b}$ non è derivabile in alcun punto di $\mathbb{R}$.

La funzione $T = T_{a,b}$ così definita è detta *funzione di Takagi–van der Waerden* o anche *le blanc manger* (provate a disegnarla ...). La sua definizione è dovuta a T. Takagi con $a = 1/2$ e $b = 2$ ed a B. van der Waerden con $a = 1/10$ e $b = 10$.

Per abbreviare le notazioni, denotiamo con

$$d(x) = d(x, \mathbb{Z}), \qquad x \in \mathbb{R},$$

la funzione distanza dagli interi ed osserviamo preliminarmente che, poiché si ha $0 \le a^m d(b^m x) \le a^m/2$ per ogni x e $0 < a < 1$, la serie converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ e quindi T è ben definita e continua su tutto $\mathbb{R}$.

(a) Sia $ab > 1$ e sia

$$0 < \alpha \le \frac{\log(1/a)}{\log b}.$$

Per $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $0 < |y - x| \le 1/b$, sia $n \ge 1$ intero tale che

$$\frac{1}{b^{n+1}} < |x - y| \le \frac{1}{b^n}.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} |T(y) - T(x)| &\le \sum_{0 \le m \le n-1} a^m \left| d(b^m y) - d(b^m x) \right| + \sum_{m \ge n} a^m \left| d(b^m y) - d(b^m x) \right| = \\ &= A_n + B_n \end{aligned}$$

con ovvio significato dei simboli.
Poiché d è lipschitziana di costante uno e risulta $|y - x|^{(1-\alpha)} \le 1/b^{n(1-\alpha)}$ per la scelta di n, si ha

$$\begin{aligned} 0 \le A_n \le \sum_{0 \le m \le n-1} (ab)^m |y - x| \le \frac{(ab)^n}{ab - 1}|y - x| \le \frac{1}{b^{n(1-\alpha)}} \frac{(ab)^n}{ab - 1}|y - x|^\alpha = \\ = \frac{(ab^\alpha)^n}{ab - 1}|y - x|^\alpha. \end{aligned}$$

Per la scelta di α si ha $0 < ab^\alpha \le 1$ e da ciò segue

$$0 \le A_n \le \frac{1}{ab - 1}|y - x|^\alpha.$$

Per l'altro termine si ha

$$0 \le B_n \le \frac{a^n}{1 - a} = \frac{1}{a(1 - a)} \cdot a^{n+1}$$

ed inoltre, sempre per la scelta di α, si ha

$$a^{n+1} = e^{(n+1)\log a} = e^{-(n+1)\log(1/a)} \le e^{-\alpha(n+1)\log b} = \left(\frac{1}{b^{n+1}}\right)^\alpha < |y - x|^\alpha.$$

Pertanto, risulta

$$|T(y) - T(x)| \le \left(\frac{1}{ab - 1} + \frac{1}{a(1 - a)}\right)|y - x|^\alpha, \qquad |y - x| \le 1/b,$$

e questo prova che T è $\alpha-$hölderiana in $\mathbb{R}$. Per completare la dimostrazione di (a), proviamo che T non è $\alpha-$hölderiana in $x = 0$ per alcun esponente α con

$$\frac{\log(1/a)}{\log b} < \alpha < 1.$$

Sia dunque α siffatto e scegliamo $k \geq 0$ tale che sia $1/b^{k+1} \leq 1/2$. Per $n \geq k+1$ si ha allora

$$\frac{T(1/b^n) - T(0)}{(1/b^n)^\alpha} = b^{\alpha n} T(1/b^n) \geq b^{\alpha n} \sum_{0 \leq m \leq n-k-1} a^m d(b^m/b^n) =$$

e, essendo $0 < b^m/b^n \leq 1/b^{k+1} \leq 1/2$ per ogni $m = 0, \dots, n-k-1$ per la scelta di k ed essendo $d(t) = t$ per $t \in [0, 1/2]$, si ha

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{b^{(1-\alpha)n}} \sum_{0 \leq m \leq n-k-1} (ab)^m = \\ &= \frac{1}{b^{(1-\alpha)n}} \frac{(ab)^{n-k} - 1}{ab - 1} = \\ &= (ab^\alpha)^n \frac{(ab)^{-k}}{ab-1} \left[1 - \frac{1}{(ab)^{n-k}}\right] \to +\infty \end{aligned}$$

per $n \to +\infty$ poichè risulta $ab^\alpha > 1$ per la scelta di α.

(b) Sia $0 < a = 1/b < 1$ e $0 < \alpha < 1$ fissato. Per $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $0 < |y - x| \leq 1/b$, sia $n \geq 1$ intero tale che

$$\frac{1}{b^{n+1}} < |x - y| \leq \frac{1}{b^n}.$$

Come nel caso precedente, si ha

$$|T(y) - T(x)| \leq A_n + B_n$$

ed in questo caso, essendo $a = 1/b$, con calcoli analoghi ai precedenti, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &\leq A_n \leq \frac{n}{b^{n(1-\alpha)}} |y - x|^\alpha \\ 0 &\leq B_n \leq \frac{b^{1+\alpha}}{(b-1)} \frac{1}{b^{n(1-\alpha)}} |y - x|^\alpha. \end{aligned}$$

Risulta pertanto

$$|T(y) - T(x)| \leq \left(n + \frac{b^{1+\alpha}}{b-1}\right) \frac{1}{b^{n(1-\alpha)}} |y - x|^\alpha = C_n |y - x|^\alpha, \qquad |y - x| \leq 1/b,$$

e, essendo la successione $\{C_n\}_n$ infinitesima e dunque limitata, si ha l'asserto.
Infine, ripetendo gli stessi calcoli svolti in (a) con $\alpha = 1$ si verifica che T non è lipschitziana[1].

(c) Per $b \in \mathbb{N}_+$ la funzione T è chiaramente $1-$periodica e quindi basta provare che non è derivabile in alcun punto $x \in [0, 1]$.
Sia dapprima $0 \leq x < 1$ e, per ogni intero $n \geq 1$, sia $k_n \in \{0, \dots, 2b^n - 1\}$ tale che

$$\frac{k_n}{2b^n} \leq x < \frac{k_n + 1}{2b^n}.$$

Consideriamo quindi le due successioni $x_n = k_n/2b^n$ e $y_n = (k_n + 1)/2b^n$ per $n \geq 1$. Esse sono rispettivamente crescente e decrescente e tali che $x_n \leq x < y_n$ per ogni n con $y_n - x_n \to 0^+$ per $n \to +\infty$. Se T fosse derivabile in x, si avrebbe

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{T(y_n) - T(x_n)}{y_n - x_n} = T'(x)$$

con

$$\frac{T(y_n) - T(x_n)}{y_n - x_n} = \sum_{0 \leq m \leq n} a^m \frac{d(b^m y_n) - d(b^m x_n)}{y_n - x_n}, \qquad n \geq 1,$$

[1] Se T fosse lipschitziana, sarebbe assolutamente continua (Definizione 6.26) e quindi derivabile quasi ovunque (Corollario 6.29) ma, quando b è pari, ciò è escluso da (c).

poiché, essendo b pari, per $m > n \geq 1$ risulta

$$b^m x_n = b^{m-n} k_n/2 \in \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad b^m y_n = b^{m-n}(k_m + 1)/2 \in \mathbb{N}.$$

Proviamo quindi che per ogni $m \geq 0$ esiste $j_m \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geq m \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{j_m}{2} \leq b^m x_n < b^m y_n \leq \frac{j_m + 1}{2}$$

ovvero che, per ogni $m \geq 0$ fissato e per ogni $n \geq m$, i numeri $b^m x_n$ e $b^m y_n$ appartengono al medesimo intervallo $[j_m/2, (j_m + 1)/2]$ in cui la funzione d è lineare. Se così non fosse, si avrebbe $b^m x_n < j/2 < b^m y_n$ per qualche $j \in \mathbb{N}_+$ e $n \geq m$ da cui seguirebbe necessariamente $k_m < jb^{n-m} < k_m + 1$ e ciò non può essere poiché jb^{n-m} è un intero k_m e $k_m + 1$ sono interi consecutivi.
Alla luce di ciò, per ogni $m \geq 0$ esiste $\varepsilon_m \in \{-, +\}$ tale che

$$a^m \frac{d(b^m y_n) - d(b^m x_n)}{y_n - x_n} = \varepsilon_m (ab)^m, \qquad n \geq m \geq 0,$$

Risulta pertanto

$$\frac{T(y_n) - T(x_n)}{y_n - x_n} = \sum_{0 \leq m \leq n} \varepsilon_m (ab)^m, \qquad n \geq 1,$$

e tale serie non può essere convergente essendo $ab \geq 1$.
Infine, per $x = 1$, consideriamo la successione $x_n = 1 - 1/b^n$ per $n \geq 1$. Come prima, si ha

$$\frac{T(x_n) - T(1)}{x_n - 1} = -b^n \sum_{0 \leq m \leq n-1} a^m d(b^m - b^m/b^n) = -b^n \sum_{0 \leq m \leq n-1} a^m \,(b^m/b^n) = = -\sum_{0 \leq m \leq n-1} (ab)^m$$

e tale serie diverge a $-\infty$ per $n \to +\infty$. □

Esempio 6.2 (K. Weierstrass). Siano $0 < a < 1$ e $b > 1$ numeri reali tali che $ab \geq 1$. Allora, la funzione

$$W_{a,b}(x) = \sum_{m \geq 0} a^m \cos(b^m \pi x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

ha le seguenti proprietà:

(a) se $ab > 1$, $W_{a,b}$ è $\alpha-$hölderiana se e solo se $0 < \alpha \leq \dfrac{\log(1/a)}{\log b}$;
(b) se $ab = 1$, $W_{a,b}$ è $\alpha-$hölderiana per ogni $\alpha \in (0, 1)$;
(c) se $b \in \mathbb{N}_+$ è dispari e $ab > 1 + 3\pi/2$, $W_{a,b}$ non è derivabile in alcun punto di $\mathbb{R}$.

La funzione $W = W_{a,b}$ così definita è detta *funzione di Weierstrass*. È stato provato da Hardy ([7]) che W non è derivabile in alcun punto di $\mathbb{R}$ per ogni $0 < a < 1$ e $b > 1$ tali che $ab \geq 1$ senza ulteriori limitazioni sui parametri.
Come nel caso della funzione di Takagi, osserviamo preliminarmente che la serie converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ poiché si ha $|a^m \cos(b^m \pi x)| \leq a^m$ per ogni x con $0 < a < 1$ cosicché W è ben definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. Anche le dimostrazioni di (a) e di (b) sono del tutto anaologhe alle dimostrazioni delle corrispondenti proprietà della funzione di Takagi. In particolare, se $ab > 1$, W non è $\alpha-$hölderiana in $x = 0$ per

$$\frac{\log(1/a)}{\log b} < \alpha < 1$$

poiché si ha

$$\begin{aligned}\frac{|W(1/b^n) - W(0)|}{(1/b^n)^\alpha} &= b^{\alpha n}\left|\sum_m a^m \left[\cos\left(b^m\pi/b^n\right) - 1\right]\right| = \\ &= 2b^{\alpha n}\sum_m a^m \left[\operatorname{sen}\left(b^m\pi/2b^n\right)\right]^2 \geq \\ &\geq 2b^{\alpha n}a^n\left[\operatorname{sen}\left(\pi/2\right)\right]^2 = 2(ab^\alpha)^n \to +\infty\end{aligned}$$

per $n \to +\infty$ poichè risulta $ab^\alpha > 1$ per la scelta di α. Resta quindi solo da provare (c).

(c) Supponiamo dunque che sia $b \in \mathbb{N}_+$ dispari e $ab > 1 + 3\pi/2$. Per provare che W non è derivabile in alcun punto, fissiamo $x \in \mathbb{R}$. Poiché W è pari, possiamo supporre che sia $x \geq 0$. Per ogni $h \neq 0$ ed $n \in \mathbb{N}_+$ si ha

$$\frac{W(x+h) - W(x)}{h} = A_n + B_n,$$

avendo posto

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{1}{h}\sum_{0\leq m\leq n-1} a^n\left[\cos\big(b^m\pi(x+h)\big) - \cos\left(b^m\pi x\right)\right];\\ B_n &= \frac{1}{h}\sum_{m\geq n} a^n\left[\cos\big(b^m\pi(x+h)\big) - \cos\left(b^m\pi x\right)\right].\end{aligned}$$

Poichè si ha $|\cos x_2 - \cos x_1| \leq |x_2 - x_1|$ per ogni x_1 e x_2, si ha

$$|A_n| \leq \pi\sum_{0\leq m\leq n-1}(ab)^m = \pi\frac{1-(ab)^n}{1-ab} < \pi\frac{(ab)^n}{ab-1}.$$

Per stimare B_n, poniamo $b^n x = k_n + r_n$ dove $k_n \in \mathbb{N}$ e $-1/2 < r_n \leq 1/2$. Poniamo inoltre

$$h_n = \frac{1-r_n}{b^n}$$

ed osserviamo che si ha $h_n \to 0^+$ per $n \to +\infty$. Stimiamo quindi B_n per $h = h_n$. Per ogni $m \geq n$ si ha

$$b^m(x+h_n) = b^{m-n}(b^n x + b^n h_n) = b^{m-n}(k_n+1)$$

e quindi, essendo b dispari cioè $b = 2p+1$ con $p \in \mathbb{N}_+$, si ha

$$\cos\big(b^m\pi(x+h_n)\big) = \cos\big((2p+1)^{m-n}\pi(k_n+1)\big) = (-1)^{k_n+1}$$

mentre per l'altro termine si ha, per la formula di addizione del coseno,

$$\begin{aligned}\cos\big(b^m\pi x\big) &= \cos\big(\pi b^{m-n}(b^n x)\big) = \\ &= \cos\big(\pi b^{m-n}k_n + r_n)\big) = \\ &= \cos\big(\pi b^{m-n}k_n\big)\cos\big(\pi b^{m-n}r_n\big) = \\ &= (-1)^{k_n}\cos\big(\pi b^{m-n}r_n\big).\end{aligned}$$

Pertanto, risulta

$$B_n = \frac{(-1)^{k_n}}{h_n}\sum_{m\geq n} a^m\left[1 + \cos\big(\pi b^{m-n}r_n\big)\right]$$

da cui segue

$$|B_n| = \frac{1}{h_n}\sum_{m\geq n} a^m\left[1 + \cos\big(\pi b^{m-n}r_n\big)\right] \geq \frac{1}{h_n}a^n\left[1 + \cos\left(\pi r_n\right)\right] \geq \frac{1}{h_n}a^n$$

poiché è $\cos(\pi r_n) \geq 0$, essendo $-1/2 < r_n \leq 1/2$. Si ha dunque

$$\left|\frac{W(x+h_n)-W(x)}{h_n}\right| \geq |B_n| - |A_n| \geq \frac{1}{h_n}a^n - \pi\frac{(ab)^n}{ab-1}$$

e, essendo $1/2 \leq 1 - r_n < 3/2$, risulta

$$0 < h_n = \frac{1-r_n}{b^n} \leq \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{b^n}$$

da cui segue infine

$$\left|\frac{W(x+h_n)-W(x)}{h_n}\right| \geq (ab)^n \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right).$$

Essendo $ab > 1 + 3\pi/2$ per ipotesi, il coefficiente di $(ab)^n$ è positivo e quindi, essendo $ab > 1$, si ricava infine

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{W(x+h_n)-W(x)}{h_n}\right| = +\infty$$

e questo prova l'asserto. □

Il teorema seguente mostra che le funzioni degli esempi precedenti che ai nostri occhi appaiono patologiche hanno in realtà un comportamento che è paradigmatico per le funzioni continue.

TEOREMA 6.3 (S. Banach). *L'insieme*

$$D = \left\{f \in C([0,1],\mathbb{R}) :\ \exists x \in [0,1)\ \textit{tale che}\ D_+f(x)\ \textit{e}\ D^+f(x)\ \textit{sono finiti}\right\}$$

è di prima categoria nello spazio metrico completo $C([0,1],\mathbb{R})$.

Pertanto, per una funzione continua in $[0,1]$ a valori reali o complessi la proprietà di non esssere derivabile in alcun punto è generica nello spazio metrico delle funzioni continue sull'intervallo $[0,1]$ a valori reali o complessi munito della metrica

$$d_u(f,g) = \sup\left\{|f(x)-g(x)| :\ x \in [0,1]\right\}, \qquad f,g \in C([0,1]),$$

della convergenza uniforme mentre la proprietà di essere derivabile in almeno un punto di tale intervallo è residuale nello stesso spazio.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni intero $n \geq 1$, denotiamo con D_n l'insieme delle funzioni $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ per le quali esiste $x \in [0,1-1/n]$ tale che si abbia

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leq n, \qquad 0 < h \leq 1/n.$$

Proviamo che risulta $D = \bigcup_n D_n$ e che ogni insieme D_n è chiuso con interno vuoto in $C([0,1],\mathbb{R})$.
Si ha chiaramente $\bigcup_n D_n \subset D$. Viceversa, se $f \in D$, sia $x \in [0,1)$ tale che si abbia

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leq L, \qquad 0 < h \leq \delta,$$

per qualche $0 < L < +\infty$ e $0 < \delta \leq 1 - x$. Posto $n \geq \max\{L, 1/\delta\}$, risulta $f \in D_n$.
Proviamo quindi che ogni insieme D_n è chiuso. A tale scopo, consideriamo una successione di funzioni $f_i \in D_n$ $(i \geq 1)$ ed una funzione $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ tale che $f_i \to f$ per $i \to +\infty$ uniformemente su $[0,1]$. Per ogni i, sia $x_i \in [0,1-1/n]$ il punto corrispondente alla funzione f_i nella definizione di D_n. Per compattezza, passando ad una sottosuccessione $x_j = x_{i_j}$, risulta $x_j \to x$ per $j \to +\infty$ per un qualche punto $x \in [0,1-1/n]$ e quindi, denotando con f_j la corrispondente funzione della successione, si ha $f_j(x_j+h) \to f(x+h)$ e $f_j(x_j) \to f(x)$ per $j \to +\infty$. Risulta allora

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leq n, \qquad 0 < h \leq 1/n,$$

e questo prova che $f \in D_n$ cioè che D_n è chiuso.
Resta infine da provare che ogni insieme D_n ha interno vuoto. Consideriamo a tal fine una funzione $f \in D_n$ e, fissato $\varepsilon > 0$, per il teorema di approssimazione di Weierstrass (Teorema III–2.7) scegliamo un polinomio $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che risulti $d_u(p, f) < \varepsilon/2$. Consideriamo quindi le funzioni a dente di sega

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k} d(k^2 x, \mathbb{Z}) = k d(x, \mathbb{Z}/k^2), \qquad x \in \mathbb{R} \quad (k \geq 1).$$

Si ha evidentemente $0 \leq \varphi_k(x) \leq 1/2k$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e ogni funzione φ_k è derivabile da destra in ogni punto di $\mathbb{R}$ con derivata di modulo costante $|(\varphi_k)'_+(x)| = k$ per ogni x. Scegliamo

$$k > \max\left\{d_u(p', 0) + n, 1/\varepsilon\right\}$$

e consideriamo la funzione f_ε di $C([0,1], \mathbb{R})$ definita da

$$f_\varepsilon = p + \varphi_k.$$

Per tale funzione si ha

$$\left|(f_\varepsilon)'_+(x)\right| = \left|(p + \varphi_k)'_+(x)\right| \geq \left|(\varphi_k)'_+(x)\right| - |p'(x)| \geq k - d_u(p', 0) > n$$

per ogni punto $x \in [0, 1 - 1/n]$ e da ciò segue $f_\varepsilon \notin D_n$. Essendo $d_u(f_\varepsilon, f) < \varepsilon$, dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si conclude che D_n ha interno vuoto in $C([0,1], \mathbb{R})$. $\square$

Le funzioni derivabili in almeno un punto sono un insieme piccolo tra le funzioni continue non solo dal punto di vista topologico della categoria di Baire ma anche dal punto di vista della teoria della misura. Esse hanno infatti misura zero rispetto alla misura di Wiener su $C([0,1])$ ([]).

Derivazione delle funzioni monotòne. Abbiamo visto in precedenza esempi di funzioni continue che non sono derivabili in alcun punto. La situazione è completamente diversa nel caso di funzioni a valori reali monotòne: esse sono derivabili quasi ovunque come prova il celebre *teorema di derivazione delle funzioni monotòne di Lebesgue* che esaminiamo in questa parte.
Per ovvi motivi consideriamo in questa parte esclusivamente funzioni a valori reali e, data una funzione monotòna $f \colon I \to \mathbb{R}$, per ogni $x \in I$ poniamo

$$f(x^-) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x = \inf I \\ \lim\limits_{y \to x^-} f(y) & \text{se } x > \inf I; \end{cases} \qquad f(x^+) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x = \sup I \\ \lim\limits_{y \to x^+} f(y) & \text{se } x < \sup I; \end{cases}$$

e denotiamo con

$$D(f) = \left\{x \in I : \ f(x^-) \neq f(x^+)\right\}$$

l'insieme al più numerabile dei punti di discontinuità di f (Teorema 4.30 in [14]).
Per ogni punto di discontinuità $x \in D(f)$, il numero

$$f(x^+) - f(x^-)$$

è il *salto* o *oscillazione di f in x* (Esercizio I–2.30).

Teorema 6.4 (H. Lebesgue). *Sia $f \colon I \to \mathbb{R}$ una funzione monotòna. Allora,*

(a) *f è derivabile quasi ovunque in I;*
(b) *f' è localmente integrabile in I e si ha*

$$0 \leq \left|\int_a^b f'\right| + \sum_{x \in D(f) \cap [a,b]} |f(x^+) - f(x^-)| \leq |f(b^+) - f(a^-)|,$$

per ogni $a, b \in I$ con $a < b$.

La derivata che compare in (b) è la funzione definita in I da

$$x \mapsto \begin{cases} f'(x) & \text{se } f \text{ è derivabile in } x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e che denotiamo qui e nel seguito con abuso di notazione come f'.
Se $f \colon I \to \mathbb{R}$ è monotòna e limitata, la derivata f' risulta integrabile in I e si ha

$$0 \leq \left| \int_I f' \right| + \sum_{x \in D(f)} |f(x^+) - f(x^-)| \leq \sup_I f - \inf_I f$$

e in particolare, quando $I = [a\,, b]$ è un intervallo compatto, risulta

$$0 \leq \left| \int_a^b f' \right| + \sum_{x \in D(f)} |f(x^+) - f(x^-)| \leq |f(b) - f(a)|.$$

Dalla dimostrazione del teorema di derivazione di Lebesgue scorporiamo il risultato seguente che ha interesse indipendente dalla dimostrazione di Teorema 6.4.

PROPOSIZIONE 6.5. *Sia $f \colon I \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora, l'insieme*

$$D_s = \left\{ x \in \operatorname{int}(I) : \ \exists\, f'_\pm(x) \ \text{ e } f'_-(x) \neq f'_+(x) \right\}$$

è al più numerabile.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo che

$$D_s^+ = \left\{ x \in D_s : \ f'_-(x) < f'_+(x) \right\}$$

è numerabile, in maniera analoga si procede per l'insieme D_s^- definito dalla disuguaglianza opposta.
Per ogni $x \in D_s^+$, sia $(r_x\,, s_x\,, t_x) \in \mathbb{Q}^3$ una terna di razionali tali che

- $x \in (s_x\,, t_x)$ e $(s_x\,, t_x) \subset I$;
- $f'_-(x) < r_x < f'_+(x)$;
- $\begin{cases} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} < r_x & \text{se } s_x < y < x \\ \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} > r_x & \text{se } x < y < t_x; \end{cases}$

cosicché risulta

$$f(y) - f(x) > r_x(y - x), \qquad s_x < y < t_x \text{ e } y \neq x.$$

Proviamo che la funzione $\Phi \colon D_s^+ \to \mathbb{Q}^3$ definita da $\Phi(x) = (r_x\,, s_x\,, t_x)$ per ogni $x \in D_s^+$ è iniettiva. Siano dunque $x_1\,, x_2 \in D_s^+$ tali che $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$ e poniamo per brevità $\Phi(x_i) = (r\,, s\,, t)$ per $i = 1\,, 2$. Si ha

$$\begin{aligned} f(y) - f(x_1) &> r(y - x_1) \qquad s < y < t,\ y \neq x_1 \\ f(y) - f(x_2) &> r(y - x_2) \qquad s < y < t,\ y \neq x_2 \end{aligned}$$

e, poiché $x_1\,, x_2 \in (s\,, t)$, se fosse $x_1 \neq x_2$ si avrebbe una contraddizione scegliendo $y = x_2$ nella prima disuguaglianza e $y = x_1$ nella seconda. $\square$

Possiamo ora dimostrare il teorema di derivazione delle funzioni monotòne di Lebesgue.

DIMOSTRAZIONE (TEOREMA 6.4). Possiamo supporre che la funzione f sia crescente cosicché risulta $D_\pm f(x) \geq 0$ e $D^\pm f(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$ per cui sono definite.

(a) Non è restrittivo supporre in questa parte che sia $I = [a\,, b]$. Posto allora

$$D = \left\{ x \in (a\,, b) : \ f \text{ non è derivabile in } x \right\},$$

si ha $D = D^+ \cup D^- \cup D_s \cup D_\infty$ dove

$$D^{\pm} = \{x \in (a\,,b) :\ D_{\pm} f(x) < D^{\pm} f(x)\}$$
$$D_\infty = \{x \in (a\,,b) :\ f'(x) = +\infty\}$$

e D_s è l'insieme numerabile definito nel lemma precedente. Poniamo inoltre

$$D^{\pm} = \bigcup \Big\{ D^{\pm}_{p,q} :\ p\,,q \in \mathbb{Q} \text{ e } 0 < p < q \Big\}$$

ove

$$D^{\pm}_{p,q} = \{x \in (a\,,b) :\ 0 \le D_{\pm} f(x) < p < q < D^{\pm} f(x)\}$$

per ogni $p\,,q \in \mathbb{Q}$ con $0 < p < q$ e, tenendo conto che D_s è numerabile per il lemma precedente, dividiamo la dimostrazione nei due passi seguenti:

(1) $\left|D^{\pm}_{p,q}\right| = 0$ per ogni $0 < p < q$;

(2) $|D_\infty| = 0$;

che insieme forniscono la tesi.

(1) Per assurdo, sia $\left|D^{\pm}_{p,q}\right|_* = \alpha > 0$. Fissato $0 < \varepsilon < \alpha/2$, esiste allora U insieme aperto tale che $D^{+}_{p,q} \subset U \subset (a\,,b)$ e $|U| < \alpha + \varepsilon$. Per ogni $x \in D^{+}_{p,q}$, esistono allora $h_{x,n} > 0$ $(n \ge 1)$ tali che

- $[x\,,x + h_{x,n}] \subset U$ per ogni n;
- $f(x + h_{x,n}) - f(x) < p h_{x,n}$ per ogni n;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} h_{x,n} = 0^+$.

La famiglia di intervalli

$$\mathcal{I} = \{[x\,,x + h_{x,n}] :\ n \ge 1,\ x \in D^{+}_{p,q}\}$$

così definita è un ricoprimento di Vitali di $D^{+}_{p,q}$. Esistono quindi $[x_m\,,x_m + h_m]$ $(m = 1\,,\dots\,,n)$ intervalli disgiunti di $\mathcal{I}$ tali che

$$\Big|D^{+}_{p,q} \setminus \Big(\bigcup\nolimits_m [x_m\,,x_m + h_m]\Big)\Big|_* \le \varepsilon.$$

Sia quindi V l'insieme aperto definito da $V = \bigcup_m (x_m\,,x_m + h_m)$. Si ha evidentemente $\left|D^{+}_{p,q} \setminus V\right|_* \le \varepsilon$ e $V \subset U$ da cui segue

$$\sum_m h_m = |V| < \alpha + \varepsilon$$

e quindi

$$\sum_m [f(x_m + h_m) - f(x_m)] < p \sum_m h_m < p(\alpha + \varepsilon).$$

Consideriamo ora l'insieme $D^{+}_{p,q} \cap V$. Per ogni $y \in D^{+}_{p,q} \cap V$, esistono $k_{y,j} > 0$ $(j \ge 1)$ tali che

- $[y\,,y + k_{y,j}] \subset V$ per ogni j;
- $f(y + k_{y,j}) - f(y) > q k_{y,j}$ per ogni j;
- $\lim\limits_{j\to+\infty} k_{y,j} = 0^+$.

La famiglia di intervalli

$$\mathcal{J} = \{[y\,,y + k_{y,j}] :\ j \ge 1,\ y \in D^{+}_{p,q} \cap V\}$$

così definita è un ricoprimento di Vitali di $\in D^{+}_{p,q} \cap V$. Esistono quindi $[y_i\,,y_i + k_i]$ $(i = 1\,,\dots\,,j)$ intervalli disgiunti di $\mathcal{J}$ tali che

$$\Big|\big(D^{+}_{p,q} \cap V\big) \setminus \Big(\bigcup\nolimits_i [y_i\,,y_i + k_i]\Big)\Big|_* \le \varepsilon.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\alpha = \left|D^+_{p,q}\right|_* &\le \left|D^+_{p,q}\cap V\right|_* + \left|D^+_{p,q}\setminus V\right|_* \le \\ &\le \left|(D^+_{p,q}\cap V)\cap \Big(\bigcup\nolimits_i [y_i\,,y_i+k_i]\Big)\right|_* + \\ &\qquad + \left|(D^+_{p,q}\cap V)\setminus \Big(\bigcup\nolimits_i [y_i\,,y_i+k_i]\Big)\right|_* + \left|D^+_{p,q}\setminus V\right|_* \le \\ &\le \sum_i k_i + 2\varepsilon\end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned}q(\alpha-2\varepsilon) \le \sum_i qk_i &< \sum_i [f(y_i+k_i)-f(y_i)] \le \\ &\le \sum_m [f(x_m+h_m)-f(x_m)] < p(\alpha+\varepsilon)\end{aligned}$$

poiché ogni intervallo $[y_i\,,y_i+k_i]$ è contenuto in uno degli intervalli $[x_m\,,x_m+h_m]$ ed f è crescente. Deve quindi essere

$$0<\frac{q-p}{p+2q}\alpha<\varepsilon<\alpha/2$$

e ciò contraddice l'arbitrarietà di $\varepsilon\in(0\,,\alpha/2)$.

(2) Sia $t>0$. Per ogni $x\in D_\infty$, esiste $h_x>0$ tale che

- $[x\,,x+h_x]\subset(a\,,b)$;
- $f(x+h)-f(x)\ge th$ per $0<h\le h_x$.

Come prima, la famiglia di intervalli

$$\mathcal{I}=\big\{[x\,,x+h]:\ 0<h\le h_x,\ x\in D_\infty\big\}$$

è un ricoprimento di Vitali di D_∞. Esistono quindi $[x_n\,,x_n+h_n]$ $(n\ge1)$ intervalli disgiunti di $\mathcal{I}$ tali che

$$\left|D_\infty\setminus\Big(\bigcup\nolimits_j [x_n\,,x_n+h_n]\Big)\right|=0.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}t\,|D_\infty|_* \le t\left|D_\infty\cap\Big(\bigcup\nolimits_n [x_n\,,x_n+h_n]\Big)\right|_* &\le \\ \le t\sum_n h_n \le \sum_n [f(x_n+h_n)-f(x_n)] &\le f(b)-f(a)\end{aligned}$$

e dall'arbitrarietà di $t>0$ segue $|D_\infty|=0$.

(b) Supponiamo dapprima che sia $I=[a\,,b]$ ed estendiamo f a tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f(x)=f(a)$ per $x\le a$ e $f(x)=(b)$ per $x\ge b$. Posto

$$\Delta_n f(x)=\frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n},\qquad x\in\mathbb{R}\quad(n\ge1),$$

ogni funzione $\Delta_n f$ è Borel misurabile, non negativa e $\Delta_n f\to f'$ quasi ovunque in $[a\,,b]$. Quindi, f' è Lebesgue misurabile e non negativa e per il lemma di Fatou, si ha

$$0\le\int_a^b f'\le\liminf_n\int_a^b\Delta_n f=\liminf_n n\int_a^b[f(x+1/n)-f(x)]\,dx.$$

Poiché f è Riemann integrabile in $[a\,,b]$ in quanto crescente, dalle proprietà elementari dell'integrale di Riemann e dalla definizione di f si ottiene

$$0\le\int_a^b[f(x+1/n)-f(x)]\,dx=\int_b^{b+1/n}f(x)\,dx-\int_a^{a+1/n}f(x)\,dx\le\frac1n f(b)-\frac1n f(a)$$

per ogni $n \geq 1$. Da ciò segue

$$0 \leq \int_a^b f' \leq f(b) - f(a)$$

e questo prova l'integrabilità di f' in $[a\,,b]$.
Consideriamo ora $x \in D(f) \cap (a\,,b)$. Ragionando come prima, per $h > 0$ tale che $[x-h\,,x+h] \subset (a\,,b)$ si ha

$$\int_a^{x-h} f' + \int_{x+h}^b f' \leq f(x-h) - f(a) + f(b) - f(x+h)$$

che equivale a

$$\int_a^{x-h} f' + \int_{x+h}^b f' + [f(x+h) - f(x-h)] \leq f(b) - f(a).$$

Per $h \to 0^+$ risulta quindi

$$\int_a^b f' + [f(x^+) - f(x^-)] \leq f(b) - f(a)$$

e la stessa disuguaglianza vale per $x \in D(f) \cap \{a\,,b\}$. Iterando questo argomento per ogni insieme finito di $D(f)$ risulta

$$0 \leq \int_a^b f' + \sum_{x \in D(f)} [f(x^+) - f(x^-)] \leq f(b) - f(a)$$

quando $f\colon [a\,,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione crescente in $[a\,,b]$.
Sia ora $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione crescente definita in un intervallo I qualunque e siano $a\,,b \in I$ con $a < b$ fissati. Dal caso precedente applicato alla restrizione di f all'intervallo compatto $[a\,,b]$ si ricava l'integrabilità di f' in $[a\,,b]$ e la disuguaglianza precedente diviene

$$0 \leq \int_a^b f' + \sum_{x \in D(f)\cap(a,b)} [f(x^+)-f(x^-)]+[f(a^+)-f(a)]+[f(b)-f(b^-)] \leq f(b)-f(a).$$

Sommando allora $[f(a) - f(a^-)] + [f(b^+) - f(b)]$ ad ambo i membri si ottiene la disuguaglianza in (b) e questo conclude la dimostrazione. $\square$

Se $f\colon [a\,,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione monotòna, la disuguaglianza in Teorema 6.4−(b) può essere stretta come provano i due famosi esempi seguenti. La funzione del primo esempio è la *funzione di Cantor–Vitali*: essa è una funzione continua e crescente dell'intervallo $[0\,,1]$ su se stesso la cui derivata esiste ed è nulla in quasi ogni punto di $[0\,,1]$. La funzione del secondo esempio è ancora più sorprendente: essa è un omeomorfismo strettamente crescente di $[0\,,1]$ su se stesso avente derivata nulla quasi ovunque.

Esempio 6.6 (G. Cantor–G. Vitali). Sia C l'insieme di Cantor (Esempio 5.14). Costruiamo una funzione $V\colon [0\,,1] \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

(a) V è continua, crescente e tale che $V(0) = 0$ e $V(1) = 1$;
(b) V è derivabile in $[0\,,1] \setminus C$ con $V'(t) = 0$ per ogni $t \in [0\,,1] \setminus C$;
(c) $|V(C)| = 1$;
(d) V è $\alpha-$hölderiana se e solo se $0 < \alpha \leq \dfrac{\log 2}{\log 3}$.

Tale funzione è detta *funzione di Cantor–Vitali*.
Risulta $C = \bigcap_n C_n$ ove $\{C_n\}_n$ è una successione decrescente di insiemi compatti e non vuoti in cui ciascun insieme C_n è unione di 2^n intervalli compatti e disgiunti

$$C_n = I_{n,1} \cup \cdots \cup I_{n,2^n}, \qquad n \geq 0,$$

ciascuno dei quali di lunghezza $1/3^n$ e tali che

$$I_{n+1,2m-1} \cup I_{n+1,2m} \subset I_{n,m}, \qquad m = 1, \ldots, 2^n \quad (n \geq 0).$$

Poniamo

$$\left.\begin{array}{ll} v_n(t) = (3/2)^n \, 1_{C_n}(t), & t \in [0,1] \\ V_n(x) = \displaystyle\int_0^x v_n(t)\, dt, & x \in [0,1] \end{array}\right. \quad n \geq 0.$$

I grafici delle funzioni V_n per $n = 0, 1, 2$ sono rappresentati in Figura 6.1−(a). Ogni funzione V_n così definita è continua e crescente in $[0,1]$ e tale che $V_n(0) = 0$, $V_n(1) = 1$ per ogni n poiché si ha $|C_n| = (2/3)^n$. Inoltre, si ha

$$\int_{I_{n,m}} v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2^n},$$

e

$$\begin{aligned} \int_{I_{n,m}} v_{n+1} &= \int_{I_{n+1,2m-1}} v_{n+1} + \int_{I_{n+1,2m}} v_{n+1} = \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{3^{n+1}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

e da ciò segue $V_{n+m}(x) = V_n(x)$ per ogni $x \in [0,1] \setminus C_n$ e per ogni $m, n \geq 1$. Conseguentemente, si ha

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 1} |V_{n+1}(x) - V_n(x)| &= \max_{1 \leq m \leq 2^n} \left(\max_{x \in I_{n,m}} \left| \int_{I_{n,m} \cap [0,x]} (v_{n+1} - v_n) \right| \right) \leq \\ &\leq \max_{1 \leq m \leq 2^n} \int_{I_{n,m}} |v_{n+1} - v_n| = \\ &= 2 \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{3}{2}\right)^n \right] \cdot \frac{1}{3^{n+1}} + \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{3^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \end{aligned}$$

per ogni n. Pertanto, la successione di funzioni $\{V_n\}_n$ converge uniformemente nell'intervallo $[0,1]$ ad una funzione $V\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, crescente e tale che $V(0) = 0$ e $V(1) = 1$. Inoltre, V è costante su ogni componente connessa di $[0,1] \setminus C$ per costruzione. Quindi, si ha $V'(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1] \setminus C$ ovvero V ha derivata nulla quasi ovunque in $[0,1]$ e risulta $|V(C)| = 1$ poiché l'insieme $V([0,1] \setminus C)$ è numerabile.
Resta infine da provare (d) cioè che la funzione V è hölderiana con esponente α se e solo se

$$0 < \alpha \leq \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Il numero a destra è la dimensione di Hausdorff $\dim_{\mathcal{H}}(C)$ dell'insieme di Cantor C (Esempio **??**).
Per dimostrare (d), proviamo preliminarmente che, posto $V_0(x) = x$ per $x \in [0,1]$, le funzioni approssimanti V_n sono legate tra loro dalla seguente relazione ricorsiva

$$(*) \qquad V_{n+1}(x) = \begin{cases} V_n(3x)/2 & \text{per } x \in [0,1/3] \\ 1/2 & \text{per } x \in [1/3,2/3] \\ 1/2 + V_n\big(3(x-2/3)\big)/2 & \text{per } x \in [2/3,1] \end{cases} \qquad n \geq 0.$$

A tal fine denotiamo con S_1 ed S_2 le funzioni affini definite da $S_1(x) = x/3$ ed $S_2(x) = 2/3 + x/3$ per $x \in \mathbb{R}$. Per costruzione si ha evidentemente

$$C_{n+1} = S_1(C_n) \cup S_2(C_n), \qquad n \geq 0,$$

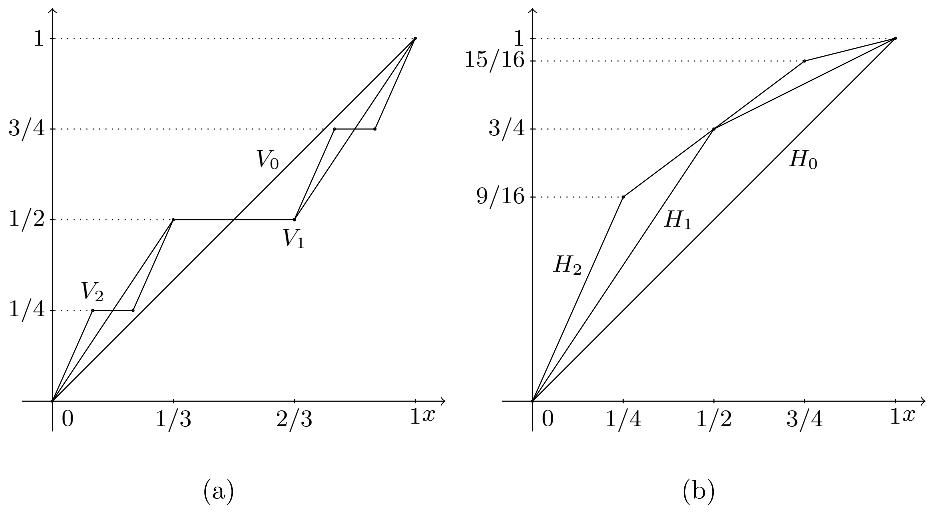


FIGURA 6.1. (a) Le funzioni V_n per $n = 0, 1, 2$. (b) Le funzioni H_n per $n = 0, 1, 2$ e $\lambda = 1/2$, $\mu = 3/4$.

ed in particolare risulta $S_1(C_n) \subset [0, 1/3]$ e $S_2(C_n) \subset [2/3, 1]$. Si ha pertanto

$$\begin{aligned} V_{n+1}(x) &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_0^x 1_{C_{n+1}}(t)\, dt = \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_0^x 1_{S_1(C_n)}(t)\, dt + \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_{2/3}^x 1_{S_2(C_n)}(t)\, dt. \end{aligned}$$

Per $x \in [0, 1/3]$, il secondo integrale è nullo e, per ogni $t \in [0, 1/3]$, risulta $t \in S_1(C_n)$ se e solo se $3t \in C_n$ cosicché si ha

$$V_{n+1}(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_0^x 1_{S_1(C_n)}(t)\, dt = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_0^x 1_{C_n}(3t)\, dt = \frac{1}{2} V_n(3x)$$

per ogni $x \in [0, 1/3]$. Analogamente, essendo $S_1(C_n) \subset [0, 1/3]$ e $S_2(C_n) \subset [2/3, 1]$, si ha

$$V_{n+1}(x) = V_{n+1}(1/3) = 1/2, \qquad x \in [1/3, 2/3].$$

Infine, per $x \in [2/3, 1]$ si ha

$$V_{n+1}(x) = V_{n+1}(1/3) + \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_{2/3}^x 1_{S_2(C_n)}(t)\, dt$$

e, per ogni $t \in [2/3, 1]$, risulta $t \in S_2(C_n)$ se e solo se $3(t - 2/3) \in C_n$ cosicché si ha

$$V_{n+1}(x) = V_{n+1}(1/3) + \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_{2/3}^x 1_{C_n}\left(3(t - 2/3)\right)\, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} V_n\left(3(x - 2/3)\right)$$

per ogni $x \in [2/3, 1]$ e questo completa la dimostrazione di $(*)$.
Fissato dunque α come in (d), proviamo che risulta

$$(**) \qquad |V_n(y) - V_n(x)| \leq |y - x|^\alpha, \qquad x, y \in [0, 1],$$

per ogni n cosicché la stessa disuguaglianza vale per V. Procediamo per induzione su n. Per $n = 0$ e per $0 \leq x < y \leq 1$ si ha

$$0 \leq V_0(y) - V_0(x) = y - x = (y - x)^{1-\alpha}(y - x)^\alpha = (y - x)^\alpha.$$

Supponiamo quindi che $(**)$ valga per n e consideriamo V_{n+1}. Per $0 \leq x < y \leq 1/3$ si ha per l'ipotesi di induzione

$$0 \leq V_{n+1}(y) - V_{n+1}(x) = \frac{1}{2}[V_n(3y) - V_n(3x)] \leq (3^\alpha/2)(y-x)^\alpha \leq (y-x)^\alpha$$

poiché risulta $3^\alpha/2 \leq 1$ per la scelta di α. Analogamente, per $2/3 \leq x < y \leq 1$ si ha

$$\begin{aligned} 0 \leq V_{n+1}(y) - V_{n+1}(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}V_n\big(3(y-2/3)\big) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}V_n\big(3(x-2/3)\big) \leq \\ &\leq (3^\alpha/2)(y-x)^\alpha \leq (y-x)^\alpha \end{aligned}$$

ancora per l'ipotesi di induzione e per la scelta di α. I casi in cui x ed y sono tali che $1/3 \leq x \leq y \leq 2/3$ o $0 \leq x \leq 1/3 \leq y \leq 2/3$ o $1/3 \leq x \leq 2/3 \leq y \leq 1$ si ricavano facilmente da quelli già considerati cosicchè, per completare la dimostrazione di $(**)$, resta solo da considerare il caso in cui si ha $0 \leq x \leq 1/3 < 2/3 \leq y \leq 1$. In tal caso, essendo $V_{n+1}(1/3) = V_{n+1}(2/3)$, si ha

$$\begin{aligned} 0 \leq V_{n+1}(y) - V_{n+1}(x) &= [V_{n+1}(y) - V_{n+1}(2/3)] + [V_{n+1}(1/3) - V_{n+1}(x)] \leq \\ &\leq (y-2/3)^\alpha + (1/3-x)^\alpha \leq \end{aligned}$$

cosicché, dalla disuguaglianza di Hölder con esponenti $p = 1/\alpha$ e $q = 1/(1-\alpha)$, si ricava

$$\begin{aligned} &\leq 2^{1-\alpha}(y-x-1/3)^\alpha = \\ &= 2^{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{3(y-x)}\right)^\alpha (y-x)^\alpha \leq \\ &\leq 2^{1-\alpha}(2/3)^\alpha(y-x)^\alpha = \\ &= (3^\alpha/2)(y-x)^\alpha \leq (y-x)^\alpha \end{aligned}$$

per la scelta di α e questo completa la dimostrazione di $(**)$.
Per completare la dimostrazione di (d), resta infine da provare che V non è $\alpha-$hölderiana in $x = 0$ per alcun esponente α tale che

$$\frac{\log 2}{\log 3} < \alpha < 1.$$

Sia dunque α siffatto e, atteso che risulta $V(1/3^n) = V_n(1/3^n)$ per ogni n, si ha

$$\frac{V(1/3^n) - V(0)}{(1/3^n)^\alpha} = 3^{\alpha n}V_n(1/3^n) = 3^{\alpha n}\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{3^n} = (3^\alpha/2)^n \to +\infty$$

per $n \to +\infty$ poichè risulta $3^\alpha/2 > 1$ per la scelta di α. □

Esempio 6.7 (F. Riesz–B. Sz.-Nagy). Costruiamo una funzione $H\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

(a) H è continua, strettamente crescente e tale che $H(0) = 0$ e $H(1) = 1$;
(b) H è derivabile quasi ovunque in $[0,1]$ con $H'(x) = 0$ per q.o. $x \in [0,1]$.

Tale funzione è un omeomorfismo strettamente crescente di $[0,1]$ su se stesso.
Per costruirla, fissati $0 < \lambda < 1/2 < \mu < 1$ tali che $\lambda + \mu = 1$, denotiamo con

$$D_n = \left\{k/2^n : k = 0, \dots, 2^n\right\}, \qquad n \geq 0,$$

l'insieme dei razionali diadici di $[0,1]$ di ordine n e con $D = \bigcup_n D_n$ l'insieme di tutti i razionali diadici di $[0,1]$ e costruiamo una successione di funzioni affini a tratti

$H_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ponendo $H_0(x) = x$ per ogni $0 \le x \le 1$ e definendo ricorsivamente H_n per $n \ge 1$ in modo che sui razionali diadici $k/2^n$ di D_n sia definita da

$$H_n\left(\frac{k}{2^n}\right) = \begin{cases} H_{n-1}\left(\dfrac{h}{2^{n-1}}\right) & k = 2h \text{ e } h = 0, \dots, 2^{n-1} \\ \lambda H_{n-1}\left(\dfrac{h}{2^{n-1}}\right) + \mu H_{n-1}\left(\dfrac{h+1}{2^{n-1}}\right) & k = 2h+1 \text{ e } h = 0, \dots, 2^{n-1}-1. \end{cases}$$

La costruzione appena descritta per $n = 0, 1, 2$ e $\lambda = 1/4$ e $\mu = 3/4$ è illustrata in Figura 6.1 – (b). Le funzioni H_n così definite godono evidentemente delle seguenti proprietà:

- ogni H_n è continua e strettamente crescente in $[0,1]$;
- $H_n(0) = 0$ e $H_n(1) = 1$ per ogni n;
- $H_n \le H_{n+1}$ in $[0,1]$;
- $H_n(k/2^m) = H_m(k/2^m)$ per $k = 0, \dots, 2^m$ e $n \ge m \ge 0$.

Poniamo quindi

$$H(x) = \lim_{n \to +\infty} H_n(x), \qquad x \in [0,1],$$

cosicché H è una funzione crescente in $[0,1]$ tale che

- $H(0) = 0$ e $H(1) = 1$;
- $H(k/2^m) = H_n(k/2^m)$ per $k = 0, \dots, 2^m$ e $n \ge m \ge 0$.

Inoltre, per $0 \le x < y \le 1$, si ha $x < k/2^m < y$ per $k \in \{0, \dots, 2^m\}$ e $m \ge 0$ opportuni cosicché per $n \ge m$ risulta

$$H(x) \le H(k/2^m) = H_n(k/2^m) < H_n(y) \le H(y)$$

da cui segue che H è in effetti strettamente crescente in $[0,1]$.
Per provare la continuità di H, consideriamo l'incremento dei valori di H agli estremi di intervalli individuati da coppie di razionali diadici successivi. Consideriamo a tal fine due successioni di razionali diadici consecutivi $\{\alpha_n\}_n$ e $\{\beta_n\}_n$ tali che si abbia

- $\alpha_n, \beta_n \in D_n$ e $\alpha_n < \beta_n$;
- $\alpha_n \le \alpha_{n+1}$ e $\beta_{n+1} \le \beta_n$;

per ogni $n \ge 0$. Essendo per ipotesi α_n e β_n razionali diadici consecutivi, risulta

$$\alpha_n = k_n/2^n \qquad \text{e} \qquad \beta_n = (k_n+1)/2^n$$

per un qualche intero $k_n \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ per ogni $n \ge 0$ e deve evidentemente essere $\alpha_n = \alpha_{n+1}$ e $\beta_{n+1} = \beta_n - 1/2^{n+1}$ oppure $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 1/2^{n+1}$ e $\beta_{n+1} = \beta_n$. Nel primo caso deve essere k_{n+1} pari e quindi si ha

$$\begin{aligned} 0 \le H(\beta_{n+1}) - H(\alpha_{n+1}) &= H_{n+1}(\beta_{n+1}) - H_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \\ &= \lambda H_n(\alpha_n) + \mu H_n(\beta_n) - H_n(\alpha_n) = \mu[H_n(\beta_n) - H_n(\alpha_n)] \end{aligned}$$

mentre nell'altro caso deve essere k_{n+1} dispari da cui, in maniera analoga, si ottiene

$$0 \le H(\beta_{n+1}) - H(\alpha_{n+1}) = \lambda[H_n(\beta_n) - H_n(\alpha_n)].$$

Pertanto, ricorsivamente risulta

$$0 \le H(\beta_n) - H(\alpha_n) = \lambda^{i_n}\mu^{j_n}, \qquad n \ge 0,$$

dove $\{i_n\}_n$ e $\{j_n\}_n$ sono successioni crescenti di interi tali che $i_n + j_n = n$ per ogni $n \ge 0$ e da ciò segue ovviamente

$$(***) \qquad 0 \le H(\beta_n) - H(\alpha_n) \le \left(\max\{\lambda, \mu\}\right)^n, \qquad n \ge 0.$$

Sia ora $x \in D$ un razionale diadico di $[0,1]$. Esiste allora una coppia di successioni $\{\alpha_n\}_n$ e $\{\beta_n\}_n$ formate da razionali diadici consecutivi con le proprietà considerate in precedenza per le quali risulta $x = \alpha_n$ definitivamente se $x \in D \cap [0,1)$ ovvero $x = \beta_n$ definitivamente se $x \in D \cap (0,1]$. Per $(***)$ in entrambi i casi si ha allora

$$0 \leq H(\beta_n) - H(x) \leq \big(\max\{\lambda, \mu\}\big)^n, \qquad n \geq 0,$$

da cui segue la continuità di H da destra nei punti $x \in D \cap [0,1)$ nel primo caso e da sinistra nei punti $x \in D \cap (0,1]$ nel secondo caso. Infine, se $x \in (0,1) \cap D$, esiste una ed una sola coppia di successioni $\{\alpha_n\}_n$ e $\{\beta_n\}_n$ come sopra tale che $\{x\} = \bigcap_n [\alpha_n, \beta_n]$. In questo caso, si ha $\alpha_n < x < \beta_n$ per ogni n e come prima si ricava

$$\lim_{y \to x^+} H(y) - \lim_{y \to x^-} H(y) = 0$$

da cui segue la continuità di H in tali punti. Pertanto H è continua in $[0,1]$ e questo completa la dimostrazione di (a).
Relativamente a (b), H è derivabile quasi ovunque in $[0,1]$ essendo strettamente crescente. Proviamo che essa ha derivata nulla quasi ovunque mostrando che, in ogni punto di derivabilità $x \in (0,1)$ di H che non sia un razionale diadico, risulta $H'(x) = 0$. Fissato dunque $x \in (0,1)$ siffatto, siano $\{\alpha_n\}_n$ e $\{\beta_n\}_n$ le due successioni di razionali diadici con le proprietà considerate in precedenza tali che $\{x\} = \bigcap_n [\alpha_n, \beta_n]$ e, posto $\xi = H'(x)$ con $0 \leq \xi < +\infty$, proviamo che deve essere $\xi = 0$. Come già osservato in Esempio 6.1 – (c), si ha

$$(****) \qquad \lim_{n \to +\infty} \log \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \xi = 0 \\ \log \xi & \text{se } 0 < \xi < +\infty. \end{cases}$$

Ma per $(***)$, essendo $\beta_n - \alpha_n = 1/2^n$ e $i_n + j_n = n$ per ogni n, si ha

$$\log \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = \log\big(2^n \lambda^{i_n} \mu^{j_n}\big) = \log\Big((2\lambda)^{i_n}\,(2\mu)^{j_n}\Big)$$

e da ciò segue

$$\begin{aligned} &\left|\log \frac{H(\beta_{n+1}) - H(\alpha_{n+1})}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}} - \log \frac{H(\beta_n) - H(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}\right| = \\ &= |(j_{n+1} - j_n)\log(2\mu) - (i_{n+1} - i_n)\log(2\lambda)| = \\ &= (j_{n+1} - j_n)\log(2\mu) + (i_{n+1} - i_n)\log(1/2\lambda) \geq \\ &\geq \min\big\{\log(2\mu, \log(1/2\lambda)\big\} \end{aligned}$$

poiché si ha $0 < 2\lambda < 1 < 2\mu$ e $(j_{n+1} - j_n) + (i_{n+1} - i_n) = 1$ per ogni n. Pertanto, la successione $(****)$ non è di Cauchy e quindi deve necessariamente essere divergente a $-\infty$ cioè deve essere $\xi = 0$. $\square$

Le funzioni degli esempi precedenti costituiscono esempi di funzioni non costanti ma derivabili quasi ovunque con derivata nulla. Formalizziamo questo tipo di funzioni nelle definizioni seguenti: una funzione $f \colon I \to \mathbb{C}$ si dice

- *singolare in* I se f è derivabile quasi ovunque in I con $f'(x) = 0$ per q.o. $x \in I$;
- *di tipo Cantor–Vitali in* I se f è continua e singolare in I.

Una funzione di tipo Cantor–Vitali o singolare non costante si dice non banale. La funzione di Cantor–Vitali di Esempio 6.6 costituisce il prototipo delle funzioni omonime a valori reali e monotòne. Sulle funzioni di questo tipo ritorneremo nella successiva Sezione 6.4.

A conclusione di questa parte dedicata alla derivazione delle funzioni monotòne proviamo che ogni insieme di misura nulla è contenuto nell'insieme dei punti di non derivabilità di una qualche funzione continua e monotòna.

TEOREMA 6.8. *Sia $T \subset \mathbb{R}$ un insieme trascurabile. Allora, esiste una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e crescente che non è derivabile in alcun punto di T.*

Il teorema precedente non asserisce tuttavia che f sia derivabile in tutti i punti di $\mathbb{R} \setminus T$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni intero $k \geq 1$ fissato, siano $(a_{k,m}, b_{k,m})$ $(m \geq 1)$ intervalli aperti tali che

$$T \subset \bigcup_m (a_{k,m}, b_{k,m}) \qquad \text{e} \qquad \sum_m (b_{k,m} - a_{k,m}) \leq 1/2^k.$$

Rinumeriamo gli intervalli selezionati ponendo $\{I_n\}_n = \{(a_{k,m}, b_{k,m}) : m, k \geq 1\}$. Si ha così

$$\sum_n |I_n| \leq 1$$

ed ogni punto $x \in T$ è contenuto in infiniti intervalli I_n. Per ogni n, definiamo una funzione $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e crescente ponendo

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{x} 1_{I_n}, \qquad x \in \mathbb{R} \quad (n \geq 1).$$

Poiché risulta $0 \leq f_n(x) \leq |I_n|$ per ogni x, la serie di funzioni

$$f(x) = \sum_n f_n(x), \qquad x \in \mathbb{R} \quad (n \geq 1),$$

converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ e la funzione f così definita è continua e crescente su tutto $\mathbb{R}$.

Resta da provare dunque che f non è derivabile in alcun punto di T. A tal fine, sia quindi $x_0 \in T$ e sia $k \geq 1$ fissato. Per come è stata scelta la famiglia $\{I_n\}_n$ di intervalli, esistono k interi distinti $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ tali che $x_0 \in I_{n_h}$ per ogni $h = 1, \ldots, k$. Scegliamo allora $x \in \bigcap I_{n_h}$, $x \neq x_0$. Poiché ogni funzione f_n è crescente, il suo rapporto incrementale è non negativo cosicché si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \sum_{1 \leq h \leq k} \frac{f_h(x) - f_h(x_0)}{x - x_0} \geq k.$$

Quindi, per l'arbitrarietà di k si ha

$$\limsup_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

e questo prova la tesi. □

L'argomento utilizzato nella dimostrazione precedente può essere generalizzato nel seguente teorema di derivazione termine a termine delle serie di funzioni.

TEOREMA 6.9 (G. Fubini). *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $f_n: I \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ funzioni crescenti (decrescenti) ed $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione tali che la serie*

$$f(x) = \sum_n f_n(x), \qquad x \in I,$$

converge puntualmente ad f in I. Allora,

(a) *f è derivabile quasi ovunque in I;*
(b) *la serie $\sum_n f_n'$ converge quasi ovunque in I;*
(c) *si ha $f'(x) = \sum_n f'(x)$ per q.o. $x \in I$.*

DIMOSTRAZIONE. Come al solito, non è restrittivo supprre che sia $I = [a\,,b]$ e che le funzioni f_n siano crescenti. Inoltre, pur di considerare $f_n(x) - f_n(a)$, possiamo supporre anche che sia $f_n(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a\,,b]$ e per ogni n. Conseguentemente, possiamo porre $f_n(x) = f(x) = 0$ per ogni $x \leq a$ e per ogni n e $f_n(x) = f_n(b)$ e $f(x) = f(b)$ per ogni $x \geq b$ e per ogni n. In questo modo, la serie che definisce f converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$.
Poiché ogni funzione f_n è crescente, tale è anche la funzione f. Esiste quindi un insieme di misura nulla $T' \subset [a\,,b]$ tale che f ed ogni funzione f_n sia derivabile in ogni punto di $[a\,,b] \setminus T'$. Poiché ogni funzione f_n è crescente, il suo rapporto incrementale è non negativo cosicché per ogni $x \in [a\,,b] \setminus T'$ e per ogni n si ha

$$0 \leq \sum_{1 \leq m \leq n} \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h} \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad h \neq 0,$$

da cui segue

$$0 \leq \sum_{1 \leq m \leq n} f'_m(x) \leq f'(x), \qquad n \geq 1.$$

Pertanto la serie delle derivate converge in ogni punto $x \in [a\,,b] \setminus T'$ e risulta

$$0 \leq \sum_n f'_n(x) \leq f'(x), \qquad x \in [a\,,b] \setminus T'.$$

Poniamo quindi

$$s_n(x) = \sum_{1 \leq m \leq n} f_m(x), \qquad x \in [a\,,b],$$

per ogni $n \geq 1$. Risulta allora

$$s'_n(x) = \sum_{1 \leq m \leq n} f'_m(x), \qquad x \in [a\,,b] \setminus T',$$

e resta solo da provare che si ha $s'_n(x) \to f'(x)$ per ogni $x \in [a\,,b] \setminus T$ per qualche insieme trascurabile T con $T' \subset T \subset [a\,,b]$. Poiché $\{s'_n\}_n$ è una successione crescente di funzioni, è sufficiente provare che per qualche insieme T siffatto vale la seguente proprietà: per ogni $x \in [a\,,b] \setminus T$ esiste una sottosuccessione $\{s_{n_k}\}_k$ tale che

$$\lim_{k \to +\infty} s'_{n_k}(x) = f'(x).$$

In realtà è possibile determinare la sottosuccessione in maniera indipendente da x scegliendo una successione crescente di interi $\{n_k\}_k$ tale che

$$\sum_k [f(b) - s_{n_k}(b)] < +\infty.$$

Le funzioni g_k definite da $g_k(x) = f(x) - s_{n_k}(x)$ per $x \in [a\,,b]$ e $k \geq 1$ sono non negative, crescenti e tali che

$$0 \leq \sum_k g_k(x) \leq \sum_k g_k(b) < +\infty, \qquad x \in [a\,,b].$$

Ragionando dunque come nella prima parte della dimostrazione si deduce che esiste un insieme trascurabile T tale che $T' \subset T \subset [a\,,b]$ per il quale si ha

$$0 \leq \sum_k [f'(x) - s'_{n_k}(x)] \leq \sum_k g'_k(x) < +\infty, \qquad x \in [a\,,b] \setminus T$$

e da ciò segue l'asserto. $\square$

Funzioni a variazione limitata. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{K}$ una funzione a valori reali o complessi ($\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Per ogni $a, b \in I$, $a < b$, il numero reale esteso

$$V_a^b f = \sup \left\{ \sum_{1 \le m \le n} \left| f(x_m) - f(x_{m-1}) \right| \,:\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \right\} \in [0, +\infty]$$

ove l'estremo superiore a destra è fatto rispetto a tutte le possibili suddivisioni $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$ si chiama *variazione totale* di f sull'intervallo $[a, b]$. Poniamo inoltre per convenzione

$$V_a^a f = 0, \qquad a \in I.$$

La variazione totale di f come funzione degli estremi dell'intervallo verifica evidentemente le seguenti proprietà:

$$V_b^c f \le V_a^d f \qquad \text{e} \qquad V_a^c f = V_a^b f + V_b^c f$$

per ogni $a, b, c \in I$, $a \le b \le c \le d$, essendo le somme da intendersi definite nei reali estesi non negativi.
Sia $f\colon I \to \mathbb{C}$ con $f = u + iv$ e $u, v\colon I \to \mathbb{R}$ parte reale e parte immaginaria di f rispettivamente. Si ha allora

$$\max \left\{ V_a^b u, V_a^b v \right\} \le V_a^b f \le V_a^b u + V_a^b v, \qquad a, b \in I, \quad a \le b,$$

e quindi la variazione totale su un intervallo $[a, b]$ di una funzione a valori complessi f risulta finita se e solo se sono finite la variazione totale della parte reale u e della parte immaginaria v di f.
Le funzioni a valori reali monotòne e le funzioni lipschitziane a valori reali o complessi definite su intervalli hanno evidentemente variazione totale finita su ogni sottointervallo compatto. Tuttavia, esistono funzioni continue aventi variazione totale infinita su intervalli compatti.

Esempio 6.10. Siano $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases} \qquad \begin{aligned} g(x) &= f\left(x^2\right) && x \in \mathbb{R}; \\ h(x) &= [f(x)]^2 && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Le funzioni f, g e h sono continue in tutto $\mathbb{R}$, la funzione f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mentre le funzioni g ed h sono derivabili in tutto $\mathbb{R}$.
Proviamo che si ha $V_0^1 f = V_0^1 g = +\infty$ e $V_0^1 h < +\infty$. Infatti, si ha evidentemente $V_0^1 f = V_0^1 g$ e, per calcolare $V_0^1 f$, consideriamo i punti

$$x_{n,k} = \frac{2}{\left[2(n-k)+1\right]\pi}, \qquad k = 0, \ldots, n, \quad n \ge 1.$$

Si ha $f(x_{n,k}) = (-1)^{n-k} x_{n,k}$ per ogni $k = 0, \ldots, n$ ed ogni $n \ge 1$ da cui segue

$$|f(x_{n,k}) - f(x_{n,k-1})| \ge 2x_{n,k-1},$$

per $k = 1, \ldots, n$ e $n \ge 1$. Si ha pertanto

$$\begin{aligned} V_0^1 f &\ge \sum_{1 \le k \le n} |f(x_{n,k}) - f(x_{n,k-1})| \ge \\ &\ge \sum_{1 \le k \le n} 2x_{n,k-1} = \sum_{0 \le k \le n-1} \frac{4}{(2k+1)\pi} \to +\infty \end{aligned}$$

per $n \to +\infty$ e quindi la variazione totale di f sull'intervallo $[0, 1]$ è infinita.

Infine, poiché h è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ con derivata h' Riemann integrabile in $[0,1]$, per ogni suddivisione $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ per il teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\sum_{1\le m\le n} |h(x_m) - h(x_{m-1})| \le \sum_{1\le m\le n} \int_{x_{m-1}}^{x_m} |h'| < +\infty$$

e da ciò segue l'asserto. □

Definiamo la funzione variazione totale di una funzione $f: I \to \mathbb{K}$ come funzione del solo estremo destro ponendo

$$Vf(x) = \sup\left\{V_a^x f : \ a \in I \text{ e } a \le x\right\}, \qquad x \in I.$$

La funzione così ottenuta $Vf: I \to [0,+\infty]$ è evidentemente crescente e verifica

$$Vf(y) = Vf(x) + V_x^y f, \qquad x, y \in I, \quad x \le y.$$

Data una funzione $f: I \to \mathbb{C}$, il numero reale esteso

$$Vf(I) = \sup\left\{V_a^b f : \ a, b \in I \text{ e } a \le b\right\} \in [0,+\infty]$$

si chiama ancora variazione totale di f nell'intervallo I e coincide evidentemente con $V_a^b f$ quando $I = [a,b]$. Possiamo definire ora nel modo ovvio la classe delle funzioni a variazione limitata.

Definizione 6.11. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f: I \to \mathbb{K}$ tale che

$$Vf(I) < +\infty$$

di dice *funzione a variazione limitata in I.* □

Sia $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ il campo dei numeri reali o complessi. L'insieme

$$BV(I) = \left\{f: I \to \mathbb{K} \text{ tale che } Vf(I) < +\infty\right\}$$

delle funzioni a variazione limitata in I è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ poiché si ha

- $V(f+g)(I) \le Vf(I) + Vg(I)$;
- $V(\lambda f)(I) = |\lambda| Vf(I)$

per ogni coppia di funzioni $f, g: I \to \mathbb{K}$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ pur di adottare la convenzione secondo cui risulta $[0 \cdot \infty = 0]$. Inoltre, ogni funzione a variazione limitata in I è evidentemente limitata in I e si ha

$$f, g \in BV(I) \qquad \Longrightarrow \qquad fg \in BV(I),$$

e quindi $BV(I)$ risulta essere un'algebra sul campo $\mathbb{K}$.
Nel seguito utilizzeremo lo stesso simbolo $BV(I)$ senza distinguere tra i casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e, in assenza di un'esplicita indicazione diversa, tutti i risultati che vedremo valgono senza modifiche per entrambi i casi. Solo quando necessario, scriveremo esplicitamente $BV(I, \mathbb{R})$ per risultati che valgono solo nel caso reale. In particolare, nel caso di una funzione a valori complessi $f: I \to \mathbb{C}$ si ha $f = u + iv$ con $u, v: I \to \mathbb{R}$ parte reale e parte immaginaria di f e risulta

$$f \in BV(I) \qquad \Longleftrightarrow \qquad u, v \in BV(I).$$

Come già osservato, appartengono a $BV(I)$: (i) le funzioni a valori reali monotòne e limitate in I; (ii) le funzioni lipschitziane a valori reali o complessi quando I è limitato; (iii) le funzioni derivabili a valori reali o complessi con derivata Riemann integrabile quando $I = [a,b]$ è un intervallo chiuso e limitato o con derivata assolutamente Riemann integrabile in senso generalizzato se I è illimitato.
Conveniamo poi di dire come al solito che $f: I \to \mathbb{C}$ è *una funzione a variazione localmente limitata in I* se la sua restrizione ad ogni intervallo chiuso e limitato

$[a\,,b]$ di I è a variazione limitata in $[a\,,b]$. Anche l'insieme delle funzioni $f\colon I \to \mathbb{K}$ a variazione localmente limitata in I è un'algebra sul campo $\mathbb{K}$ che si denota con $BV_{\mathrm{loc}}(I)$.
Esaminiamo nei risultati seguenti le principali proprietà delle funzioni a variazione limitata.

Teorema 6.12. *Siano $f \in BV(I)$ e $x \in I$ un punto tale che $x < \sup I$ $(x > \inf I)$. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *f è continua in x da destra (sinistra);*
(b) *Vf è continua in x da destra (sinistra).*

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che sia $I = [a\,,b]$ ed $x = a$.
(a) Sia f continua nel punto a da destra e supponiamo per assurdo che Vf non sia continua in a da destra. Poniamo $b_0 = b$. Essendo Vf crescente, si ha

$$Vf(x) \geq 2\varepsilon > 0, \qquad a < x \leq b,$$

per $\varepsilon > 0$ opportuno ed esiste quindi una suddivisione $a = x_n < x_{n-1} < \cdots < x_0 = b$ $(n \geq 2)$ tale che

$$\sum_{1 \leq m \leq n} |f(x_m) - f(x_{m-1})| > \varepsilon.$$

Poiché f è continua in a, esiste $a < b_1 < x_{n-1}$ tale che

$$|f(b_1) - f(a)| < \sum_{1 \leq m \leq n} |f(x_m) - f(x_{m-1})| - \varepsilon. \tag{*****}$$

Consideriamo ora la suddivisione $a = y_{n+1} < y_n < \cdots < y_0 = b$ di $[a\,,b]$ ottenuta dalla precedente aggiungendo il punto b_1 ovvero ponendo $y_m = x_m$ per $m = 0\,,\ldots\,,n-1$, $y_n = b_1$ e $y_{n+1} = a$. Essendo la nuova suddivisione un raffinamento della precedente, si ha

$$\sum_{1 \leq m \leq n} |f(x_m) - f(x_{m-1})| \leq \sum_{1 \leq m \leq n+1} |f(y_m) - f(y_{m-1})|$$

e quindi, da (*****), segue

$$\begin{aligned}
\varepsilon + |f(b_1) - f(a)| &< \sum_{1 \leq m \leq n} |f(x_m) - f(x_{m-1})| \leq \\
&\leq \sum_{1 \leq m \leq n+1} |f(y_m) - f(y_{m-1})| \leq \\
&= \sum_{1 \leq m \leq n} |f(y_m) - f(y_{m-1})| + |f(a) - f(b_1)|
\end{aligned}$$

da cui si ottiene infine

$$V_{b_1}^{b_0} f \geq \sum_{1 \leq m \leq n+1} |f(y_m) - f(y_{m-1})| > \varepsilon.$$

Iterando questo argomento, si determina una successione $\{b_n\}_n$ strettamente decrescente tale che

$$V_{b_{n+1}}^{b_n} f > \varepsilon$$

per ogni n ma ciò contraddice l'ipotesi che f sia a variazione limitata.
(b) Si ha $|f(y) - f(x)| \leq V_x^y f$ per ogni $x\,,y \in I$ con $x \leq y$. □

Teorema 6.13. *Sia $f \in BV(I)$ e siano $\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}_\infty$ tali che $\inf I \leq \alpha < \beta \leq \sup I$. Allora, esistono in $\mathbb{K}$ (finiti)*

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) \qquad e \qquad \lim_{x \to \beta^-} f(x).$$

Dimostrazione. La funzione $x \in I \mapsto Vf(x)$ è crescente e limitata e quindi esiste finito il limite di $Vf(x)$ per $x \to \alpha^+$. Vale allora la condizione di Cauchy: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon) \in I \cap (\alpha, +\infty)$ tale che

$$\alpha < x \le y < \alpha_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |Vf(y) - Vf(x)| \le \varepsilon.$$

Essendo

$$|f(y) - f(x)| \le V_x^y f = |Vf(y) - Vf(x)|$$

per gli stessi x e y, anche f verifica la condizione di Cauchy per $x \to \alpha^+$. Questo prova l'asserto nel caso del limite per $x \to \alpha^+$ e in maniera analoga si procede nell'altro caso. □

Se f appartiene a $BV(I)$ esistono quindi in $\mathbb{K}$ i limiti da destra e da sinistra di f in ogni punto $x \in I$ in cui tali limiti siamo calcolabili. In analogia con le notazioni introdotte per le funzioni monotòne, per ogni punto $x \in I$ denotiamo con

$$f(x^-) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x = \inf I \\ \lim\limits_{y \to x^-} f(y) & \text{se } x > \inf I; \end{cases} \qquad f(x^+) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x = \sup I \\ \lim\limits_{y \to x^+} f(y) & \text{se } x < \sup I; \end{cases}$$

tali limiti e con

$$D(f) = \big\{ x \in I : \ f(x^-) \ne f(x) \text{ o } f(x^+) \ne f(x) \big\}$$

l'insieme dei punti di discontinuità di f. In particolare, se $f \in BV(I)$ e I è un intervallo limitato ma non compatto, è sempre possibile estendere per continuità alla chiusura di I la funzione f mantenendone inalterata la variazione limitata.
Alla luce delle considerazioni precedenti denotiamo con $BV_0(I)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f \in BV(I)$ tali che

$$\begin{cases} f(\alpha) = 0 & \text{se } \alpha = \min I; \\ \lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = 0 & \text{se } \alpha = \inf I \text{ e } \alpha \notin I. \end{cases}$$

Chiaramente risulta

$$BV(I) = \mathbb{K} \oplus BV_0(I)$$

poiché la variazione totale di una funzione su un intervallo non cambia aggiungendo o sottraendo una costante.
Proviamo ora che $BV(I, \mathbb{R})$ non è altro che lo spazio vettoriale generato dalle funzioni a valori reali monotòne e limitate in I.

Teorema 6.14. *Sia $f \in BV(I, \mathbb{R})$ e siano $f_\pm \colon I \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da*

$$f_\pm(x) = \frac{Vf(x) \pm f(x)}{2}, \qquad x \in I.$$

Allora,

(a) *le funzioni $f_\pm$ sono crescenti e limitate in I e tali che*

$$\begin{cases} f(x) = f_+(x) - f_-(x) \\ Vf(x) = f_+(x) + f_-(x) \end{cases} \qquad x \in I;$$

(b) *se $x < \sup I$ ($x > \inf I$), le seguenti affermazioni sono equivalenti*
- *f è continua da destra (sinistra) in x;*
- *$f_\pm$ sono continue da destra (sinistra) in x;*

La decomposizione di $f \in BV(I, \mathbb{R})$ come differenza delle funzioni crescenti e limitate $f_\pm$ prende il nome di *decomposizione di Jordan* di f. L'analogia con la corrispondente decomposizione delle misure reali (Definizione 4.8) non è puramente formale come vedremo nella successiva Sezione 6.4.

DIMOSTRAZIONE. (a) Le funzioni $f_\pm$ sono limitate in I. Per $x, y \in I$ e $x < y$ si ha

$$\begin{aligned} 2f_+(y) &= Vf(y) + f(y) = Vf(x) + V_x^y f + [f(y) - f(x)] + f(x) \geq \\ &\geq 2f_+(x) + \left[V_x^y f + |f(y) - f(x)|\right] \geq 2f_+(x) \end{aligned}$$

e lo stesso vale per f_-. Pertanto $f_\pm$ sono crescenti in I e le restanti uguaglianze sono ovvie.

(b) È conseguenza diretta della definizione di $f_\pm$ e di Teorema 6.12. □

Se $f \in BV_0(I, \mathbb{R})$, anche le funzioni crescenti $f_\pm$ che ne formano la decomposizione di Jordan verificano la stessa proprietà e godono della proprietà di minimalità espressa nel corollario seguente.

COROLLARIO 6.15. *Sia $f \in BV_0(I, \mathbb{R})$ e sia $f = f_+ - f_-$ la decomposizione di Jordan di f. Allora,*

(a) *$Vf \in BV_0(I, \mathbb{R})$ e $f_\pm \in BV_0(I, \mathbb{R})$;*

(b) *se $g_\pm \in BV_0(I, \mathbb{R})$ sono funzioni crescenti in I tali che*

$$f(x) = g_+(x) - g_-(x), \qquad x \in I,$$

si ha

$$0 \leq f_\pm(x) \leq g_\pm(x), \qquad x \in I.$$

DIMOSTRAZIONE. (a) Occorre solo provare che risulta $Vf(\alpha) = f_\pm(\alpha) = 0$ se $\alpha = \min I$ e $Vf(x) \to 0^+$ e $f_\pm(x) \to 0^+$ per $x \to \alpha^+$ se $\alpha = \inf I$ e $\alpha \notin I$. Nel primo caso non c'è nulla da provare e nell'altro caso, ragionando come nella dimostrazione di Teorema 6.13 si verifica che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon) \in I \cap (\alpha, +\infty)$ tale che

$$\alpha < x \leq y < \alpha_0 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \leq V_x^y f \leq \varepsilon.$$

Conseguentemente risulta $Vf(x) \to 0^+$ per $x \to \alpha^+$ da cui segue $f_\pm(x) \to 0^+$ per $x \to \alpha^+$.

(b) Per ogni $x, y \in I$ con $x \leq y$ si ha

$$|f(y) - f(x)| \leq [g_+(y) - g_+(x)] + [g_-(y) - g_-(x)]$$

e da ciò segue

$$V_x^y f \leq [g_+(y) - g_+(x)] + [g_-(y) - g_-(x)].$$

Se $\alpha = \min I$, ponendo $x = \alpha$ e $y = x$ risulta

$$(******) \qquad f_+(x) + f_-(x) = Vf(x) \leq g_+(x) + g_-(x).$$

Se invece è $\alpha = \inf I$ e $\alpha \notin I$, si ha $Vf(x) \to 0^+$ per $x \to \alpha^+$ come provato sopra e quindi, facendo tendere $x \to \alpha^+$ e ponendo $y = x$, si conclude che vale $(******)$ anche in questo caso. Infine da $f_+ - f_- = g_+ - g_-$ e $f_+ + f_- \leq g_+ + g_-$ in I segue $0 \leq f_\pm \leq g_\pm$ in I e questo completa la dimostrazione. □

La decomposizione di Jordan si estende in modo ovvio alle funzioni a variazione limitatat complesse.

COROLLARIO 6.16. *Sia $f\colon I \to \mathbb{C}$ una funzione. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *$f \in BV(I)$;*

(b) *esistono due coppie di funzioni $u_i, v_i\colon I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ crescenti e limitate tali che*

$$f(x) = [u_1(x) - u_2(x)] + i[v_1(x) - v_2(x)], \qquad x \in I.$$

Inoltre, se $x \in I$ e $x < \sup I$ $(x > \inf I)$, f è continua da destra (sinistra) in x se e solo se $f_\pm$ sono continue da destra (sinistra) in x.

In particolare, se $f \in BV(I)$ è una funzione a valori complessi con $f = u + iv$ e $u, v\colon I \to \mathbb{R}$ parti reale e immaginaria e se le funzioni a valori reali crescenti e limitate u_i e v_i $(i = 1, 2)$ sono la decomposizione di Jordan $u_\pm$ e $v_\pm$ di u e v rispettivamente, la corrispondente decomposizione di f in (b) prende il nome di decomposizione di Jordan di f in analogia con la corrispondente terminologia per le misure complesse.
Riassumiamo nel teorema seguente le proprietà delle funzioni a variazione limitata.

Teorema 6.17. *Sia $f \in BV(I)$ una funzione a variazione limitata. Allora,*

(a) *f è limitata;*
(b) *l'insieme $D(f)$ dei punti di discontinuità di f è al più numerabile;*
(c) *f è derivabile quasi ovunque in I;*
(d) *f' è integrabile in I e si ha*

$$\int_I |f'| + \sum_{x\in D(f)} |f(x^+) - f(x^-)| \leq Vf(I).$$

Come al solito, la derivata $f'\colon I \to \mathbb{K}$ che compare in (d) è la funzione definita puntualmente in I da $f(x) = F'(x)$ nei punti $x \in I$ in cui F è derivabile e da $f(x) = 0$ nei restanti punti x di I.
Le affermazioni (a), (b) e (c) sono conseguenza della rappresentazione delle funzioni reali a variazione limitata come differenza di funzioni crescenti mentre la dimostrazione della disuguaglianza (d) nel caso di funzioni a valori complessi è basata sul lemma seguente che utilizza il successivo Teorema 6.23 sui punti di Lebesgue[2].

Lemma 6.18. *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ una funzione tale che*

- *f è derivabile quasi ovunque in $[a, b]$;*
- *f' è integrabile in $[a, b]$.*

Allora,

$$\left|\int_a^b f'\right| \leq V_a^b f.$$

Dimostrazione. Sia $V_a^b f < +\infty$ altrimenti non c'è nulla da provare e sia $D \subset (a, b)$ l'insieme formato dai punti $x \in (a, b)$ tali che f è derivabile in x e

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f'(t)\,dt = f'(x).$$

Si ha $|(a, b) \setminus D| = 0$ (Teorema 6.23) e, fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $x \in D$ esiste $h_x > 0$ tale che

- $[x, x + h_x] \subset (a, b)$;
- $\left|\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ per $0 < h \leq h_x$;
- $\left|\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f'(t)\,dt - f'(x)\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ per $0 < h \leq h_x$.

La famiglia di intervalli

$$\mathcal{I} = \big\{[x, x + h] :\ 0 < h \leq h_x,\ x \in D\big\}$$

[2] La dimostrazione di Teorema 6.23 è basata su Teorema 6.20 – (b) la cui dimostrazione utilizza solo (b) di Teorema 6.17.

costituisce allora un ricoprimento di Vitali di D cosicché, scelto $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che risulti

$$E \subset [a\,,b] \text{ e } |E| \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \int_E |f'| \leq \varepsilon/3,$$

esistono $[x_m\,, x_m + h_m]$ $(m = 1\,, \ldots, n])$ intervalli disgiunti di $\mathcal{I}$ tali che

$$\left|(a\,,b) \setminus \left(\bigcup\nolimits_m [x_m\,, x_m + h_m]\right)\right| = \left|D \setminus \left(\bigcup\nolimits_m [x_m\,, x_m + h_m]\right)\right| \leq \delta.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f'\right| &\leq \left|\int_{(a,b)\setminus\bigcup_m [x_m, x_m+h_m]} f'\right| + \sum_m \left|\int_{x_m}^{x_m+h_m} f'\right| \leq \\ &\leq \sum_m \left|\int_{x_m}^{x_m+h_m} f'\right| + \frac{\varepsilon}{3} \leq \\ &\leq \sum_m |f'(x_m)h_m| + \sum_m \frac{\varepsilon h_m}{3(b-a)} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \\ &\leq \sum_m |f(x_m + h_m) - f(x_m)| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} \leq \\ &\leq V_a^b f + \varepsilon\end{aligned}$$

e dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue l'asserto. □

Dimostrazione (Teorema 6.17). Sia $f = u + iv$ con $u, v \colon I \to \mathbb{R}$ parte reale e parte immaginaria di f e sia

$$f(x) = [u_+(x) - u_-(x)] + i[v_+(x) - v_-(x)], \qquad x \in I,$$

la decomposizione di Jordan di f. Le affermazioni (a) e (b) derivano dalle corrispondenti proprietà delle funzioni crescenti e limitate $u_\pm$ e $v_\pm$ e (c) dalla derivabilità quasi ovunque delle stesse funzioni (Teorema 6.4) .
Resta quindi da provare solo (d). Si ha

$$f' = \left(u'_+ - u'_-\right) + i\left(v'_+ - v'_-\right)$$

quasi ovunque in I e quindi, f' è integrabile in I poiché tali sono $u'_\pm$ e $v'_\pm$.
Fissiamo $a\,, b \in I$ con $a < b$ e scegliamo una successione di funzioni a gradini s_n $(n \geq 1)$ tali che $s_n \to \operatorname{sgn}(f')$ quasi ovunque in $[a\,,b]$ per $n \to +\infty$ con $|s_n(x)| \leq 1$ per ogni $x \in [a\,,b]$ e $n \geq 1$ (Proposizione 5.26). Fissato $\varepsilon > 0$, esiste quindi $n = n(\varepsilon) \geq 1$ tale che risulti

$$\int_a^b |s_n - \operatorname{sgn}(f')| \cdot |f'| \leq \varepsilon$$

per il teorema di convergenza dominata cosicché, ponendo per brevità $s = s_n$, si ha

$$\int_a^b |f'| = \int_a^b \operatorname{sgn}(f')f' \leq \left|\int_a^b sf'\right| + \varepsilon.$$

La funzione a gradini s può essere scelta della forma

$$s(x) = \sum_{1\leq h\leq k} \lambda_h 1_{[a_h\,,b_h)}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

con $|\lambda_h| \leq 1$ e $[a_h\,, b_h)$ $(h = 1\,, \ldots, k)$ intervalli disgiunti di $[a\,,b]$ cosicchè risulta

$$\left|\int_a^b sf'\right| = \sum_{1\leq h\leq k} |\lambda_h| \left|\int_{a_h}^{b_h} f'\right| \leq \sum_{1\leq h\leq k} \left|\int_{a_h}^{b_h} f'\right| \leq \sum_{1\leq h\leq k} V_{a_h}^{b_h} f = V_a^b f$$

per il lemma precedente. Abbiamo così provato che si ha

$$\int_a^b |f'| \le V_a^b f + \varepsilon$$

da cui segue

$$\int_a^b |f'| \le V_a^b f$$

per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ per ogni intervallo $[a\,,b] \subset I$.
Procediamo ora come nella dimostrazione di Teorema 6.4 − (b) e supponiamo per fissare le idee che sia $I = [a\,,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Fissiamo $x \in D(f) \cap (a\,,b)$ cosicché, ragionando come prima, per $h > 0$ tale che $[x-h\,,x+h] \subset (a\,,b)$ si ha

$$\begin{aligned}\int_a^{x-h} |f'| + |f(x+h) - f(x-h)| + \int_{x+h}^b |f'| &\le V_a^{x-h} f + V_{x-h}^{x+h} f + V_{x+h}^b f = \\ &= Vf([a\,,b]).\end{aligned}$$

Per $h \to 0^+$ risulta quindi

$$\int_a^b |f'| + |f(x^+) - f(x^-)| \le Vf([a\,,b])$$

e la stessa disuguaglianza vale per $x \in D(f) \cap \{a\,,b\}$ in virtù della definizione di $f(a^-)$ e di $f(b^+)$. Iterando questo argomento per ogni insieme finito di $D(f)$ si ottiene

$$\int_a^b |f'| + \sum_{x \in D(f)} |f(x^+) - f(x^-)| \le Vf([a\,,b])$$

e questo prova l'asserto quando $I = [a\,,b]$ è un intervallo compatto. In maniera analoga si procede quando l'intervallo I è semiaperto o aperto. □

Alla luce del teorema precedente, una funzione $f\colon I \to \mathbb{K}$ tale che

- $f \in BV_0(I)$;
- f è continua da destra in ogni punto $x \in I$ con $x < \sup I$;

si dice *funzione normalizzata a variazione limitata in I* e l'insieme

$$NBV_0(I) = \big\{ f \in BV_0(I) : \ f \text{ continua da destra in } x \in I \text{ con } x < \sup I \big\}$$

delle funzioni normalizzate a variazione limitata nell'intervallo I costituisce un'algebra sul campo $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. In particolare risulta

$$f \in NBV_0(I) \qquad \Longrightarrow \qquad Vf \in NBV_0(I).$$

Le funzioni normalizzate a variazione limitata $f \in NBV_0(I)$ sono naturalmente associate alle misure di Borel complesse in I (Sezione 6.4).
Proviamo a conclusione di questa parte che ogni funzione a variazione limitata può essere resa normalizzata nel senso illustrato dal risultato seguente.

Teorema 6.19. *Sia $f \in BV(I)$ e sia*

$$D_+(f) = \big\{ x \in I : \ x < \sup I \ \textit{e} \ f(x^+) \ne f(x) \big\}\,.$$

Allora esistono $g \in NBV_0(I)$ e $c \in \mathbb{K}$ tali che

(a) $\begin{cases} f(x) = g(x) + c & \textit{se } x \in I \setminus D_+(f) \\ f(x^+) = g(x) + c & \textit{se } x \in D_+(f); \end{cases}$

(b) $Vg(I) \le Vf(I)$.

La funzione $g \in NBV_0(I)$ così associata a $f \in BV(I)$ è univocamente determinata e (con poca fantasia) si dice *funzione normalizzata di f*.

Dimostrazione. Siano $c \in \mathbb{K}$ definito da

$$\begin{cases} f(\alpha) = c & \text{se } \alpha = \min I \\ \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = c & \text{se } \alpha = \inf I \text{ e } \alpha \notin I \end{cases}$$

e sia $\xi \in D(f) \cap \operatorname{int}(I)$ tale che $f(x^+) \neq f(x)$. Sia quindi $g\colon I \to \mathbb{K}$ la funzione definita da

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - c & \text{se } x \in I \text{ e } x \neq \xi \\ f(x^+) - c & \text{se } x = \xi \end{cases}$$

cosicché risulta $g(\alpha) = 0$ o $g(x) \to 0^+$ per $x \to \alpha^+$ a seconda del caso.
Fissato un intervallo $[a\,, b] \subset I$ tale che $a < \xi < b$ e fissato $\varepsilon > 0$, consideriamo una suddivisione $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ di $[a\,, b]$ tale che $x_m = \xi$ per un indice $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ e

$$|f(x_m) - f(\xi^+)| \leq \varepsilon/2.$$

Si ha allora

$$|f(\xi) - f(x_{m-1})| + |f(x_{m+1}) - f(\xi)| - |g(\xi) - f(x_{m-1})| - |f(x_{m+1}) - g(\xi)| \leq \varepsilon$$

da cui segue

$$V_a^b f \geq \sum_{1\leq i\leq n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \geq \sum_{1\leq i\leq n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| - \varepsilon.$$

Conseguentemente risulta $g \in BV_0(I)$ con

$$(*******) \qquad V_a^b g \leq V_a^b f$$

per ogni intervallo $[a\,, b] \subset I$ tale che $a < \xi < b$. In maniera analoga si procede se $\xi = a$ e $f(a^+) \neq f(a)$ e ovviamente la stessa disuguaglianza vale se $\xi \notin [a\,, b]$.
Inoltre, chiaramente si ha $g(\xi^+) = g(\xi)$ oltre ad essere $f(x) = g(x) + c$ per $x \in I \setminus \xi$ e $f(\xi^+) = g(\xi) + c$ per definizione.
Sia quindi $D_+(f) = \{\xi_n\}_n$ l'insieme (al più) numerabile formato dai punti $\xi \in I$ tali che $f(\xi^+) \neq f(\xi)$ cosicché risulta $\xi_n < \sup I$ per ogni n e siano $g_n \in BV_0(I)$ $(n \geq 1)$ le funzioni iterativamente costruite a partire da f nella maniera sopra descritta. Per ogni n si ha allora

- $g_n(x) = \begin{cases} f(x) - c & x \in I \setminus \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \\ f(x^+) - c & x \in \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}; \end{cases}$
- $g_n(x) = g_n(x^+)$ per $x \in I \setminus D_+(f)$ e $x = \xi_1, \ldots, \xi_n$;
- $V_a^b g_{n+1} \leq V_a^b g_n$ e $V_a^b g_n \leq V_a^b f$ per $[a\,, b] \subset I$ e $b \notin \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$.

La successione di funzioni $\{g_n\}_n$ così definita converge puntualmente in I ad una funzione $g\colon I \to \mathbb{K}$ per la quale vale (a). Inoltre, per $x = \xi_n$ si ha

$$\lim_{y\to\xi_n^+} g(y) = \lim_{\substack{y\to\xi_n^+ \\ y\neq\xi_m\,\forall m}} g(y) = \lim_{\substack{y\to\xi_n^+ \\ y\neq\xi_m\,\forall m}} f(y) = f(\xi_n^+) = g(\xi_n)$$

da cui segue $g(\xi_n^+) = g(\xi_n)$ e con gli stessi calcoli si verifica che risulta anche $g(x^+) = g(x)$ per $x \in I \setminus D_+(f)$. Pertanto g è continua da destra in ogni punto $x \in I$ con $x < \sup I$ e da $(*******)$ e dalla semicontinuità inferiore della variazione totale rispetto alla convergenza puntuale (Teorema **??**) segue

$$V_a^b g \leq \liminf_{n\to+\infty} V_a^b g_n \leq V_a^b f$$

per ogni intervallo $[a\,, b] \subset I$ con $b \notin D_+(f)$. Da ciò, ponendo infine $a = \alpha$ se $\alpha = \min I$ o facendo tendere $a \to \alpha^+$ se $\alpha = \inf I$ e $\alpha \notin I$ si ricava (b) cosicché risulta $g \in NBV_0(I)$ e questo completa la dimostrazione. $\square$

6.2. Funzioni integrali e punti di Lebesgue

Esaminiamo in questa sezione le proprietà di derivabilità delle funzioni integrali di funzioni Lebesgue integrabili ed introduciamo la connessa nozione di punto di Lebesgue.
Poiché in questa sezione come nella precedente interverrà soltanto la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$, conveniamo che ogni riferimento a misurabilità e misura siano alla $\sigma-$algebra e alla misura di Lebesgue di $\mathbb{R}$ senza ulteriori specificazioni. Denotiamo inoltre con I un intervallo che supporremo sempre non degenere e consideriamo funzioni $f\colon I \to \mathbb{K}$ con $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. In assenza di un'esplicita diversa indicazione, tutti i risultati che vedremo valgono senza modifiche in entrambi i casi di funzioni a valori reali e funzioni a valori complessi.

Funzioni integrali. Se $f\colon [a\,,b] \to \mathbb{K}$ è una funzione Riemann integrabile in $[a\,,b]$ e

$$F(x) = \int_a^x f, \qquad x \in [a\,,b],$$

ne è una funzione integrale, una qualunque delle ipotesi seguenti

- f ha una primitiva in $[a\,,b]$;
- f è continua in $[a\,,b]$:

assicura che F sia una primitiva di f sull'intervallo $[a\,,b]$ cioè che F sia derivabile in $[a\,,b]$ con derivata $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a\,,b]$. Come è ben noto, la sola ipotesi di integrabilità secondo Riemann di f non garantisce la derivabilità della funzione integrale F: la funzione segno $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, è Riemann integrabile in ogni intervallo compatto ma non ammette primitiva in alcun intervallo I contenente l'origine come punto interno.
Proviamo in questa parte che lo stesso risultato vale quasi ovunque per le funzioni integrali di funzioni Lebesgue integrabili f senza ulteriori ipotesi sulla funzione integranda f.

Teorema 6.20. *Siano $f\colon I \to \mathbb{K}$ una funzione integrabile e*

$$F(x) = \int_{x_0}^x f, \qquad x \in I \quad (x_0 \in I),$$

una sua funzione integrale. Allora,

(a) *F è uniformemente continua ed a variazione limitata su I;*
(b) *F è derivabile quasi ovunque in I e si ha*

$$F'(x) = f(x) \qquad \textit{per q.o. } x \in I;$$

(c) *si ha*

$$VF(I) = \int_I |f|.$$

Se la funzione $f\colon I \to \mathbb{K}$ è solo localmente integrabile in I, la tesi continua a valere con F continua ed a variazione localmente limitata in I e l'uguaglianza in (c) vale per ogni intervallo chiuso e limitato $[a\,,b]$ di I.
Alla dimostrazione premettiamo il lemma seguente.

Lemma 6.21. *Sia $x_0 \in I$ un punto e sia $f\colon I \to \mathbb{K}$ una funzione localmente integrabile in I tale che*

$$\int_{x_0}^x f = 0, \qquad x \in I.$$

Allora, $f = 0$ quasi ovunque in I.

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che sia $I = [a\,,b]$ $(a < b)$ e che f sia integrabile in $[a\,,b]$ e a valori reali. Sia $P = \{f > 0\}$ e supponiamo per assurdo che risulti $|P| > 0$. Sia quindi $K \subset P \cap (a\,,b)$ un insieme compatto con $|K| > 0$. Si ha allora

$$\int_K f > 0.$$

L'insieme $V = (a\,,b) \setminus K$ è aperto e quindi è della forma $V = \bigcup_k (a_k\,,b_k)$ con intervalli $(a_k\,,b_k)$ disgiunti e contenuti in $(a\,,b)$. Si ha allora

$$0 = -\int_{x_0}^{a} f + \int_{x_0}^{b} f = \int_a^b f = \int_K f + \int_V f > \int_V f = \sum_k \int_{a_k}^{b_k} f$$

e ciò è assurdo poiché si ha

$$\int_{x_0}^{a_k} f = \int_{x_0}^{b_k} f = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{a_k}^{b_k} f = 0$$

per ogni k. Deve quindi essere $|P| = 0$ cioè $f \leq 0$ quasi ovunque in $[a\,,b]$. In maniera analoga si prova che deve essere $f \geq 0$ quasi ovunque in $[a\,,b]$ e questo completa la dimostrazione. □

Dimostrazione (Teorema 6.20). (a) L'uniforme continuità di F è conseguenza della assoluta continuità degli integrali (Teorema 2.33).
Relativamente all'altra affermazione, sia $[a\,,b] \subset I$ un intervallo fissato. Per ogni suddivisione $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ di $[a\,,b]$ si ha

$$\sum_m |F(x_m) - F(x_{m-1})| = \sum_m \left| \int_{x_{m-1}}^{x_m} f \right| \leq \sum_m \int_{x_{m-1}}^{x_m} |f| = \int_a^b |f|$$

da cui segue

$$(*) \qquad V_a^b F \leq \int_a^b |f|\,.$$

Per l'arbitrarietà di $[a,b] \subset I$ si ha $F \in BV(I)$ e

$$VF(I) \leq \int_I |f|.$$

(b) Supponiamo dapprima che f sia a valori reali e supponiamo inoltre che sia $I = [a,b]$. Per (a) e per Teorema 6.17 − (b), la funzione F è derivabile quasi ovunque in $[a\,,b]$ e la funzione

$$x \in [a\,,b] \mapsto \begin{cases} F'(x) & \text{se } F \text{ è derivabile in } x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è integrabile su $[a\,,b]$ cosicché resta solo da provare che risulta $F' = f$ quasi ovunque in $[a\,,b]$.
Supponiamo dapprima che f sia limitata con $|f(x)| \leq K$ per ogni $x \in [a\,,b]$ per qualche $K \geq 0$. Posto $f(x) = f(b)$ per $x \geq b$, consideriamo i rapporti incrementali

$$\Delta_n F(x) = \frac{F(x + 1/n) - F(x)}{1/n} = n \int_x^{x+1/n} f, \qquad x \in [a\,,b], \quad n \geq 1.$$

Allora, si ha $\Delta_n F(x) \to F'(x)$ per q.o. $x \in [a\,,b]$ e, avendosi $|\Delta_n F(x)| \leq K$ per ogni $x \in [a\,,b]$ e per ogni $n \geq 1$, dal teorema di convergenza dominata si ricava

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^c \Delta_n F = \int_a^c F'$$

per ogni $c \in [a\,,b]$. Ma risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^c \Delta_n F = \lim_{n\to+\infty}\left(n\int_c^{c+1/n} F - n\int_a^{a+1/n} F\right) = F(c) - F(a) = \int_a^c f$$

per il teorema fondamentale del calcolo per l'integrale di Riemann poiché F è continua. Si ha quindi

$$\int_a^c (F' - f) = 0$$

per ogni $c \in [a\,,b]$ e da ciò segue $F' = f$ quasi ovunque in $[a\,,b]$ per il lemma precedente.

Consideriamo ora il caso in cui f è integrabile in $[a\,,b]$ ma non limitata. Senza perdita di generalità possiamo supporre che sia $f \geq 0$ in $[a\,,b]$ e considerare le funzioni f_n limitate ed integrabili su $[a\,,b]$ definite da

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\}\,, \qquad x \in [a\,,b], \quad n \geq 1.$$

Per tali funzioni si ha

- $0 \leq f_n(x)$ e $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ per ogni $x \in [a\,,b]$ e per ogni n;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ puntualmente in $[a\,,b]$ per $n \to +\infty$.

Le funzioni integrali

$$F_n(x) = \int_a^x f_n \qquad \text{e} \qquad G_n(x) = \int_a^x (f - f_n)$$

definite per ogni $x \in [a\,,b]$ e per ogni $n \geq 1$ sono crescenti e quindi derivabili quasi ovunque in $[a\,,b]$. Esiste allora un insieme trascurabile $T \subset [a\,,b]$ tale che

- le funzioni F_n e G_n siano derivabili in $[a\,,b] \setminus T$;
- $F_n'(x) = f_n(x)$ per ogni $x \in [a\,,b] \setminus T$;

per ogni n ed inoltre risulta

$$G_n'(x) \geq 0, \qquad x \in [a\,,b] \setminus T,$$

per ogni n poiché G_n è crescente. Conseguentemente, anche la funzione F è derivabile in ogni punto $x \in [a\,,b] \setminus T$ e in tali punti risulta

$$F'(x) = F_n'(x) + G_n'(x) \geq F_n'(x) = f_n(x), \qquad n \geq 1,$$

da cui segue $F'(x) \geq f(x)$ per ogni $x \in [a\,,b] \setminus T$. Viceversa, si ha

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \geq \int_a^b F'$$

(Teorema 6.4 − (b)) e quindi risulta $F' = f$ quasi ovunque in $[a\,,b]$.

Questo prova (b) nel caso $I = [a\,,b]$ ed f reale. Il caso generale segue dall'arbitrarietà dell'intervallo $[a\,,b] \subset I$ e, nel caso di f complessa, dal caso reale applicato alla parte reale ed alla parte immaginaria di f.

(c) Sia $[a\,,b] \subset I$ un intervallo fissato. Da $(*)$, da (b) e da Teorema 6.17 − (c) segue

$$V_a^b F \leq \int_a^b |f| = \int_a^b |F'| \leq V_a^b F$$

e dall'arbitrarietà di $[a\,,b]$ segue l'uguaglianza in (c). □

Punti di Lebesgue. Il valore in un punto di una funzione integrabile o localmente integrabile definita in un insieme misurabile di $\mathbb{R}$ può essere modificato arbitrariamente senza modificare l'integrale della funzione su alcun insieme e apparentemente dunque non sembra esservi modo di collegare i valori $f(x)$ e $g(x)$ in un punto x di due funzioni $f\,, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ quasi ovunque uguali e localmente integrabili in $\mathbb{R}$. Dal

punto di vista dello spazio vettoriale $L(\mathbb{R})$ delle classi di equivalenza di funzioni Lebesgue misurabili in $\mathbb{R}$ (Sezione 2.5), due rappresentativi della stessa classe di equivalenza di funzioni localmente integrabili assumono in un punto x valori $f(x)$ e $g(x)$ totalmente scorrelati tra loro.
Nonostante ciò, è comunque possibile definire in maniera naturale il valore puntuale $F(x)$ di un elemento localmente integrabile F di $L(\mathbb{R})$ in quasi ogni punto $x \in \mathbb{R}$ in modo che tale valore puntuale sia unicamente determinato dalla classe di equivalenza F indipendentemente dalla scelta del rappresentativo usato per calcolarlo. In conseguenza di ciò, per ogni classe di equivalenza F di funzioni quasi ovunque uguali e localmente integrabili in $\mathbb{R}$ è possibile altresì individuare un rappresentativo privilegiato di F che assume in ogni punto x siffatto il valore – per così dire – naturale per la classe di equivalenza F.

Definizione 6.22. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ una funzione localmente integrabile in $\mathbb{R}$. Un punto $x \in \mathbb{R}$ per il quale esiste $f_*(x) \in \mathbb{K}$ tale che si abbia

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f_*(x)|\, dt = 0$$

si dice *punto di Lebesgue di f*. □

Denotiamo con

$$L(f) = \big\{x : \ x \text{ punto di Lebesgue di } f\big\}$$

l'insieme dei punti di Lebesgue della funzione localmente integrabile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. Se $x \in L(f)$, il numero reale o complesso $f_*(x)$ ad esso associato è univocamente determinato da

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt = f_*(x).$$

In altri termini, le medie di f attorno ad un suo punto di Lebesgue x tendono ad un limite $f_*(x) \in \mathbb{K}$ che può essere interpretato – con un piccolo abuso di terminologia – come il valor medio di f nel punto x. Estendiamo la definizione di f_* a tutto $\mathbb{R}$ ponendo

$$f_*(x) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt & \text{se } x \in L(f) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ sono due funzioni localmente integrabili in $\mathbb{R}$ tali che $f = g$ quasi ovunque in $\mathbb{R}$, si ha evidentemente

- $L(f) = L(g)$;
- $f_*(x) = g_*(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

I punti di Lebesgue ed i valori medi assunti in tali punti da una funzione localmente integrabile dipendono quindi soltanto dalla classe di equivalenza in $L(\mathbb{R})$ della funzione e possiamo conseguentemente parlare di punti di Lebesgue e di valori medi assunti in tali punti per un elemento localmente integrabile F di $L(\mathbb{R})$ indipendentemente dalla scelta del rappresentativo.
Nel caso di una funzione continua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, ogni punto $x \in \mathbb{R}$ è punto di Lebesgue e risulta $f_*(x) = f(x)$ ma non è chiaro in alcun modo dalla definizione che ogni funzione localmente integrabile in $\mathbb{R}$ ammetta dei punti di Lebesgue. Il seguente celebre teorema di Lebesgue garantisce che non sia questo il caso.

Teorema 6.23 (H. Lebesgue). *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ una funzione localmente integrabile in $\mathbb{R}$. Allora, si ha*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt = 0$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$.

Pertanto, se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ è una funzione localmente integrabile in $\mathbb{R}$, quasi ogni punto x di $\mathbb{R}$ è punto di Lebesgue di f ed il valor medio $f_*(x)$ di f in x coincide col valore $f(x)$ in quasi ogni punto di Lebesgue x di f cioè risulta

$$f_*(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, dt = f(x)$$

per quasi ogni punto di Lebesgue x di f. In particolare, l'uguaglianza a sinistra vale per ogni punto di Lebesgue di f e quindi quasi ovunque in $\mathbb{R}$ mentre l'uguaglianza a destra vale per quasi ogni punto di Lebesgue di f.
La funzione $f_*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ è quindi quasi ovunque uguale in tutto $\mathbb{R}$ alla funzione localmente integrabile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ cui è associata e, con terminologia lievemente imprecisa[3] prende il nome di *rappresentativo preciso di* f. Tra gli elementi della classe di equivalenza di $L(\mathbb{R})$ cui appartiene f essa ha la proprietà di essere la funzione per la quale la relazione

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f_*(t) - f_*(x)|\, dt = 0$$

vale sul più grande insieme possibile di punti x.

Dimostrazione (Teorema 6.23). Sia $\{q_n\}_n$ un insieme denso di $\mathbb{K}$ e siano f_n le funzioni definite da

$$f_n(t) = |f(t) - q_n|\,, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1.$$

Ogni funzione f_n è localmente integrabile in $\mathbb{R}$ cosicché la sua funzione integrale

$$F_n(x) = \int_0^x f_n, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1,$$

è derivabile quasi ovunque in $\mathbb{R}$ con $F_n' = f_n$ quasi ovunque in $\mathbb{R}$ (Teorema 6.20).
Per ogni n, sia quindi L_n l'insieme di misura piena in $\mathbb{R}$ costituito dai punti x tali che F_n sia derivabile in x e is abbia $F_n'(x) = f_n(x)$. Sia quindi $L = \bigcap_n L_n$ cosicché si ha ancora $|\mathbb{R} \setminus L| = 0$.
Sia ora $x \in L$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia n tale che $|q_n - f(x)| \leq \varepsilon/3$ e, tenendo conto che si ha $F_n'(x) = f_n(x)$, scegliamo $\delta = \delta(\varepsilon, n) > 0$ tale che si abbia

$$\left| \frac{F_n(x+h) - F_n(x-h)}{2h} - f_n(x) \right| \leq \varepsilon/3$$

per ogni $0 < h \leq \delta$. Si ha allora per gli stessi h

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt \leq \\
&\leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t) - q_n|\, dt + |f(x) - q_n| \leq \\
&\leq \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t) - q_n|\ dt - |f(x) - q_n| \right| + 2|f(x) - q_n| = \\
&= \left| \frac{F_n(x+h) - F_n(x-h)}{2h} - f_n(x) \right| + 2|f(x) - q_n| \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

e questo completa la dimostrazione. □

[3] La funzione f_* è in effetti un rappresentativo della classe di equivalenza $F \in L(\mathbb{R})$ cui appartiene f.

Con identica dimostrazione si prova anche che risulta

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} |f(t)-f(x)|\,dt = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} |f(t)-f(x)|\,dt = 0$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$.
Osserviamo ora che, scegliendo nel teorema precedente come funzione f la funzione caratteristica $f = 1_E$ di un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}$, si ottiene

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\big|E\cap[x-h,x+h]\big|}{2h} = 1 \qquad \text{per q.o. } x \in E$$
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\big|E\cap[x-h,x+h]\big|}{2h} = 0 \qquad \text{per q.o. } x \notin E.$$

Motivati da questa osservazione introduciamo la definizione seguente.

Definizione 6.24. Siano $E \subset \mathbb{R}$ un insieme misurabile ed $\alpha \in [0,1]$. Un punto $x \in \mathbb{R}$ tale che sia

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\big|E\cap[x-h,x+h]\big|}{2h} = \lambda$$

si dice *punto di densità α di E*. □

I punti di densità uno per un insieme sono dunque – per così dire – punti interni all'insieme nel senso della misura mentre i punti di densità zero sono punti esterni nello stesso senso[4]. Dal teorema di Lebesgue segue quindi che quasi ogni punto di un insieme è un punto di densità uno per l'insieme stesso e quasi ogni punto del complementare è un punto di densità zero per l'insieme. Il limite nella definizione precedente può non esistere ovvero può assumere un qualunque valore nell'intervallo $[0,1]$ (Esercizio 6.1).

6.3. Teorema fondamentale del calcolo

Esaminiamo in questa sezione in che misura derivazione ed integrazione secondo Lebesgue sono operazioni inverse l'una dell'altra cioè vale il teorema fondamentale del calcolo. Come preludio a tale indagine, esaminiamo dapprima i limiti di validità del teorema fondamentale del calcolo nell'ambito dell'integrazione secondo Riemann e caratterizziamo quindi la classe delle funzioni per le quali vale il teorema fondamentale del calcolo – che sono cioè le funzioni integrali della propria derivata – introducendo la classe delle funzioni *assolutamente continue*. Vedremo così che, nell'ambito dell'integrazione secondo Lebesgue il teorema fondamentale del calcolo ha un campo di applicazione più vasto di quanto accade per l'integrale di Riemann. Tuttavia, anche in questo ambito più ampio, non è possibile ricostruire ogni funzione derivabile come funzione integrale della sua derivata poiché anche per l'integrale di Lebesgue come per l'integrale di Riemann esistono derivate che non sono integrabili. Il risultato migliore che otteremo in questa direzione sarà la dimostrazione della validità del teorema fondamentale del calcolo per le funzioni derivabili in ogni punto aventi derivata Lebesgue integrabile (Teorema 6.37), risultato che estende quello corrispondente valido per l'integrale di Riemann (Teorema 6.21 in [14]).
Per ottenere infatti l'integrabilità di ogni derivata ovvero la possibilità di rappresentare ogni funzione derivabile come la funzione integrale della sua derivata è necessario considerare integrali di tipo Riemann non assolutamente convergenti come l'integrale di Heinstock–Kurzweil. Tale integrale, rendendo integrabile una classe di funzioni molto più ampia di quelle integrabili secondo Lebesgue, gode però di proprietà più

[4] È possibile far sì che questa analogia non sia solo suggestiva ma diventi rigorosa. È possibile infatti introdurre una topologia su $[0,1]$ per la quale x è interno ad E se e solo se x è punto di densità uno di E ([11]).

deboli di quelle possedute dall'integrale di Lebesgue e risulta conseguentemente meno utile di quest'ultimo. Di fatto, l'integrale di Lebesgue sembra realizzare il più felice equilibrio tra generalità dell'integrale intesa come ampiezza della classe delle funzioni integrabili e proprietà dell'integrale stesso.
A conclusione della sezione caratterizziamo infine le funzioni assolutamente continue tra le funzioni a variazione limitata ed esaminiamo alcuni aspetti del calcolo differenziale per funzioni assolutamente continue con particolare riguardo alla validità della regola di derivazione delle funzioni composte.
Anche in questa sezione consideriamo funzioni $f\colon I \to \mathbb{K}$ con $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e, in assenza di una esplicita indicazione, tutti i risultati che proveremo valgono per funzioni a valori reali o complessi.

Integrale di Riemann e teorema fondamentale del calcolo. Il teorema fondamentale del calcolo stabilisce un legame tra integrazione e derivazione che nel caso dell'integrale di Riemann si esprime nella forma seguente: se $F\colon [a\,,b] \to \mathbb{K}$ è una funzione derivabile in $[a\,,b]$ con derivata Riemann integrabile (continua in particolare), allora è possibile ricostruire F come funzione integrale della sua derivata

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F', \qquad x \in [a\,,b].$$

Ciò suggerisce in modo naturale la domanda seguente: se $F\colon [a\,,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in $[a\,,b]$, vale allora il teorema fondamentale del calcolo senza ulteriori ipotesi su F? Ciò equivale a dire che F' è Riemann integrabile in $[a\,,b]$ e con questa formulazione la risposta è certamente negativa: la funzione

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^{1+\alpha} \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ con derivata

$$F'_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha} \operatorname{sen}(1/|x|) - |x|^{\alpha-1} \cos 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e, essendo F'_α localmente illimitata in zero, essa non è Riemann integrabile in alcun intervallo compatto contenente l'origine.
L'esempio precedente non è tuttavia completamente soddisfacente poiché F'_α non è Riemann integrabile in alcun intervallo contenente l'origine non essendo localmente limitata nell'origine ma si ha tuttavia

$$\int_{-R}^{R} |F'_\alpha| \leq \frac{2}{\alpha+1} R^{1+\alpha} + \frac{2}{\alpha} R^\alpha < +\infty \qquad (R > 0)$$

e

$$F_\alpha(x) = \int_0^x F'_\alpha, < +\infty \qquad x \in \mathbb{R},$$

nel senso degli integrali generalizzati. L'esempio che segue (Esempio 6.25), dovuto a V. Volterra, mostra che il problema non può essere risolto ricorrendo agli integrali di Riemann generalizzati e che la situazione è quella raffigurata nello schema di Figura 6.2 – (a) in cui, fissato $I = [0\,,1]$, sono rappresentati gli insiemi seguenti:

- L insieme delle funzioni limitate in $[0\,,1]$;
- R insieme delle funzioni Riemann integrabili in $[0\,,1]$;
- $L + P$ insieme delle funzioni limitate e primitivabili in $[0\,,1]$;

ciascuno dei quali è il rettangolo individuato dai vertici in alto a destra e in basso a sinistra contrassegnati da $\bullet$. Nello stesso schema, (1) rappresenta la funzione segno (traslata) che è Riemann integrabile ma non primitivabile e (2) rappresenta

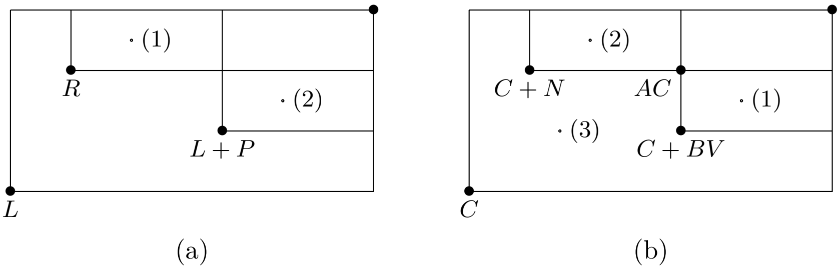


FIGURA 6.2. (a) Relazioni tra funzioni Riemann integrabili e primitivabili. (b) Relazioni tra funzioni BV, N – funzioni e funzioni AC.

la funzione di Volterra dell'esempio seguente che è invece primitivabile ma non Riemann integrabile.

ESEMPIO 6.25 (V. Volterra). Costruiamo una funzione $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile con le seguenti proprietà:

- F' è limitata;
- F' non è Riemann integrabile in $[0,1]$.

Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ sia $(2k - 1\pi/2 < s_k < (2k+1)\pi/2$ l'unica soluzione dell'equazione $\tan s = s/2$ in tale intervallo e, fissati $-\infty < a < b < +\infty$, siano

$$k' = \min\left\{k \geq 1 :\ s_k > \frac{2}{b-a}\right\} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} a' = a + 1/s_{k'} \\ b' = b - 1/s_{k'}. \end{cases}$$

in modo che a' sia il più grande zero della derivata di

$$x \in (a, +\infty) \mapsto (x-a)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x-a}$$

più piccolo di $(a+b)/2$ e b' sia il più piccolo zero della derivata di

$$x \in (-\infty, b) \mapsto (b-x)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{b-x}$$

più grande di $(a+b)/2$. Definiamo allora $F_{a,b}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ o } x \geq b \\ (x-a)^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x-a} & \text{se } a < x \leq a' \\ (a'-a)^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{a'-a} = (b-b')^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{b-b'} & \text{se } a' \leq x \leq b' \\ (b-x)^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{b-x} & \text{se } b' \leq x < b \\ 0 & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

La funzione $F_{a,b}$ così definita è pari attorno ad $x = (a+b)/2$ per costruzione ed è derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}$ con derivata continua in ogni punto $x \notin \{a, b\}$ ma discontinua nei punti $x \in \{a, b\}$ poiché si ha

$$F'_{a,b}(a') = F'_{a,b}(b') = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \left|F_{a,b}\left(a + \frac{1}{n\pi}\right)\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|F_{a,b}\left(b - \frac{1}{n\pi}\right)\right| = 1.$$

Sia ora $C \subset [0,1]$ un insieme di Cantor di misura positiva (Esercizio 5.5). L'insieme $V = [0,1] \setminus C$ è aperto in $\mathbb{R}$ e quindi è della forma $V = \bigcup_k (a_k, b_k)$ con (a_k, b_k) intervalli disgiunti di $(0,1)$. Posto $F_k = F_{a_k, b_k}$, sia

$$F(x) = \sum_k F_k(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La serie che definisce F è in realtà una somma finita per ogni x poiché ogni F_k è nulla sul complementare di (a_k, b_k) e gli intervalli (a_k, b_k) sono disgiunti. Inoltre, da $F = F_k$ in (a_k, b_k) segue che F è derivabile in ogni punto di V con derivata

$$F'(x) = F_k'(x), \qquad x \in (a_k, b_k),$$

ed F è derivabile nei punti $x \in C$ con derivata nulla poiché per costruzione si ha

$$|F(y)| \leq (y - x)^2, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Infine, F è derivabile fuori dall'intervallo $[0, 1]$ con derivata nulla. Pertanto, F è derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}$ con derivata

$$F'(x) = \sum_k F_k'(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Poiché la serie a destra ha al più un solo addendo non nullo per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni F_k' è limitata, anche F' è limitata.
Proviamo infine che F' è discontinua in ogni punto di C. Infatti, se $x \in C$, o risulta $x \in \{a_k, b_k\}$ per qualche k oppure esistono indici k_h $(h \geq 1)$ distinti tali che

$$\lim_{h \to +\infty} a_{k_h} = \lim_{h \to +\infty} b_{k_h} = x.$$

In entrambi i casi, esiste una successione di punti $\{x_h\}_h$ tali che $x_h \in (a_k, b_k)$ per ogni h e $x_h \to x$ per $h \to +\infty$ nel primo caso e $a_{k_h} < x_h < b_{k_h}$ per ogni h nel secondo caso per la quale si ha $|F'(x_h)| = |F_k'(x_h)| \to 1$ per $k \to +\infty$ nel primo cao ovvero $|F'(x_h)| = |F_{k_h}'(x_h)| \to 1$ per $k \to +\infty$ nel secondo caso. Risulta pertanto

$$C = \big\{x \in \mathbb{R} : \ F \text{ non è derivabile in } x\big\}$$

e quindi F' non è Riemann integrabile in $[0, 1]$ (Teorema 5.28). □

Funzioni assolutamente continue. Abbiamo visto nella sezione precedente (Teorema 6.20) che, se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo (non degenere), la funzione integrale

$$(*) \qquad F(x) = \int_a^x f, \qquad x \in I \quad (a \in I),$$

di una funzione integrabile $f \colon I \to \mathbb{K}$ è una funzione continua a variazione limitata su I la cui derivata è $F' = f$ quasi ovunque in I. Ci poniamo ora il problema di determinare quali funzione continue $F \colon I \to \mathbb{K}$ siano funzioni integrali, siano cioè derivabili quasi ovunque con derivata integrabile e siano in più la funzione integrale della propria derivata. Le funzioni di Cantor–Vitali e Riesz–Nagy mostrano che ciò non può essere vero per ogni funzione continua a variazione limitata ed è evidente che una condizione necessaria perché ciò accada è fornita dalla assoluta continuità dell'integrale (Teorema 2.33): se F è della forma $(*)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ con la seguente proprietà: per ogni famiglia finita di intervalli $[x_i, y_i] \subset I$, $i = 1, \ldots, j$ tali che

- $(x_{i_1}, y_{i_1}) \cap (x_{i_2}, y_{i_2}) = \varnothing$ per ogni $i_1 \neq i_2$;
- $\sum_i (y_i - x_i) \leq \delta$;

si ha

$$\sum_i |F(y_i) - F(x_i)| \leq \sum_i \int_{x_i}^{y_i} |f| = \int_{\bigcup_i [x_i, y_i]} |f| \leq \varepsilon.$$

Formalizziamo questa condizione nella definizione seguente.

Definizione 6.26. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $F \colon I \to \mathbb{C}$ una funzione tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ con la seguente proprietà: per ogni famiglia finita di intervalli $[x_i, y_i] \subset I$, $i = 1, \ldots, j$ tali che

- $(x_{i_1}, y_{i_1}) \cap (x_{i_2}, y_{i_2}) = \varnothing$ per ogni $i_1 \neq i_2$

- $\sum_i (y_i - x_i) \leq \delta$;

si ha

$$\sum_i |F(y_i) - F(x_i)| \leq \varepsilon$$

si dice *assolutamente continua in* I. □

L'insieme

$$AC(I) = \{f : I \to \mathbb{K} \text{ assolutamente continua in } I\}$$

delle funzioni assolutamente continue in I è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e, come al solito, denotiamo con $AC_{\mathrm{loc}}(I)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $F : I \to \mathbb{K}$ la cui restrizione ad ogni intervallo chiuso e limitato $[a\,,b]$ di I è assolutamente continua in $[a\,,b]$. Anche il prodotto di funzioni assolutamente continue e limitate è ancora una funzione assolutamente continua.
È evidente che che ogni funzione assolutamente continua in I è uniformemente continua in I e risulta inoltre $\mathrm{Lip}(I) \subset AC(I)$. Proviamo ora che le funzioni assolutamente continue in un intervallo limitato sono anche a variazione limitata.

Proposizione 6.27. *Siano* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervallo limitato ed* $F \in AC(I)$. *Allora,* $F \in BV(I)$.

Dimostrazione. Se l'intervallo I non è compatto, F ha un'unica estensione continua alla chiusura di I e tale estensione è ancora assolutamente continua in $\mathrm{cl}(I)$. Non è quindi restrittivo supporre che sia $I = [a\,,b]$.
Sia dunque $\delta > 0$ associato ad $\varepsilon = 1$ dalla definizione di assoluta continuità e sia $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ una suddivisione di $[a\,,b]$. Supponiamo senza perdita di generalità che sia $0 < \delta < b - a$ e consideriamo il raffinamento $Q = \{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_j = b\}$ di P ottenuto aggiungendo a P i punti $a + k\delta$ per $k = 1, \ldots, k_0$ ove k_0 è dato da $k_0 = [(b-a)/\delta]$. Si ha allora

$$\sum_{1 \leq m \leq n} |F(x_m) - F(x_{m-1})| \leq \sum_{1 \leq i \leq j} |F(y_i) - F(y_{i-1})| \leq k_0 + 1$$

e dall'arbitrarietà della suddivisione P di $[a\,,b]$ segue la tesi. □

Possiamo ora provare che sugli intervalli limitati l'assoluta continuità caratterizza le funzioni integrali.

Teorema 6.28. *Siano* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervallo limitato ed* $F : I \to \mathbb{K}$ *una funzione. Allora, le affermazioni seguenti sono equivalenti*

(a) *esiste* $f : I \to \mathbb{K}$ *integrabile tale che*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f, \qquad x \in I,$$

per ogni $a \in I$;

(b) $F \in AC(I)$.

Nel caso in cui I sia un intervallo illimitato, l'implicazione (a) $\Longrightarrow$ (b) continua a valere inalterata mentre l'implicazione opposta (b) $\Longrightarrow$ (a) vale con l'ulteriore ipotesi che sia $F \in AC(I) \cap BV(I)$ oppure vale con $f : I \to \mathbb{K}$ localmente integrabile se $F \in AC(I)$ ma è soltanto a variazione localmente limitata su I. Inoltre, alla luce di Teorema 6.20, tale implicazione si può riformulare nel modo seguente.

Corollario 6.29. *Siano* $I \subset \mathbb{R}$ *intervallo limitato ed* $F \in AC(I)$. *Allora,*

(a) F *è derivabile quasi ovunque in* I;

(b) F' *è integrabile su* I;

e inoltre si ha

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F', \qquad x \in I,$$

per ogni $a \in I$*.*

La dimostrazione del Teorema 6.28 è basata sul risultato seguente che ha interesse di per sè.

Lemma 6.30. *Siano* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervallo ed* $F \in AC(I)$ *una funzione tale che*

$$F'(x) = 0 \qquad \text{per q.o. } x \in I.$$

Allora, F *è costante in* I*.*

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che I sia limitato e, per le stesse considerazioni già svolte nella Proposizione 6.27, possiamo supporre anche che sia $I = [a, b]$ intervallo compatto e provare quindi che risulta $F(a) = F(c)$ per ogni $c \in (a, b]$.
Fissato allora $c \in (a, b]$, sia $C = \{F' = 0\} \cap (a, c)$ e, fissato $\varepsilon > 0$ sia $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ associato ad $\varepsilon/2$ dalla definizione di assoluta continuità. Per ogni $x \in C$ esiste $h_x > 0$ tale che risulta $[x, x + h_x] \subset (a, c)$ e

$$|F(x + h) - F(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(c - a)} \cdot h, \qquad 0 < h \leq h_x.$$

La famiglia di intervalli

$$\mathcal{I} = \big\{[x, x + h] : \ 0 < h \leq h_x, \, x \in C\big\}$$

così definita è un ricoprimento di Vitali di C. Esistono quindi $[x_m, x_m + h_m]$ $(m = 1, \ldots, n)$ intervalli disgiunti di $\mathcal{I}$ tali che

$$\Big|C \setminus \Big(\bigcup\nolimits_m [x_m, x_m + h_m]\Big)\Big| \leq \delta.$$

Poniamo $y_m = x_m + h_m$ e conveniamo di numerare gli intervalli in modo che si abbia $x_m < x_{m+1}$ per $m = 1, \ldots, n-1$. Consideriamo quindi la suddivisione dell'intervallo $[a, c]$ definita da

$$a = y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_n < y_n < x_{n+1} = c$$

ed osserviamo che si ha

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{1 \leq m \leq n+1} (x_m - y_{m-1}) &= \Big|[a, c] \setminus \Big(\bigcup\nolimits_m [x_m, x_m + h_m]\Big)\Big| = \\ &= \Big|C \setminus \Big(\bigcup\nolimits_m [x_m, x_m + h_m]\Big)\Big| \end{aligned}$$

da cui segue

$$\sum_{1 \leq m \leq n+1} |F(x_m) - F(y_{m-1})| \leq \varepsilon/2.$$

Per i restanti intervalli della suddivisone si ha

$$\sum_{1 \leq m \leq n} |F(y_m) - F(x_m)| \leq \frac{\varepsilon}{2(c - a)} \cdot \sum_{1 \leq m \leq n} (y_m - x_m) \leq \varepsilon/2$$

cosicché risulta

$$|F(c) - F(a)| \leq \sum_{1 \leq m \leq n+1} |F(x_m) - F(y_{m-1})| + \sum_{1 \leq m \leq n} |F(y_m) - F(x_m)| \leq \varepsilon$$

dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue la tesi. $\square$

Dimostrazione (Teorema 6.28). (a) È conseguenza immediata dell'assoluta continuità degli integrali (Teorema 2.33).
(b) Si ha $F \in BV(I)$ (Proposizione 6.27) e quindi F è derivabile quasi ovunque in I con derivata F' integrabile in I (Teorema 6.17). Poniamo

$$f(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{se } F \text{ è derivabile in } x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e consideriamo la funzione integrale di f definita da

$$F_a(x) = F(a) + \int_a^x f, \qquad x \in I \quad (a \in I).$$

È chiaro che è $F_a \in AC(I)$ per (a) e quindi anche la differenza $F - F_a$ è in $AC(I)$ con derivata quasi ovunque nulla in I (Teorema 6.20−(b)). Quindi, $F - F_a$ è costante su I (Lemma 6.30) e la conclusione segue infine da $F_a(a) = F(a)$. □

A conclusione di questa parte sulle funzioni assolutamente continue ricaviamo la classica formula di integrazione per parti la cui dimostrazione è ovvia.

Teorema 6.31. *Siano $F, G \in AC([a,b])$. Allora,*

(a) *$F'G$ e FG' sono integrabili in $[a,b]$;*
(b) *si ha*

$$\int_a^b F'G = FG\Big|_a^b - \int_a^b FG'.$$

Funzioni assolutamente continue e $N-$funzioni. Come abbiamo visto, le funzioni integrali su un intervallo limitato si identificano con le funzioni assolutamente continue le quali costituiscono un sottoinsieme proprio delle funzioni continue a variazione limitata: ci proponiamo in questa parte di caratterizzare le prime tra le seconde. Questa caratterizzazione è legata alla nozione di $N-$funzione di Lusin (Definizione 5.43) e ad alcuni risultati sulla misura dell'immagine di un insieme misurabile mediante una funzione differenziabile. Considerazioni collegate a quelle che qui svolgiamo per funzioni di una variabile reale saranno riprese successivamente (Capitoli **??** e **??**) nel caso di funzioni da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^M$.
Riuniamo nel lemma seguente alcune proprietà delle funzioni derivabili quasi ovunque in un intervallo. Tali proprietà integrano nel caso undimensionale le proprietà già evidenziate in precedenza per le funzioni lipschitziane (Teorema 5.46).

Lemma 6.32. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $T \subset I$ un insieme trascurabile e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile quasi ovunque in $I \setminus T$. Allora,*

(a) *la restrizione $f_{|[a,b]\setminus T}$ è una N –funzione continua in $[a,b] \setminus T$;*
(b) *se E è misurabile con $E \subset [a,b] \setminus T$, l'insieme $f(E)$ è misurabile;*
(c) *la funzione $x \in [a,b] \setminus T \to \mathbb{R}$ è misurabile in $[a,b] \setminus T$;*
(d) *se $|f'(x)| \le k$ pe rogni $x \in [a,b] \setminus T$, si ha $|f(E)| \le K|E|$ per ogni insieme $E \subset [a,b] \setminus T$ misurabile;*
(e) *$E \subset [a,b] \setminus T$ misurabile* $\implies$ $|f(E)| \le \int_E |f'|$.

Questo risultato vale in particolare quando $f \in \mathrm{Lip}(A)$ e in tal caso è possibile supporre che sia $A = \mathbb{R}$ per il lemma di McShane (Teorema I–3.33). Proveremo inoltre successivamente che, se $A = I$ è un intervallo e Jf è finita in ogni punto di I, la funzione f è derivabile quasi ovunque in I e quindi risulta $Jf = |f'|$ quasi ovunque in I (Teorema **??**).

Dalle proprietà (b) e (c) si ricava evidentemente che

$$E \subset A \text{ e } E \text{ misurabile} \qquad \Longrightarrow \qquad |f(E)| \leq K|E|$$

e, nel caso di una funzione derivabile in ogni punto di un intervallo, la disuguaglianza in (e) diviene il risultato seguente che corrisponde in dimensione $N = 1$ ad una parte della formula dell'area (Teorema **??**).

COROLLARIO 6.33. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora,*

(a) *f' è misurabile;*

(b) *se $E \subset I$ è misurabile, $f(E)$ è misurabile e si ha*

$$|f(E)| \leq \int_E |f'| \,.$$

Anche in questo caso, lo stesso risultato vale con $f \in \mathrm{Lip}(I)$ nel qual caso la derivata f' è solo definita quasi ovunque in I.

DIMOSTRAZIONE (LEMMA 6.32). Le affermazioni (a) e (b) non sono altro che la riformulazione per funzioni da insiemi di $\mathbb{R}$ a valori complessi dei corrispondenti risultati per funzioni da insiemi di $\mathbb{R}^N$ a valori in $\mathbb{R}^M$ (Teoremi 5.44 e 5.46). Proviamo quindi solo le restanti affermazioni e, essendo l'insieme $A \setminus A'$ al più numerabile, supponiamo che sia $A \subset A'$.

(c) Possiamo supporre che sia $0 < |A|_* < +\infty$ e porre $\alpha = |A|_*$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia V un insieme aperto tale che $A \subset V$ e $|V| < \alpha + \varepsilon$. Essendo la funzione Jf limitata, per ogni $x \in A \cap (a_k, b_k)$ esiste $h_x > 0$ tale che risulti

- $[x - h_x, x + h_x] \subset V$;
- $|f(y) - f(x)| \leq (K + \varepsilon)|y - x|$ per ogni $y \in A$ e $|y - x| \leq h_x$;

da cui segue

$$\big|f\big(A \cap [x - h, x = h]\big)\big|_* \leq (K + \varepsilon)2h, \qquad 0 < h \leq h_x.$$

La famiglia di intervalli

$$\mathcal{I} = \big\{[x - h, x + h] : \ 0 < h \leq h_x \text{ e } x \in A\big\}$$

così definita è un ricoprimento di Vitali di A. Esiste quindi una famiglia al più numerabile di intervalli disgiunti $I_n = [x_n - h_n, x_n + h_n]$ $(n \geq 1)$ di $\mathcal{I}$ tali che

$$\Big|A \setminus \Big(\bigcup\nolimits_n I_n\Big)\Big| = 0$$

da cui segue

$$\Big|f\Big(A \setminus \Big(\bigcup\nolimits_n I_n\Big)\Big)\Big| = 0$$

per (a). Si ha allora

$$|f(A)|_* \leq \sum_n |f\,(A \cap I_n)|_* + \Big|f\Big(A \setminus \Big(\bigcup\nolimits_n I_n\Big)\Big)\Big|_* \leq$$
$$\leq (K + \varepsilon) \sum_n |I_n| \leq (K + \varepsilon)|V| \leq (K + \varepsilon)(\alpha + \varepsilon)$$

e dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue l'asserto.

(d) Sia A misurabile e sia $\{a_j\}_j$ un sottoinsieme numerabile e denso[5] di A. Essendo $A \subset A'$ e f continua in A, si ha

$$Jf(x) = \inf_{k\geq 1}\left(\sup_{\substack{0<|y-x|<1/k\\ y\in A}}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|\right) = \inf_{k\geq 1}\left(\sup_{\substack{j\geq 1\\ 0<|a_j-x|<1/k}}\left|\frac{f(a_j)-f(x)}{a_j-x}\right|\right).$$

per ogni $x \in A$. Definiamo allora

$$Jf_{k,j}(x) = \begin{cases} \left|\dfrac{f(a_j)-f(x)}{a_j-x}\right| & \text{se } x\in A \text{ e } 0<|x-a_j|<1/k\\ 0 & \text{se } x\in A \text{ e } x=a_j \text{ o } |x-a_j|\geq 1/k.\end{cases}$$

Ogni funzione $Jf_{k,j}$ è misurabile e si ha

$$Jf(x) = \inf_{k\geq 1}\left(\sup_{\substack{j\geq 1\\ 0<|a_j-x|<1/k}}\left|\frac{f(a_j)-f(x)}{a_j-x}\right|\right) = \inf_{k\geq 1}\left(\sup_{j\geq 1} Jf_{k,j}(x)\right).$$

per ogni $x \in A$ e questo prova (d).

(e) Non è restrittivo supporre che sia $|E| < +\infty$ e supponiamo dapprima che la funzione Jf sia limitata su E cioè risulti $0 \leq Jf(x) < K$ per ogni $x \in E$. Allora, gli insiemi

$$E_{n,h} = \left\{x\in E:\ K\frac{h-1}{2^n} \leq Jf(x) < K\frac{h}{2^n}\right\}, \qquad h=1,\dots,2^n, \quad n\geq 0,$$

sono misurabili, disgiunti e tali che $E = \bigcup_h E_{n,h}$ per ogni n. Per (b) e (c) si ha quindi

$$\begin{aligned}|f(E)| &\leq \sum_{1\leq h\leq 2^n}|f(E_{n,h})| \leq K\sum_{1\leq h\leq 2^n}\frac{h}{2^n}|E_{n,h}| =\\ &= K\sum_{1\leq h\leq 2^n}\frac{h-1}{2^n}|E_{n,h}| + \frac{K}{2^n}|E| = \int_E s_n + \frac{K}{2^n}|E|\end{aligned}$$

per ogni n avendo denotato con s_n la funzione semplice e misurabile definita da

$$s_n(x) = \sum_{1\leq h\leq 2^n} K\frac{h-1}{2^n}1_{E_{n,h}}(x), \qquad x\in E.$$

Poiché si ha $s_n \leq s_{n+1}$ per ogni n e $s_n \to Jf$ uniformemente in E per $n \to +\infty$ (Teorema 2.9), risulta

$$|f(E)| \leq \int_E Jf$$

per il teorema di convergenza monotòna. Infine, il caso generale in cui la funzione Jf è illimitata si ricava dal precedente scrivendo E nella forma $E = \bigcup_k E_k$ con $E_k = \{x \in E:\ Jf(x) < k\}$ per ogni k. □

Possiamo ora dimostrare il teorema di Banach–Zarecki che caratterizza le funzioni assolutamente continue tra le funzioni continue a variazione limitata.

Teorema 6.34 (S. Banach–M.A. Zarecki). *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo ed $F\colon I \to \mathbb{K}$ una funzione tale che*

- *F è continua in I;*
- *F è derivabile quasi ovunque in I;*
- *F' è integrabile su I.*

---

[5] L'insieme A munito della topologia indotta da $\mathbb{R}$ è separabile essendo la topologia indotta da $\mathbb{R}$ a base numerabile.

Allora, le affermazioni seguenti sono equivalenti

(a) $F \in AC(I)$;

(b) F *se* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ovvero* $U = \mathrm{Re}(F)$ *e* $V = \mathrm{Im}(F)$ *se* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *sono* N *–funzioni in* I.

È facile verificare che nel caso complesso l'ipotesi che la parte reale e la parte immaginaria di F siano N –funzioni non può essere sostituita dalla sola richiesta che F sia tale.

Dimostrazione. È sufficiente provare il teorema nel caso reale.

(a) Poiché F è assolutamente continua, non è restrittivo supporre che I sia un intervallo chiuso. Sia quindi $T \subset I$ un insieme trascurabile che possiamo supporre contenuto in $\mathrm{int}(I)$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ad esso associato dalla assoluta continuità di F e sia V un insieme aperto tale che risulti $T \subset V \subset I$ e $|V| < \delta$. Si ha

$$V = \bigcup_k (a_k, b_k)$$

per un'opportuna famiglia al più numerabile (a_k, b_k) $(k \geq 1)$ di intervalli disgiunti cosicché risulta

$$\sum_k (b_k - a_k) = |V| < \delta.$$

Poiché I è chiuso, risulta $[a_k, b_k] \subset I$ per ogni k. Siano quindi

$$m_k = \min\left\{F(x) : \, x \in [a_k, b_k]\right\} \qquad \text{e} \qquad M_k = \max\left\{F(x) : \, x \in [a_k, b_k]\right\}.$$

per ogni k. Si ha allora

$$|F(T)|_* \leq \sum_k \left|F\left([a_k, b_k]\right)\right| = \sum_k (M_k - m_k) \leq \varepsilon$$

poiché risulta

$$\sum_{1 \leq h \leq k} (M_h - m_h) \leq \varepsilon, \qquad k \geq 1.$$

Risulta quindi $|F(T)| = 0$ e questo prova (b).

(b) Sia $T \subset I$ un insieme trascurabile tale che F sia derivabile in ogni punto di $I \setminus T$ e sia convenzionalmente $F'(x) = 0$ per ogni $x \in I \setminus T$. Poiché l'insieme $I \setminus T$ è denso in I, per $A = I \setminus T$ risulta $A \subset A'$ e per la restrizione di F ad $I \setminus T$ si ha

$$JF(x) = \limsup_{\substack{y \to x \\ y \in I \setminus T}} \frac{|F(y) - F(x)}{|y - x|} = |F'(x)| < +\infty, \qquad x \in I \setminus T.$$

Consegeuntemente risulta

$$|f(E)| \leq \int_E JF = \int_E |F'|$$

per ogni insieme $E \subset I \setminus T$ misurabile (Lemma 6.32 – (e)).
Poiché F' è integrabile in I, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che risulti

$$E \subset I \text{ misurabile e } |E| \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \int_E |F'| \leq \varepsilon.$$

Siano quindi $[x_m, y_m]$ $(m = 1, \ldots, n)$ intervalli non degeneri tali che

- $(x_{m_1}, y_{m_1}) \cap (x_{m_2}, y_{m_2}) = \varnothing$ per ogni $m_1 \neq m_2$;
- $\sum_m (y_m - x_m) \leq \delta$.

Essendo F una N – funzione, si ha $|F([x_m, y_m] \cap T)| = 0$ per ogni m cosicché risulta

$$\begin{aligned}\sum_m |F(y_m) - F(x_m)| \le \sum_m \big|F\big([x_m, y_m]\big)\big| &= \\ = \sum_m \big|F\big([x_m, y_m] \setminus T\big)\big| + \sum_m \big|F\big([x_m, y_m] \cap T\big)\big| &= \\ = \sum_m \int_{[x_m, y_m]\setminus T} |F'| \le \varepsilon\end{aligned}$$

e questo completa la dimostrazione. $\square$

Corollario 6.35. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato ed $F \colon I \to \mathbb{K}$ una funzione continua. Allora, le affermazioni seguenti sono equivalenti*

(a) *$F \in AC(I)$;*
(b) *$F \in BV(I)$ ed F se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ovvero $U = \mathrm{Re}(F)$ e $V = \mathrm{Im}(F)$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sono N – funzioni in I.*

Nell'ambito delle funzioni continue, la relazione tra funzioni a variazione limitata, N – funzioni e funzioni assolutamente continue in un intervallo limitato espressa dal Corollario 6.35 è rappresentata in Figura 6.2 – (b) in cui gli insiemi sono rettangoli individuati come al solito dai vertici in alto a destra e in basso a sinistra contrassegnati da $\bullet$. Nello stesso schema, (1) rappresenta la funzione di Cantor–Vitali che è un esempio di funzione continua a variazione limitata che non è una N – funzione, (2) rappresenta la funzione del successivo Esempio 6.36 modellata sulla funzione di Volterra (Esempio 6.25) che costituisce un esempio di N – funzione continua a variazione illimitata e (3) rappresenta una funzione continua a variazione illimitata che non è una N – funzione ottenuta ad esempio come somma della funzione di Cantor–Vitali e della funzione di Esempio 6.36.

Esempio 6.36. Dati $-\infty < a < b < +\infty$ e $\lambda > 0$, sia $F_{(a,b),\lambda} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F_{(a,b),\lambda}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le a \text{ o } x \ge b \\ \dfrac{2\lambda}{b-a}(x-a) & \text{se } a \le x \le (a+b)/2 \\ \dfrac{2\lambda}{b-a}(b-x) & \text{se } (a+b)/2 \le x \le b. \end{cases}$$

Risulta allora

$$|F_{(a,b),\lambda}(x)| \le \lambda, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Procedendo come nell'Esempio 6.25, sia C un insieme di Cantor di misura positiva e sia $V = [0,1] \setminus C = \bigcup_k (a_k, b_k)$ il suo complementare, essendo (a_k, b_k) $(k \ge 1)$ una famiglia numerabile di intervalli disgiunti. Fissata una successione $\{\lambda_k\}_k$ tale che

- $\lambda_k > 0$;
- $\lim\limits_{k \to +\infty} \lambda_k = 0^+$;
- $\sum_k \lambda_k = +\infty$;

sia $F_k = F_{(a_k,b_k),\lambda_k}$ per ogni k e sia $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \sum_k F_k(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

ove la serie che definisce F è in effetti una somma finita per ogni x. Proviamo che essa è una N – funzione continua tale che

$$V_0^1 F = 2 \sum_k \lambda_k = +\infty.$$

La funzione F è evidentemente continua nei punti di V. Fissato dunque $x \in C$ cosicché risulta $F(x) = 0$ e fissata una successione di punti x_h $(h \geq 1)$ di $[0,1]$ tali che $x_h \to x$ per $h \to +\infty$, proviamo che risulta $F(x_h) \to 0$ per $h \to +\infty$. A tal fine, non è restrittivo supporre che sia $x_h \notin C$ per ogni h e che l'insieme $\{h : x_h \in (a_k, b_k)\}$ sia finito per ogni k. Fissato $\varepsilon > 0$, sia k_0 tale che risulti $0 < \lambda_k < \varepsilon$ per ogni $k \geq k_0$ e sia

$$h_0 > \max\big\{h : x_h \in (a_k, b_k) \text{ per } k = 1, \ldots, k_0\big\}$$

cosicché per $h \geq h_0$ risulta $x_h \in (a_k, b_k)$ con $k > k_0$. Allora, per $h \geq h_0$ si ha

$$0 < F(x_h) \leq \lambda_k < \varepsilon$$

e questo prova la continuità di F in x.
Per provare che F è una $N-$funzione, consideriamo un insieme trascurabile $T \subset [0,1]$. Si ha

$$F(T) = F(T \cap C) \cup \Big(\bigcup\nolimits_k F\big(T \cap (a_k, b_k)\big)\Big) = \{0\} \cup \bigcup\nolimits_k F_k(T)$$

e ogni funzione F_k è una $N-$funzione essendo lipschitziana in tutto $\mathbb{R}$.
Infine, si ha evidentemente $V_0^1 F_h = 2\lambda_h$ per ogni h e

$$V_0^1 F \geq \sum_{1 \leq h \leq k} V_0^1 F_h = \sum_{1 \leq h \leq k} 2\lambda_h$$

per ogni k e da ciò segue l'asserto. □

Dai risultati precedenti si deduce infine che, a differenza di quanto accade per l'integrale di Riemann, nel caso dell'integrale di Lebesgue il teorema fondamentale del calcolo vale sempre per le funzioni derivabili in ogni punto con derivata integrabile. In altri termini, la funzione di Volterra (Esempio 6.25) cessa di essere un controesempio al teorema fondamentale del calcolo relativamente all'integrale di Lebesgue.

Teorema 6.37. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo ed $F\colon I \to \mathbb{K}$ una funzione tale che*

(a) *F è derivabile in ogni punto di I;*
(b) *F' è integrabile in I.*

Allora, $F \in AC(I)$ e si ha

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F', \qquad x \in I.$$

L'ipotesi che F' sia integrabile non può essere eliminata come si vede considerando ad esempio $F = g$ di Esempio 6.10 che è derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}$ ma la cui derivata F' non è integrabile in alcun intorno dell'origine. Infatti tale funzione F non è a variazione limitata attorno a zero (Esempio 6.10).

Dimostrazione. Possiamo supporre F reale. Essendo derivabile in I, la funzione F è una $N-$funzione continua (Lemma 6.32). Risulta quindi $F \in AC(I)$ per il teorema di Banach–Zarecki (Teorema 6.34) da cui segue la formula che rappresenta F come funzione integrale della su derivata. □

Composizione di funzioni assolutamente continue. Esaminiamo in questa parte alcuni aspetti del calcolo differenziale per funzioni assolutamente continue con particolare riguardo al problema della validità della formula di derivazione della funzione composta. Per questo motivo consideriamo per semplicità in questa parte il caso di funzioni a valori reali anche se i risultati che vedremo (con l'eccezione di Teorema 6.43) hanno anche una controparte per funzioni a valori complessi. Consideriamo inoltre il caso di funzioni definite su un intervallo limitato I anche se gli stessi risultati valgono con I intervallo illimitato sostituendo lo spazio $AC(I)$ con $AC_{\mathrm{loc}}(I)$.

La composizione di funzioni assolutamente continue non dà necessariamente luogo ad una funzione assolutamente continua come prova l'esempio seguente.

ESEMPIO 6.38. La funzione

$$h(x) = [f(x)]^2, \qquad x \in \mathbb{R},$$

di Esempio 6.10 è assolutamente continua in $[0,1]$ (Teorema 6.37). Poiché anche la funzione radice quadrata $y \in [0,1] \mapsto \sqrt{y}$ appartiene a $AC([0,1])$, la funzione

$$|f(x)| = \sqrt{h(x)}, \qquad x \in [0,1],$$

è composizione di due funzioni assolutamente continue in $[0,1]$ ma non è a variazione limitata nello stesso intervallo (Esempio 6.10). □

L'esempio precedente suggerisce sotto quali ipotesi la composizione di funzioni assolutamente continue resti tale.

PROPOSIZIONE 6.39. *Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalli con I intervallo limitato e siano $u \in AC(I)$ e $\Phi \in \mathrm{Lip}(J)$ funzioni a valori reali tali che $u(I) \subset J$. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) $\Phi \circ u \in AC(I)$;
(b) $\Phi \circ u \in BV(I)$.

DIMOSTRAZIONE. La funzione $\Phi \circ u$ è una $N-$funzione continua e la tesi si riduce a Corollario 6.35. □

Anche nell'ipotesi che la funzione composta $\Phi \circ u$ sia assolutamente continua, la validità della consueta regola della catena per la derivata della funzione composta

$$(\Phi \circ u)'(x) = \Phi'\big(u(x)\big)\, u'(x), \qquad \text{per q.o. } x \in [a,b]$$

non è in alcun modo scontata poichè la funzione composta $\Phi'\big(u(x)\big)$ può non essere definita quasi ovunque in $[a,b]$. Proveremo che la formula – correttamente interpretata – vale per la composizione di una funzione assolutamente continua con una funzione lipschitziana. A tal fine, proviamo dapprima il risultato seguente.

PROPOSIZIONE 6.40. *Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalli con I intervallo limitato e siano $u \in AC(I)$ e $\Phi \in \mathrm{Lip}(J)$ funzioni a valori reali tali che $u(I) \subset J$. Allora,*

(a) $\Phi \circ u \in AC(I)$;
(b) *per ogni $x \in \mathrm{int}(I)$ con le seguenti proprietà:*
  - *$\Phi \circ u$ è derivabile in x;*
  - *u è derivabile in x con $u'(x) \neq 0$;*

  la funzione Φ è derivabile in $y = u(x)$ e si ha

$$\Phi'(y) = \frac{(\Phi \circ u)'(x)}{u'(x)};$$

(c) *per ogni $x \in I$ tale che u sia derivabile in x con $u'(x) = 0$ la funzione $\Phi \circ u$ è derivabile in x e si ha*

$$(\Phi \circ u)'(x) = 0;$$

(d) *posto*

$$E = \left\{x \in \mathrm{int}(I) : \ \Phi \circ u \text{ ed } u \text{ sono derivabili in } x \text{ e } u'(x) \neq 0\right\},$$

la funzione

$$(***) \qquad x \in I \mapsto \begin{cases} \Phi'\left(u(x)\right) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è misurabile.

Con abuso di notazione conveniamo di denotare con $\Phi' \circ u$ la funzione definita in $(***)$. Ciò è giustificato dal fatto che si utilizza sempre il prodotto $(\Phi' \circ u)u'$ soltanto e risulta $u' = 0$ quasi ovunque sull'insieme in cui $(***)$ non coincide con da $\Phi' \circ u$. Per la dimostrazione di Proposizione 6.40 utilizziamo il fatto che ogni funzione continua è localmente suriettiva attorno ad ogni punto ove sia derivabile con derivata non nulla.

LEMMA 6.41. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in \operatorname{int}(I)$ un punto interno ed $u\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione tale che*

- *u è continua in I;*
- *u è derivabile in x_0 con $u'(x_0) \neq 0$;*

Allora, posto $y_0 = u(x_0)$, esiste $\eta > 0$ con le seguenti proprietà:

(a) *$(y_0 - \eta, y_0 + \eta) \subset u(I)$;*

(b) *per ogni successione $\{k_n\}_n$ tale che*

$$0 < |k_n| < \eta \text{ per ogni } n \qquad e \qquad \lim_{n \to +\infty} k_n = 0,$$

esiste una successione $\{h_n\}_n$ con $x_0 + h_n \in I \setminus \{x_0\}$ per ogni n tale che

$$u(x_0 + h_n) = y_0 + k_n \text{ per ogni } n \qquad e \qquad \lim_{n \to +\infty} h_n = 0,$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo dapprima la restrizione $u\colon I \cap [x_0 + \infty) \to \mathbb{R}$ di u all'intervallo a destra di x_0 e supponiamo, per fissare le idee, che sia $u'(x_0) > 0$. Sia quindi

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{u'(x_0)} \left[u(x_0 + h) - u(x_0) - u'(x_0)h \right], \qquad h \in I - x_0, \quad h \neq 0,$$

cosicché si ha

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + u'(x_0) \left(1 + \frac{\varepsilon(h)}{h} \right) h, \qquad h \in I - x_0, \quad h > 0,$$

e

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\varepsilon(h)}{h} = 0.$$

Scegliamo ora $\delta > 0$ tale che si abbia $x_0 + \delta \in I$ e $1 + \varepsilon(h)/h \geq 1/2$ per ogni $0 < h \leq \delta$ da cui segue $u(x_0 + h) - u(x_0) \geq u'(x_0)h/2$ per gli stessi h. In particolare, risulta quindi $u(x_0 + h) - u(x_0) > 0$ per ogni $0 < h \leq \delta$. Essendo $y_0 = u(x_0)$ e prendendo $h = \delta$, si ha allora $u(x_0 + \delta) \geq y_0 + u'(x_0)\delta/2$ da cui segue

$$[y_0, y_0 + u'(x_0)\delta/2] \subset u\left([x_0, x_0 + \delta]\right).$$

Poniamo allora $\eta = u'(x_0)\delta/2$. Sia quindi $\{k_n\}_n$ una successione tale che $0 < k_n < \eta$ per ogni n e $k_n \to 0^+$ per $n \to +\infty$ e sia $\sigma_n = 2k_n/u'(x_0)$ per ogni n. Si ha allora

$$0 < \sigma_n < \delta \qquad \text{e} \qquad u(x_0 + \sigma_n) \geq y_0 + k_n$$

per ogni n cosicché per ogni n esiste $0 < h_n \leq \sigma_n$ tale che risulti

$$u(x_0 + h_n) = y_0 + k_n.$$

Da $\sigma_n \to 0^+$ per $n \to +\infty$ segue $h_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$. Ripetendo le stesse considerazioni con la restrizione $u\colon I \cap (-\infty, x_0] \to \mathbb{R}$ si ha la tesi. $\square$

DIMOSTRAZIONE (PROPOSIZIONE 6.40). Abbiamo già osservato che vale (a) che è qui elencata solo per completezza.

(b) Sia $x_0 \in \operatorname{int}(I)$ con le ipotesi elencate e siano $y_0 = u(x_0)$ e $d = (\Phi \circ u)'(x_0)$. Esiste allora $\eta > 0$ tale che $(y_0 - \eta, y_0 + \eta) \subset u(I) \subset J$ (Lemma 6.41) e quindi y_0 è un punto interno di J. Sia quindi $\{k_n\}_n$ una successione di incrementi di y_0 tale che

$0 < |k_n| < \eta$ per ogni n e $k_n \to 0^+$ per $n \to +\infty$ e sia $\{h_n\}_n$ la successione degli incrementi di x_0 ad essa associata da Lemma 6.41. Si ha allora

$$\frac{\Phi(y_0 + k_n) - \Phi(y_0)}{k_n} = \frac{\Phi\big(u(x_0 + h_n)\big) - \Phi\big(u(x_0)\big)}{h_n} \frac{h_n}{u(x_0 + h_n) - u(x_0)} \to \frac{d}{u'(x_0)}$$

e dall'arbitrarietà della successione $\{k_n\}_n$ segue l'asserto.

(c) Per ogni $x \in I$ con le ipotesi indicate e per ogni $h \neq 0$ tale che sia $x + h \in I$, si ha

$$\left|\frac{\Phi\big(u(x+h)\big) - \Phi\big(u(x)\big)}{h}\right| \leq \mathrm{Lip}(\Phi) \cdot \left|\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right| \to 0$$

per $h \to 0$.

(d) L'insieme E è misurabile e la funzione $x \in E \mapsto \Phi'\big(u(x)\big)$ è ben definita e coincide con

$$\Phi'\big(u(x)\big) = \frac{(\Phi \circ u)'(x)}{u'(x)}, \qquad x \in E,$$

per (b). Poiché la funzione a destra dell'uguaglianza è a sua volta misurabile in E si ha la tesi. $\square$

Possiamo ora finalmente provare la formula di derivazione della funzione composta per le funzioni assolutamente continue.

Teorema 6.42. *Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalli con I intervallo limitato e siano $u \in AC(I)$ e $\Phi \in \mathrm{Lip}(J)$ funzioni a valori reali tali che $u(I) \subset J$. Allora,*

(a) *$\Phi \circ u \in AC(I)$;*

(b) *$(\Phi \circ u)'(x) = \Phi'\big(u(x)\big)\, u'(x)$ per q.o. $x \in I$.*

Come anticipato, in (b) $\Phi' \circ u$ denota la funzione definita in Proposizione 6.40 − (d).

Dimostrazione. È necessario provare solo la validità della formula in (b). Sia E l'insieme definito in Proposizione 6.40 − (d). Se $x \in E$, la formula vale per Proposizione 6.40 − (b) e per q.o. $x \in I \setminus E$ si ha $u'(x) = 0$ da cui segue $(\Phi \circ u)'(x) = 0$ per Proposizione 6.40 − (c). $\square$

Dalla formula di derivazione della funzione composta per funzioni assolutamente continue derivano regole di calcolo differenziale che valgono specificatamente per tali funzioni e che non hanno analogo tra le funzioni differenziabili puntualmente. Alcune di esse sono riunite nel teorema seguente la cui dimostrazione richiede solo la prima affermazione della tesi del teorema precedente.

Teorema 6.43. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato e $u, v \in AC(I)$ funzioni assolutamente continue a valori reali. Allora,*

(a) *si ha $u^\pm, |u| \in AC(I)$ con*

$$(u^\pm)' = \pm u' 1_{\{\pm u > 0\}} \qquad e \qquad (|u|)' = u' \,\mathrm{sgn}(u)$$

quasi ovunque in I.

(b) *per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha $u' = 0$ quasi ovunque in $\{u = c\}$;*

(c) *si ha $\max\{u, v\}, \min\{u, v\} \in AC(I)$ con*

$$(\max\{u, v\})' = u' 1_{\{u \geq v\}} + v' 1_{\{u < v\}} = u' 1_{\{u > v\}} + v' 1_{\{u \leq v\}}$$
$$(\min\{u, v\})' = u' 1_{\{u \leq v\}} + v' 1_{\{u > v\}} = u' 1_{\{u < v\}} + v' 1_{\{u \geq v\}}$$

quasi ovunque in I.

In conseguenza di (b), la prima formula in (a) si può scrivere equivalentemente nella forma

$$(u^\pm)' = \pm u' 1_{\{\pm u \geq 0\}} \qquad \text{quasi ovunque in } I.$$

Dimostrazione. (a) La parte positiva u^+ di u è assolutamente continua in I poiché risulta $u^+ = \Phi \circ u$ dove Φ è la funzione lipschitziana definita da $\Phi(y) = y^+$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. Sia dunque T l'insieme trascurabile costituito dai punti di I in cui u o u^+ non è derivabile e consideriamo $x \in \mathrm{int}(I) \setminus T$. Se risulta $u(x) \neq 0$ si ha $(u^+)'(x) = u'(x)$ se $u(x) > 0$ e $(u^+)'(x) = 0$ se risulta $u(x) < 0$. Se infine x è tale che $u(x) = 0$, deve essere $u'(x) = 0$ per Proposizione 6.40 – (b) da cui segue $(u^+)'(x) = 0$ per Proposizione 6.40 – (c). Riassumendo i casi possibili, si ha $(u^+)' = u' 1_{\{u>0\}}$ quasi ovunque in I ed in modo analogo si prova la formula per la parte negativa u^-. Infine, da $|u| = u^+ + u^-$ si ricava la tesi per il modulo $|u|$ di u.

(b) Per $c = 0$, si ha $u' = (u^+)' - (u^-)' = 0$ quasi ovunque in $\{u = 0\}$ per (a) e per il caso genereale $c \neq 0$ si considera la funzione $u - c$ in luogo di u.

(c) Si ha $\max\{u, v\} = u + (v - u)^+$ e quindi la funzione $\max\{u, v\}$ è assolutamente continua in I. Inoltre, da (a) si ricava

$$(\max\{u, v\})' = u' + ((v - u)^+)' = u' + (v - u)' 1_{\{v>u\}} = u' 1_{\{u \geq v\}} + v' 1_{\{v>u\}}$$

quasi ovunque in I e l'ultima uguaglianza a destra nella tesi si ottiene scambiando le funzioni u e v tra loro. Infine, per il minimo si procede allo stesso modo a partire da $\min\{u, v\} = u - (v - u)^-$. □

6.4. Misure di Lebesgue–Stieltjes e funzioni a variazione limitata

Introduciamo in questa sezione le misure di Lebesgue–Stieltjes in $\mathbb{R}$ e ne studiamo la relazione con le funzioni monotòne e con le funzioni a variazione limitata. Esaminiamo inoltre la struttura delle funzioni monotòne e delle funzioni a variazione limitata.

Misure di Lebesgue–Stieltjes positive. Una funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

- f è crescente in $\mathbb{R}$;
- f è continua da destra: $\lim_{y \to x^+} f(y) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

si dice *funzione di distribuzione* e per ogni funzione siffatta poniamo come al solito per convenzione

$$f(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} f(x) \in [-\infty, +\infty); \qquad f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) \in (-\infty, +\infty].$$

Denotiamo con $\mathcal{I}$ la collezione di insiemi formata dall'insieme vuoto e dagli intervalli I di $\mathbb{R}$ della forma

$$(*) \qquad I = \begin{cases} (a, b] & -\infty \leq a < b < +\infty \\ (a, +\infty) & -\infty \leq a < +\infty \end{cases}$$

e denotiamo con

$$\mathcal{A} = \big\{A : \ A = I_1 \cup \cdots \cup I_n \text{ con } I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{I} \text{ disgiunti}\big\}.$$

l'algebra generata dalla famiglia di intervalli $\mathcal{I}$ (Esempio 1.7). Data una funzione di distribuzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiamo la funzione d'insiemi $\lambda \colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ponendo

$$\lambda(I) = \begin{cases} f(b) - f(a) & \text{se } I = (a, b] \\ f(+\infty) - f(a) & \text{se } I = (a, +\infty) \end{cases}$$

per ogni intervallo $I \in \mathcal{I}$ ed estendiamo λ all'algebra $\mathcal{A}$ ponendo

$$(**) \qquad \lambda(A) = \lambda(I_1) + \cdots + \lambda(I_n), \qquad A = I_1 \cup \cdots \cup I_n \in \mathcal{A}.$$

La funzione d'insiemi λ associata alla funzione di distribuzione f risulta così ben definita su $\mathcal{A}$ poiché il valore $\lambda(A)$ definito da $(**)$ è in effetti indipendendente dalla rappresentazione di $A \in \mathcal{A}$ come unione di intervalli disgiunti di $\mathcal{I}$ e per lo stesso motivo risulta essere una misura positiva finitamente additiva su $\mathcal{A}$.

LEMMA 6.44. *Sia* $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *la misura finitamente additiva definita da* $(**)$ *e siano* $I \in \mathcal{I}$ *e* $I_n \in \mathcal{I}$ $(n \geq 1)$ *intervalli della forma* $(*)$. *Allora,*

(a) $I_m \cap I_n = \varnothing$ *per* $m \neq n$ *e* $\bigcup_n I_n \subset I \implies \sum_n \lambda(I_n) \leq \lambda(I)$;

(b) $I \subset \bigcup_n I_n \implies \lambda(I) \leq \sum_n \lambda(I_n)$.

La misura finitamente additiva $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ risulta quindi essere una premisura sull'algebra $\mathcal{A}$ che si dice associata alla funzione di distribuzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE. (a) Proviamo dapprima che la tesi vale per ogni insieme finito di intervalli procedendo per induzione sul numero $n \geq 1$ degli intervalli.
L'asserto è ovvio per $n = 1$ e, supposto vero per $n \geq 1$, consideriamo $I_1, \dots, I_{n+1} \in \mathcal{I}$ e $I \in \mathcal{I}$ intervalli come in (a). Denotiamo con

$$\begin{cases} a = \inf I \\ b = \sup I \end{cases} \qquad \begin{cases} a_m = \inf I_m \\ b_m = \sup I_m \end{cases} \qquad m = 1, \dots, n+1$$

gli estremi degli intervalli e supponiamo senza perdita di generalità che sia $b_{n+1} < b_m$ per $m = 1, \dots, n$. Allora, $I_1, \dots, I_n$ sono intervalli disgiunti contenuti in $(b_{n+1}, b]$ se $b < +\infty$ o in $(b_{n+1}, +\infty)$ se $b = +\infty$. In entrambi i casi risulta

$$\sum_{1 \leq m \leq n} [f(b_m) - f(a_m)] \leq f(b) - f(b_{n+1})$$

per l'ipotesi di induzione e, sommando ad ambo i membri $f(b_{n+1}) - f(a_{n+1})$, si ottiene

$$\sum_{1 \leq m \leq n+1} [f(b_m) - f(a_m)] \leq f(b) - f(a_{n+1}) \leq f(b) - f(a)$$

poiché si ha $a_{n+1} \geq a$ e $f(a_{n+1}) \geq f(a)$.
Abbiamo così provato che risulta

$$\sum_{1 \leq m \leq n} \lambda(I_m) \leq \lambda(I)$$

per ogni n e da ciò segue il caso di infiniti intervalli.

(b) Come prima, proviamo preliminarmente che la tesi vale per ogni insieme finito di intervalli procedendo per induzione sul numero $n \geq 1$ di intervalli.
L'asserto è ovvio per $n = 1$ e, supposto vero per $n \geq 1$, consideriamo $I_1, \dots, I_{n+1} \in \mathcal{I}$ e $I \in \mathcal{I}$ intervalli come in (b). Denotati con a_m, b_m e con a, b gli estremi degli intervalli I_m $(m = 1, \dots, n)$ e I, possiamo supporre che sia $I_m \cap I \neq \varnothing$ per ogni $m = 1, \dots, n$ e che gli intervalli siano numerati in modo che sia $a_1 < b \leq b_1$. Se è $a \geq a_1$, si ha $I \subset I_1$ e non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti risulta $a < a_1$ e da ciò segue

$$a_1 > -\infty \qquad \text{e} \qquad (a, a_1] \subset I_2 \cup \dots \cup I_{n+1}.$$

Per l'ipotesi di induzione risulta allora

$$f(a_1) - f(a) \leq \sum_{2 \leq m \leq n+1} [f(b_m) - f(a_m)]$$

cosicché, sommando ad ambo i membri $f(b_1) - f(a_1)$, si ottiene

$$\sum_{1 \leq m \leq n+1} [f(b_m) - f(a_m)] \geq f(b_1) - f(a) \geq f(b) - f(a)$$

poiché si ha $b_1 \geq b$ e $f(b_1) \geq f(b)$ e questo prova la tesi nel caso di una famiglia finita di intervalli.

Consideriamo quindi il caso di un intervallo $I \in \mathcal{I}$ e di una famiglia numerabile $I_n \in \mathcal{I}$ $(n \geq 1)$ di intervalli come in (b). Denotiamone gli estremi con $a\,,b$ e con $a_n\,,b_n$ $(n \geq 1)$ rispettivamente e, fissato $\varepsilon > 0$, per ogni n scegliamo $b'_n \in (-\infty\,,+\infty)]$ tale che risulti

$$\begin{aligned} &b_n < b'_n < \infty \text{ e } 0 \leq f(b'_n) - f(b_n) \leq \varepsilon/2^n && \text{se } b_n < \infty; \\ &b'_n = b_n = -\infty && \text{se } b_n = +\infty. \end{aligned}$$

Sia quindi $[\alpha\,,\beta] \subset I$ un intervallo compatto. Gli intervalli aperti $I'_n = (a_n\,,b'_n)$ $(n \geq 1)$ sono un ricoprimento aperto di $[\alpha\,,\beta]$ e quindi risulta

$$[\alpha\,,\beta) \subset [\alpha\,,\beta] \subset I'_1 \cup \cdots \cup I'_n$$

per n opportuno per compattezza. Si ha allora

$$\begin{aligned} 0 \leq f(\beta) - f(\alpha) &\leq \sum_{1 \leq m \leq n} [f(b'_m) - f(a_m)] \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq m \leq n} \{[f(b_m) - f(a_m)] + \varepsilon/2^m\} \leq \sum_m [f(b_m) - f(a_m)] + \varepsilon \end{aligned}$$

cosicché dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ risulta

$$0 \leq f(\beta) - f(\alpha) \leq \sum_n [f(b_n) - f(a_n)]$$

per ogni intervallo compatto $[\alpha\,,\beta] \subset I$. Essendo f continua da destra se $a > -\infty$ o per la definizione di $f(-\infty)$ se $a = -\infty$, per $\alpha \to a^+$ risulta

$$0 \leq f(\beta) - f(a) \leq \sum_n [f(b_n) - f(a_n)].$$

Scegliendo infine $\beta = b$ se $b < +\infty$ o facendo tendere $\beta \to +\infty$ se $b = +\infty$, risulta

$$0 \leq f(b) - f(a) \leq \sum_n [f(b_n) - f(a_n)].$$

e questo completa la dimostrazione. $\square$

La premisura $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0\,,+\infty]$ definita da $(**)$ a partire dalla funzione di distribuzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisce allora una misura positiva (Teorema 1.46) che denotiamo con

$$\mu_f\colon \mathcal{S}(f) \to [0\,,+\infty]$$

e che si dice *misura di Lebesgue–Stieltjes indotta da* f.
Più in generale, ogni misura positiva di Borel $\mu\colon \mathcal{S} \to [0\,,+\infty]$ che sia la restrizione ad una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ tale che $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{S}(f)$ della misura di Lebesgue–Stieltjes $\mu_f\colon \mathcal{S}(f) \to [0\,,+\infty]$ associata ad una funzione di distribuzione f si dice anch'essa *misura di Lebesgue–Stieltjes in* $\mathbb{R}$.
I risultati seguenti evidenziano le principali proprietà delle misure di Lebesgue–Stieltjes e identificano tali misure come le misure positive di Borel in $\mathbb{R}$ che sono finite sui compatti e che sono il completamento della propria restrizione alla $\sigma-$algebra di Borel di $\mathbb{R}$.

TEOREMA 6.45. *Sia* $\mu_f\colon \mathcal{S}(f) \to [0\,,+\infty]$ *la misura positiva di Lebesgue–Stieltjes associata alla funzione di distribuzione* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Allora,*

(a) μ_f *è una misura positiva di Radon completa tale che*

$$\mu_f((a\,,b]) = f(b) - f(a), \qquad -\infty < a < b < +\infty;$$

(b) μ_f *è il completamento della sua restrizione alla* σ *–algebra di Borel* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*;*

(c) $f(x) - f(x^-) = \mu_f(\{x\})$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$*;*

(d) *se* $\nu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ *è una misura positiva di Borel tale che*

$$\nu((a,b]) = f(b) - f(a), \qquad -\infty < a < b < +\infty,$$

si ha $\nu(B) = \mu_f(B)$ *per ogni insieme di Borel* $B \subset \mathbb{R}$*;*

(e) *se* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è una funzione di distribuzione tale che*

$$\mu_f((a,b]) = g(b) - g(a), \qquad -\infty < a < b < +\infty,$$

si ha $g(x) - f(x) = c$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *per qualche* $c \in \mathbb{R}$.

Essendo la funzione di distribuzione f continua da destra, da (c) segue in particolare che ogni punto di discontinuità x della funzione di distribuzione f è un atomo della corrispondente misura di Lebegue–Stieltjes μ_f e f è continua nel punto x se e solo se risulta $\mu_f(\{x\}) = 0$. Inoltre, data una funzione di distribuzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e una misura positiva di Borel $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$, la formula

$$\mu((a,b]) = f(b) - f(a), \qquad -\infty < a < b < +\infty;$$

individua univocamente la misura positiva μ come la restrizione alla $\sigma-$algebra di Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ della misura di Lebesgue–Stieltjes associata a f e viceversa, data la misura di Lebesgue–Stieltjes μ, la funzione di distribuzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che la definisce risulta univocamente individuata a meno di una costante additiva.

Dimostrazione. (a) Sia $\lambda\colon \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ la premisura definita da $(**)$ a partire dalla funzione di distribuzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Poiché la premisura λ è $\sigma-$finita e la $\sigma-$algebra generata da $\mathcal{A}$ coincide con la $\sigma-$algebra di Borel di $\mathbb{R}$, risulta

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{S}(f)$$

per costruzione e quindi μ è una misura di Borel in $\mathbb{R}$ che è completa e che è evidentemente finita sui compatti. Inoltre, si ha per costruzione

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_k \mu(I_k) : \ E \subset \bigcup_k I_k \text{ e } I_k \in \mathcal{I}\right\}, \qquad E \in \mathcal{S}(f),$$

(Sezione 1.3) e dunque per ogni insieme $E \in \mathcal{S}(f)$ esiste un insieme di Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tale che $E \subset B$ e $\mu(E) = \mu(B)$. La conclusione segue quindi da Teorema 3.8.

(b) La misura $\mu_f\colon \mathcal{S}(f) \to [0,+\infty]$ indotta da λ e la misura indotta dalla restrizione di μ_f alla $\sigma-$algebra di Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sono evidentemente la stessa misura come si vede dalla definizione (Sezione 1.3) e quest'ultima misura è il completamento della sua restrizione alla $\sigma-$algebra di Borel (Teorema 1.49).

(c) Essendo f crescente, per Proposizione 1.22−(c) si ha

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^-) &= \lim_{n\to+\infty}[f(x) - f(x-1/n)] = \lim_{n\to+\infty}\mu_f((x-1/n,x]) = \\ &= \mu_f\left(\bigcup_n [x,x+1/n)\right) = \mu_f(\{x\}). \end{aligned}$$

(d) Essendo μ e ν misure positive, da $\mu_f((a,b]) = \nu((a,b])$ per $-\infty < a < b < +\infty$ segue $\mu_f = \nu$ su $\mathcal{A}$ e da ciò segue $\mu_f = \nu$ su $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Corollario 1.48).

(e) Sia $c = g(0) - f(0)$. Si ha allora

$$x > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) - f(0) = \mu_f((0,x]) = g(x) - g(0) \quad \Longrightarrow \quad g(x) = f(x) + c$$

e in maniera analoga si prova che lo stesso vale per $x < 0$. □

Teorema 6.46. *Sia* $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ *una misura positiva su una* $\sigma-$*algebra* $\mathcal{S}$ *di insiemi di* $\mathbb{R}$ *tale che*

- μ *è una misura di Borel finita sui compatti;*

- *per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ esistono insiemi di Borel $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $(i = 1, 2)$ tali che*
$$B_1 \subset E \subset B_2 \qquad e \qquad \mu(B_2 \setminus B_1) = 0.$$

Allora, μ è una misura di Lebesgue–Stieltjes positiva in $\mathbb{R}$.

In particolare, ogni misura positiva $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ definita sulla σ−algebra di Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ e finita sui compatti è una misura di Lebesgue–Stieltjes in $\mathbb{R}$ e ogni misura positiva di Borel $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ che sia finita sui compatti e che sia il completamento della sua restrizione alla σ−algebra di Borel di $\mathbb{R}$ è la misura positiva di Lebsgue–Stieltjes $\mu_f\colon \mathcal{S}(f) \to [0, +\infty]$ associata ad una funzione di distribuzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Essendo μ finita sui compatti, la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} -\mu((x, 0]) & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \mu((0, x]) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
risulta ben definita su $\mathbb{R}$ e dall'additività di μ segue
$$-\infty < a < b < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad f(b) - f(a) = \mu((a, b]) \geq 0.$$
La funzione f è quindi crescente e la continuità da destra di f in x segue dalla continuità della misura sulle successioni crescenti di insiemi se $x < 0$ e decrescenti con misura finita se $x > 0$ (Proposizione 1.22). Pertanto f è una funzione di distribuzione tale che
$$\mu((a, b]) = \mu_f((a, b]), \qquad -\infty < a < b < +\infty,$$
Sia quindi $\mu_f\colon \mathcal{S}(f) \to [0, +\infty]$ la misura positiva di Lebesgue–Stieltjes associata ad f. Risulta allora
$$\mu((a, b]) = f(b) - f(a), \qquad -\infty < a < b < +\infty;$$
e da ciò segue $\mu = \mu_f$ sulla σ−algebra di Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Teorema 6.45 − (d)). Infine, essendo μ_f il completamento della sua restrizione alla σ−algebra di Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Teorema 6.45 − (b)), dalla seconda delle due ipotesi relative a μ elencate nell'enunciato segue $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}(f)$ e $\mu = \mu_f$ $\mathcal{S}$ e questo completa la dimostrazione. □

Nel caso particolare della funzione identità di $\mathbb{R}$ la corrispondente misura di Lebesgue–Stieltjes coincide con la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$.

Proposizione 6.47. *Sia $\mu_{\mathrm{id}}\colon \mathcal{S}(\mathrm{id}) \to [0, +\infty]$ la misura di Lebesgue–Stieltjes associata alla funzione identità di $\mathbb{R}$. Allora, si ha $\mathcal{S}(\mathrm{id}) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e*
$$\mu_{\mathrm{id}}(E) = |E|, \qquad E \in \mathcal{S}(\mathrm{id}).$$

Dimostrazione. Tutte le misure di Lebesgue–Stieltjes sono finite sui compatti e, essendo la funzione identità di $\mathbb{R}$ additiva, la misura di Lebesgue–Stieltjes ad essa associata risulta essere invariante per traslazioni sulla σ−algebra di Borel:
$$\mu_{\mathrm{id}}(B + x_0) = \mu_{\mathrm{id}}(B), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$
Deve quindi essere $\mu_{\mathrm{id}}(B) = c|B|$ per ogni insieme di Borel B con $c = \mu_{\mathrm{id}}([0, 1)) = 1$ (Teorema 5.9) cosicché, essendo μ_{id} una misura di Radon completa (Teorema 6.45 − (b)), le restanti affermazioni della tesi seguono ancora da Teorema 5.9. □

Concludiamo questa parte segnalando che è consuetudine denotare l'integrale rispetto alla misura di Lebesgue–Stieltjes μ_f associata alla funzione di distribuzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la notazione
$$\int_B g\, df$$

per ogni funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ integrabile rispetto (alla misura di Lebesgue–Stieltjes associata) a f e per ogni insieme di Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Inoltre, se f è anche continua, l'integrale su uno qualunque degli intervalli I di estremi $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ di una funzione $g\colon I \to \mathbb{K}$ integrabile rispetto (alla misura di Lebesgue–Stieltjes associata) a f si denota come al solito con

$$\int_a^b g\,df$$

poiché per la continuità di f l'integrale è lo stesso per tutte le funzioni che coincidono su $(a\,,b)$.

Misure di Lebesgue–Stieltjes complesse. La nozione di misura positiva di Lebesgue-Stieltjes in $\mathbb{R}$ si estende in modo naturale alle misure complesse. Consideriamo a tal fine una funzione a variazione totale limitata e normalizzata $f \in NBV_0(\mathbb{R})$ e denotiamo con $u\,,v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la parte reale e la parte immaginaria di f e con

$$f = (u_+ - u_-) + i(v_+ - v_-)$$

la decomposizione di Jordan di f. Le funzioni $u_\pm$ e $v_\pm$ sono funzioni di distribuzione limitate e quindi determinano altrettante misure positive di Lebesgue–Stieltjes finite che denotiamo con

$$\mu_{u_\pm}\colon \mathcal{S}(u_\pm) \to [0\,,+\infty] \qquad \text{e} \qquad \mu_{v_\pm}\colon \mathcal{S}(v_\pm) \to [0\,,+\infty].$$

La misura complessa $\mu_f\colon \mathcal{S}(f) \to \mathbb{C}$ definita come completamento della restrizione alla $\sigma-$algebra di Borel della misura complessa

$$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \big(\mu_{u_+}(B) - \mu_{u_-}(B)\big) + i\,\big(\mu_{v_+}(B) - \mu_{v_-}(B)\big)$$

si dice *misura complessa di Lebesgue–Stieltjes indotta da f*.
Esplicitamente la $\sigma-$algebra $\mathcal{S}(f)$ è formata dagli insiemi $E \subset \mathbb{R}$ tali che

- $B_1 \subset E \subset B_2$;
- $\left|\big(\mu_{u_+} - \mu_{u_-}\big) + i\,\big(\mu_{v_+} - \mu_{v_-}\big)\right|_{\mathrm{sv}} (B_2 \setminus B_1) = 0$;

e risulta

$$\mathcal{S}'(f) = \mathcal{S}(u_+) \cap \mathcal{S}(u_-) \cap \mathcal{S}(v_+) \cap \mathcal{S}(v_-) \subset \mathcal{S}(f)$$

per Teorema 6.45 − (b). Conseguentemente la misura complessa $\mu_f\colon \mathcal{S}(f) \to \mathbb{C}$ risulta definita da

$$\mu_f(E) = \big(\mu_{u_+}(E) - \mu_{u_-}(E)\big) + i\,\big(\mu_{v_+}(E) - \mu_{v_-}(E)\big)$$

per ogni insieme $E \in \mathcal{S}'(f)$ e da

$$\mu_f(E) = \big(\mu_{u_+}(B_1) - \mu_{u_-}(B_1)\big) + i\,\big(\mu_{v_+}(B_1) - \mu_{v_-}(B_1)\big)$$

con B_1 insieme di Borel associato a E come descritto sopra se $E \in \mathcal{S}(f) \setminus \mathcal{S}'(f)$.
Più in generale ogni misura complessa $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ che sia ottenuta come restrizione ad una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ tale che $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{S}(f)$ della misura di Lebesgue–Stieltjes $\mu_f\colon \mathcal{S}(f) \to [0\,,+\infty]$ associata ad una funzione a variazione totale normalizzata f si dice anch'essa *misura complessa di Lebesgue–Stieltjes in* $\mathbb{R}$.
I risultati seguenti riassumono le principali proprietà delle misure di Lebesgue–Stieltjes complesse e individuano tali misure come le misure di Borel complesse che sono il completamento della propria restrizione alla $\sigma-$algebra di Borel di $\mathbb{R}$.

Teorema 6.48. *Sia $\mu_f\colon \mathcal{S}(f) \to \mathbb{C}$ la misura complessa di Lebesgue–Stieltjes associata a $f \in NBV_0(\mathbb{R})$. Allora,*

(a) *μ_f è una misura complessa di Radon tale che*

$$\mu_f((a\,,b]) = f(b) - f(a), \qquad -\infty < a < b < +\infty;$$

(b) *μ_f è il completamento della sua restrizione alla σ – algebra di Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$;*

(c) *$f(x) - f(x^-) = \mu_f(\{x\})$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;*

(d) *se $\nu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ è una misura complessa di Borel tale che*
$$\nu((a, b]) = f(b) - f(a), \qquad -\infty < a < b < +\infty;$$
si ha $\nu(B) = \mu_f(B)$ per ogni insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}$;

(e) *se $g \in NBV_0(\mathbb{R})$ è tale che*
$$\mu_f((a, b]) = g(b) - g(a), \qquad -\infty < a < b < +\infty,$$
si ha $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Tenendo conto che f è normalizzata per ipotesi, la formula in (a) risulta equivalente a
$$f(x) = \mu_f((-\infty, x]), \qquad x \in \mathbb{R},$$
e analoga formulazione si può dare alle uguaglianze in (d) e (e). Essendo poi f continua da destra, f risulta continua nel punto x se e solo se risulta $\mu_f(\{x\}) = 0$. Inoltre, da (b) segue che anche la variazione totale $|\mu_f|_{\mathrm{tv}}\colon \mathcal{S}(f) \to [0, +\infty]$ di μ_f è il completamento della sua restrizione alla σ – algebra di Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ e risulta in particolare
$$|\mu_f|_{\mathrm{tv}}(B) = \sup\left\{\sum_n |\mu_f(B_n)| : \ \{B_n\}_n \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ partizione numerabile di } B\right\}$$
per ogni insieme di Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Siano $\mu_{u_\pm} : \mathcal{S}(u_\pm) \to [0, +\infty]$ e $\mu_{v_\pm} : \mathcal{S}(v_\pm) \to [0, +\infty]$ le misure di Lebesgue–Stieltjes associate alla decomposizione di Jordan $(u_\pm, v_\pm)$ di f. Esse sono misure di Radon (Teorema 6.45 – (a)) e quindi tale è anche la restrizione alla σ – algebra di Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ di μ_f e conseguentemente tale risulta anche μ_f sulla σ – algebra $\mathcal{S}(f)$ per costruzione. La completezza di μ_f è inclusa nella definizione e l'uguaglianza in (a) segue dalle corrispondenti formule per $u_\pm$ e $v_\pm$. Questo prova (a) e (b) è parte della definizione stessa di μ_f.
Le restanti affermazioni seguono infine dalle corrispondenti affermazioni di Teorema 6.45. □

Teorema 6.49. *Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ una misura di Borel complessa definita su una σ – algebra $\mathcal{S}$ di insiemi tale che per ogni $E \in \mathcal{S}$ esistono insiemi di Borel $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $(i = 1, 2)$ tali che*
$$B_1 \subset E \subset B_2 \qquad e \qquad |\mu|_{\mathrm{tv}}(B_2 \setminus B_1) = 0.$$
Allora, μ è una misura di Lebesgue–Stieltjes complessa in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da
$$f(x) = \mu((-\infty, x]), \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Si ha allora
$$|f(y) - f(x)| = |\mu((x, y])| \le |\mu|_{\mathrm{tv}}((x, y]), \qquad x < y,$$
da cui segue
$$V_x^y f \le |\mu|_{\mathrm{tv}}(\mathbb{R}) < +\infty.$$
Pertanto, $f \in BV(\mathbb{R})$ e per ogni successione decrescente $\{x_n\}_n$ tale che $x_n \to -\infty$ per $n \to +\infty$ risulta
$$|f(x_n)| \le |\mu|_{\mathrm{tv}}((-\infty, x_n]) \to |\mu|_{\mathrm{tv}}\left(\bigcap_n (-\infty, x_n)\right) = 0$$

per $n \to +\infty$ (Proposizione 1.22 – (c)). Pertanto, $f(x) \to 0$ per $x \to -\infty$ e allo stesso modo per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni successione decrescente $\{x_n\}_n$ tale che $x_n \to x^+$ per $n \to +\infty$ risulta

$$0 \leq |f(x_n) - f(x)| \leq |\mu|_{\mathrm{tv}}((x, x_n]) \to \bigcap_n |\mu|_{\mathrm{tv}} \left(\bigcap_n (-\infty, x_n)\right) = 0$$

per $n \to +\infty$. Pertanto, $f \in NBV_0(\mathbb{R})$ e, denotata con $\mu_f \colon \mathcal{S}(f) \to \mathbb{C}$ la misura di Lebesgue–Stieltjes associata ad f, si ha

$$\mu((x, y]) = f(y) - f(x) = \mu_f((x, y]), \qquad x < y,$$

da cui segue $\mu(B) = \mu_f(B)$ per ogni insieme di Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Teorema 6.48 – (d)). Dall'ipotesi fatta su $\mathcal{S}$ e μ segue $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}(f)$ e $\mu = \mu_f$ su $\mathcal{S}$ per la definizione stessa di μ_f. □

Se $f \in NBV_0(\mathbb{R})$ è una funzione a variazione totale limitata e normalizzata, la sua variazione totale $Vf \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ risulta essere una funzione di distribuzione limitata e tale che

$$\lim_{x \to -\infty} Vf(x) = 0$$

cosicché alla variazione totale Vf di f risulta associata la misura positiva di Lebesgue–Stieltjes $\nu \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$. Concludiamo questa parte esaminando la relazione che sussiste tra la variazione totale della misura di Lebesgue–Stieltjes complessa associata ad f e la misura positiva di Lebesgue–Stieltjes associata alla variazione totale Vf di f.

TEOREMA 6.50. *Sia $f \in NBV_0(\mathbb{R})$ e siano*

- *$\mu_f \colon \mathcal{S}(f) \to \mathbb{C}$ la misura di Lebesgue–Stieltjes complessa associata a f;*
- *$\mu_{Vf} \colon \mathcal{S}(Vf) \to [0, +\infty]$ la misura positiva di Lebesgue–Stieltjes associata alla variazione totale Vf di f.*

Allora, si ha $\mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(Vf)$ e

$$\mu_{Vf}(E) = |\mu_f|_{\mathrm{tv}}(E), \qquad E \in \mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(Vf).$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente provare che risulta

$$\mu_{Vf}(B) = |\mu_f|_{\mathrm{tv}}(B), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

poiché entrambe le misure $|\mu_f|_{\mathrm{tv}}$ e μ_{Vf} sono il completamento della propria restrizione alla σ – algebra di Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Si ha

$$V_x^y f = Vf(y) - Vf(x) = \mu_{Vf}((x, y]), \qquad x < y,$$

e quindi per ogni suddivisione $x = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = y$ risulta

$$\sum_{1 \leq m \leq n} |f(x_m) - f(x_{m-1})| = \sum_{1 \leq m \leq n} |\mu_f((x_{m-1}, x_m])| \leq |\mu_f|_{\mathrm{tv}}((x, y])$$

da cui segue

$$\mu_{Vf}((x, y]) = V_x^y f \leq |\mu_f|_{\mathrm{tv}}((x, y]), \qquad x < y.$$

Essendo ogni aperto U di $\mathbb{R}$ unione di una famiglia numerabile di intervalli semiaperti $(x, y]$ disgiunti[6], risulta

$$\mu_{Vf}(U) \leq |\mu_f|_{\mathrm{tv}}(U)$$

per ogni insieme aperto U di $\mathbb{R}$. Proviamo che la stessa disuguaglianza vale per ogni insieme di Borel. Sia $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ fissato. Per ogni insieme aperto U di $\mathbb{R}$ tale che $B \subset U$ si ha

$$\mu_{Vf}(B) \leq \mu_{Vf}(U) \leq |\mu_f|_{\mathrm{tv}}(U)$$

[6] Ciò segue ad esempio da Lemma 5.10 con ovvie modifiche.

e da ciò segue

$$\mu_{Vf}(B) \le |\mu_f|_{\rm tv}(B)$$

poiché $|\mu_f|_{\rm tv}$ è una misura di Radon (Teorema 6.48 – (a)). Viceversa, si ha

$$|\mu_f((x\,,y])| = |f(y) - f(x)| \le V_x^y f = \mu_{Vf}((x\,,y]), \qquad x < y,$$

e quindi, essendo ogni aperto U di $\mathbb{R}$ unione di una famiglia numerabile di intervalli semiaperti $(x\,,y]$ disgiunti, risulta

$$|\mu_f(U)| \le \mu_{Vf}(U)$$

per ogni insieme aperto U di $\mathbb{R}$. Proviamo che la stessa disuguaglianza vale per ogni insieme di Borel. Fissato $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, per ogni insieme aperto U di $\mathbb{R}$ tale che $B \subset U$ si ha

$$|\mu_f(B)| = |\mu_f(U) - \mu_f(U \setminus B)| \le |\mu_f(U)| + |\mu_f(U \setminus B)| \le \mu_{Vf}(U) + |\mu_f|_{\rm tv}(U \setminus B)$$

cosicché, passando all'estremo inferiore al variare di U, risulta

$$|\mu_f(B)| \le \mu_{Vf}(B)$$

poiché μ_{Vf} e $|\mu_f|_{\rm tv}$ è sono misure di Radon (Teoremi 6.45 – (a) e 6.48 – (a)). Per quanto osservato all'inizio risulta quindi

$$|\mu_f|_{\rm tv}(B) \le \mu_{Vf}(B), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Abbiamo così provato che μ_{Vf} e $|\mu_f|_{\rm tv}$ coincidono sulla σ – algebra di Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ e poiché sono entrambe il completamento della propria restrizione alla σ – algebra di Borel □

Corollario 6.51. *Sia $\mu\colon \mathcal{S}(f) \to \mathbb{C}$ la misura di Lebesgue–Stieltjes complessa associata a $f \in NBV_0(\mathbb{R})$. Allora,*

$$Vf(x) = |\mu_f|_{\rm tv}((-\infty\,,x]), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Concludiamo questa parte osservando che anche per gli integrali di funzioni rispetto a misure di Lebesgue–Stieljes complesse valgono le stesse considerazioni e si usano le stesse notazioni già svolte ed illustrate per le misure di Lebesgue–Stilejes positive: l'integrale rispetto alla misura di Lebesgue–Stieltjes μ_f associata alla funzione di distribuzione $f \in NBV_0(\mathbb{R})$ si denota con

$$\int_B g\, df$$

per ogni funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ integrabile rispetto (alla misura di Lebesgue–Stieltjes associata) a f e per ogni insieme di Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ed inoltre, se f è anche continua, l'integrale su uno qualunque degli intervalli I di estremi $-\infty \le a < b \le +\infty$ di una funzione $g\colon I \to \mathbb{K}$ integrabile rispetto (alla misura di Lebesgue–Stieltjes associata) a f si denota come al solito con

$$\int_a^b g\, df$$

poiché per la continuità di f l'integrale è lo stesso per tutte le funzioni che coincidono su $(a\,,b)$.

Struttura delle funzioni a variazione limitata. Ogni funzione crescente, continua da destra e limitata inferiormente $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si decompone canonicamente nella somma di due funzioni dello stesso tipo

$$f = f_{\rm ac} + f_{\rm s}$$

dove $f_{\rm ac}$ è una funzione assolutamente continua e $f_{\rm s}$ è una funzione singolare. Inoltre, la parte singolare $f_{\rm s}$ (se non nulla) si decompone a sua volta nella somma di due funzioni dello stesso tipo

$$f_{\rm s} = f_{\rm cv} + f_{\rm j}$$

dove f_{cv} è una funzione di tipo Cantor–Vitali mentre f_{j} è una funzione singolare di puro salto – nel senso che vedremo tra breve – la quale tiene conto delle eventuali discontinuità di f.
Questa decomposizione si estende alla funzioni complesse a variazione limitatata ed ha una controparte anche per le misure.
I risultati di questa parte si estendono senza modifiche al caso di funzioni crescenti definite su un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e con limitate modifiche di natura formale al caso di funzioni crescenti definite su intevalli non aperti.
In accordo con la terminologia già introdotta a proposito delle funzioni a variazione limitata, una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

- f è continua da destra in ogni punto $x \in \mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$;

si dice funzione *normalizzata in* $\mathbb{R}$. Per le funzioni crescenti e normalizzate la disuguaglianza di Teorema 6.4 – (b) assume la forma seguente.

LEMMA 6.52. *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente e normalizzata. Allora,*

$$0 \le \int_{-\infty}^{x} f' + \sum_{\substack{y\in D(f)\\ y\le x}} [f(y^+) - f(y^-)] \le f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La derivata[7] f' è quindi integrabile nell'intervallo $(-\infty, x]$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è in particolare integrabile in tutto $\mathbb{R}$ se f è limitata.

DIMOSTRAZIONE. Siano $a, x \in \mathbb{R}$ con $a < x$ fissati. Essendo f crescente, continua da destra e non negativa, risulta

$$0 \le \int_{a}^{x} f' + \sum_{y\in D(f)\cap[a,x]} [f(y^+) - f(y^-)] \le f(x) - f(a^-) \le f(x)$$

(Teorema 6.4 – (b)) da cui, facendo tendere $a \to -\infty$, segue l'asserto. □

TEOREMA 6.53. *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente e normalizzata. Allora, esiste una ed una sola funzione $f_{\mathrm{s}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente, normalizzata e singolare tale che*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f' + f_{\mathrm{s}}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La funzione integrale

$$f_{\mathrm{ac}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f', \qquad x \in \mathbb{R},$$

si dice *parte assolutamente continua di f*. Se f è limitata in $\mathbb{R}$, essa è effettivamente assolutamente continua in I altrimenti è tale solo su ogni intervallo limitato superiormente $(-\infty, x]$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.
La funzione singolare f_{s} si dice a sua volta *parte singolare di f* ed è chiaro che risulta

$$D(f_{\mathrm{s}}) = D(f) \qquad \text{e} \qquad f_{\mathrm{s}}(x^+) - f_{\mathrm{s}}(x^-) = f(x^+) - f(x^-)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE. La funzione

$$f_{\mathrm{s}}(x) = f(x) - \int_{\alpha}^{x} f', \qquad x \in \mathbb{R},$$

[7] Qui, come al solito, denotiamo con f' la funzione definita da $f'(x)$ stessa nei punti x in cui f è derivabile e da $f'(x) = 0$ (ad esempio) negli altri.

è non negativa per il lemma precedente, oltre ad essere evidentemente normalizzata e singolare. Resta quindi da provarne la monotonia. Per $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ e per ogni $h > 0$ tale che $x + h < y$ si ha

$$0 \leq [f(y^+) - f((x+h)^-)] - \int_{x+h}^{y} f' \leq [f(y) - f(x)] - \int_{x+h}^{y} f'$$

(Teorema 6.4 – (b)) e quindi, facendo tendere $h \to 0^+$, risulta

$$f_{\mathrm{s}}(y) - f_{\mathrm{s}}(x) = [f(y) - f(x)] - \int_{x}^{y} f' \geq 0.$$

Infine, l'unicità di f_{s} è ovvia e questo completa la dimostrazione. □

Per procedere ulteriormente con la scomposizione della parte singolare, introduciamo la nozione di funzione crescente di puro salto.
Sia $S \subset \mathbb{R}$ un insieme al più numerabile di $\mathbb{R}$ e per ogni $s \in S$ siano $a_s > 0$ numeri positivi tali che

$$(***) \qquad \sum_{s \in S:\ s \leq x} a_s < +\infty, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sum_{s \in S:\ s \leq x} a_s, \qquad x \in \mathbb{R},$$

si dice *funzione di puro salto*[8]. Ogni punto $s \in S$ è un punto di salto di f ed il corrispondente numero positivo a_s è il *salto di f in s*. Nel seguito scriveremo brevemente

$$f(x) = \sum_{s \leq x} a_s, \qquad x \in \mathbb{R},$$

omettendo l'esplicita indicazione dell'insieme di salto ogniqualvolta esso sia chiaro dal contesto.
La proposizione seguente evidenzia le proprietà delle funzioni di puro salto.

PROPOSIZIONE 6.54. *Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di puro salto e siano $S \subset \mathbb{R}$ l'insieme dei punti di salto di f e $\{a_s :\ s \in S\}$ l'insieme dei relativi salti. Allora,*

(a) *f è crescente in $\mathbb{R}$;*

(b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$*;*

(c) *per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha*

$$f(x^-) = \begin{cases} f(s) - a_s & \text{se } x = s \in S; \\ f(x) & \text{se } x \notin S \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f(x^+) = f(x)$$

(d) *$f' = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}$.*

Ogni funzione crescente di puro salto è quindi normalizzata e singolare. L'insieme dei punti di discontinuità $D(f)$ coincide con l'insieme S dei punti di salto di f e per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$f(x^+) - f(x^-) = \begin{cases} a_s & \text{se } x = s \in S \\ 0 & \text{se } x \notin S. \end{cases}$$

---

[8] Se S è l'insieme vuoto, la funzione f risultante è identicamente nulla e si dice funzione di puro salto banale.

Dimostrazione. Sia $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ la misura positiva definita sugli insiemi di $\mathbb{R}$ da

$$\mu(A) = \sum_{s \in A\cap S} a_s, \qquad A \subset \mathbb{R},$$

(Esempio 1.21 – (a)) cosicché risulta

$$f(x) = \mu((-\infty, x]), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Da $a_s > 0$ per ogni $s \in S$ segue che f è crescente in $\mathbb{R}$.

(b) Siano $x_n \in \mathbb{R}$ ($n \geq 1$) gli elementi di una successione tale che $x_{n+1} < x_n$ per ogni n e $x_n \to -\infty$ per $n \to +\infty$. Da ($***$) con $x = x_1$ segue allora

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu((-\infty, x_n]) = 0$$

per Proposizione 1.22 – (c).

(c) Sia $x \in \mathbb{R}$ e siano $x_n \in \mathbb{R}$ ($n \geq 1$) gli elementi di una successione tale che $x_n < x_{n+1}$ per ogni n e $x_n \to x$ per $n \to +\infty$. Si ha allora come prima

$$f(x^-) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu((-\infty, x_n]) = \mu((-\infty, x)) = \mu((-\infty, x]) - \mu(\{x\})$$

(Proposizione 1.22 – (b)) e risulta $f(x^-) = f(x)$ se $x \notin S$ e $f(x^+) = f(x) - a_s$ se $x = s \in S$.

(d) Sia $S = \{s_n\}_n$ un'enumerazione dell'insieme dei punti di salto S. Posto per brevità $a_n = a_{s_n}$ per ogni n, ciascuna funzione

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < s_n \\ a_n & \text{se } x \geq s_n \end{cases}$$

risulta crescente e normalizzata con derivata nulla in ogni punto di $\mathbb{R}\setminus\{s_n\}$. Essendo

$$f(x) = \sum_n f_n(x), \qquad x \in I,$$

la conclusione segue dal teorema di derivazione di Fubini (Teorema 6.9). □

Sia ora $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente e normalizzata e sia $f_{\mathrm{s}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua parte singolare. L'insieme $D(f) = D(f_{\mathrm{s}})$ dei punti di discontinuità di entrambe è un insieme al più numerabile di punti di $\mathbb{R}$ e, posto $a_x = f(x^+) - f(x^-) > 0$ per ogni $x \in D(f)$, vale la disuguaglianza di Lemma 6.52. La funzione $f_{\mathrm{j}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_{\mathrm{j}}(x) = \sum_{\substack{y\in D(f)\\ y\leq x}} [f(y^+) - f(y^-)], \qquad x \in \mathbb{R},$$

è quindi una funzione crescente di puro salto in $\mathbb{R}$ e come tale normalizzata e singolare. Si ha in particolare

$$(****)\qquad \begin{aligned} f_{\mathrm{j}}(x^+) - f_{\mathrm{j}}(x^-) &= \sum_{\substack{y\in D(f)\\ y\leq x}} [f(y^+) - f(y^-)] - \sum_{\substack{y\in D(f)\\ y< x}} [f(y^+) - f(y^-)] = \\ &= f(x^+) - f(x^-) \end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione f_{j} così associata a f o equivalentemente alla sua parte singolare f_{s} si dice *parte di salto di f*.

Proviamo infine che la parte singolare di una funzione crescente e normalizzata è in effetti la somma di una parte di puro salto e di una parte di tipo Cantor–Vitali.

PROPOSIZIONE 6.55. *Sia* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione crescente e normalizzata e sia* $f_{\mathrm{s}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la sua parte singolare. Allora, la funzione*

$$f_{\mathrm{cv}}(x) = f_{\mathrm{s}}(x) - f_{\mathrm{j}}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

è crescente, normalizzata e di tipo Cantor–Vitali in $\mathbb{R}$*.*

La funzione f_{cv} così associata a f ovvero alla sua parte singolare f_{s} si dice *parte di Cantor–Vitali di* f.

DIMOSTRAZIONE. Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1 < x_2$. Si ha allora

$$f_{\mathrm{cv}}(x_2) - f_{\mathrm{cv}}(x_1) = [f(x_2) - f(x_1)] - \left(\int_{x_1}^{x_2} f' + \sum_{x_1 < y \leq x_2} [f(y^+) - f(y^-)] \right),$$

essendo la serie a destra estesa ai soli $y \in D(f)$. Essendo f normalizzata, sostituendo

$$f(x_2) = f(x_2^+) \qquad \text{e} \qquad f(x_1) = [f(x_1^+) - f(x_1^-)] + f(x_1^-)$$

nell'uguaglianza precedente, si ottiene

$$f_{\mathrm{cv}}(x_2) - f_{\mathrm{cv}}(x_1) = [f(x_2^+) - f(x_1^-)] - \left(\int_{x_1}^{x_2} f' + \sum_{x_1 \leq y \leq x_2} [f(y^+) - f(y^-)] \right).$$

La quantità a destra è non negativa (Teorema 6.4 – (b)) e quindi f è crescente in $\mathbb{R}$. Inoltre, f_{cv} è normalizzata e singolare perché differenza di funzioni dello stesso tipo ed infine la continuità di f_{cv} è conseguenza di (∗∗∗∗). □

Possiamo riassumere i risultati di questa discussione nel seguente teorema di struttura per le funzioni monotòne definite su $\mathbb{R}$.

TEOREMA 6.56. *Sia* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione crescente e normalizzata. Allora, esiste una funzione di distribuzione normalizzata di tipo Cantor–Vitali* $f_{\mathrm{cv}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f' + f_{\mathrm{cv}}(x) + \sum_{\substack{y \in D(f) \\ y \leq x}} [f(y^+) - f(y^-)], \qquad x \in \mathbb{R},$$

e tale scomposizione è unica.

La funzione integrale e la serie che compaiono nella scomposizione di f sono rispettivamente la parte assolutamente continua f_{ac} di f e la parte di salto f_{j} di f mentre f_{cv} è la parte di Cantor–Vitali di f. Se f è limitata, le funzioni f_{ac}, f_{cv} e f_{j} risultano a loro volta limitate e la parte assolutamente continua f_{ac} risulta essere assolutamente continua in $\mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia f come nella tesi e supponiamo che f si rappresenti anche nella forma

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} g + g_{\mathrm{cv}}(x) + g_{\mathrm{j}}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

con $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione integrabile in $(-\infty, x]$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $g_{\mathrm{cv}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione crescente, normalizzata e di tipo Cantor–Vitali e $g_{\mathrm{j}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione crescente e normalizzata di puro salto. Derivando si ricava che deve essere $g = f'$ quasi ovunque in $\mathbb{R}$ cosicché risulta

$$f_{\mathrm{cv}}(x) - g_{\mathrm{cv}}(x) = g_{\mathrm{j}}(x) - f_{\mathrm{j}}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Essendo la funzione $g_{\mathrm{j}} - f_{\mathrm{j}}$ continua in $\mathbb{R}$, f_{j} e g_{j} devono avere gli stessi insiemi di salti e gli stessi salti (Proposizione 6.54). Risulta quindi $g_{\mathrm{j}} = f_{\mathrm{j}}$ da cui segue $g_{\mathrm{cv}} = f_{\mathrm{cv}}$ e questo completa la dimostrazione. □

I risultati precedenti si estendono immediatamente alle funzioni a variazione limitata normalizzate.

Teorema 6.57. *Sia $f \in NBV_0(\mathbb{R})$ una funzione a variazione limitata e normalizzata. Allora, esiste $f_{\mathrm{cv}} \in NBV_0(\mathbb{R})$ funzione a variazione limitata, normalizzata e di tipo Cantor–Vitali in I tale che*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f' + f_{\mathrm{cv}}(x) + \sum_{\substack{y \in D(f) \\ y \le x}} [f(y^+) - f(y^-)], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Come nel caso delle funzioni monotòne, la funzione integrale

$$f_{\mathrm{ac}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f', \qquad x \in \mathbb{R},$$

è la parte assolutamente continua di f, la funzione f_{cv} è la parte di Cantor–Vitali di f e la restante funzione

$$f_{\mathrm{j}}(x) = \sum_{\substack{y \in D(f) \\ y \le x}} [f(y^+) - f(y^-)], \qquad x \in \mathbb{R},$$

è la parte di salto di f. La somma $f_{\mathrm{s}} = f_{\mathrm{cv}} + f_{\mathrm{j}}$ costituisce la parte singolare di f e le proprietà della parte di Cantor–Vitali f_{cv} e della parte di salto f_{j} di f sono, a meno delle considerazioni sui segni, le stesse già viste per le funzioni crescenti e limitate.

Struttura delle funzioni BV e decomposizione di misure. I risultati del paragrafo precedente sulla struttura delle funzioni variazione limitata (Teorema 6.57) possono essere ricavati anche dai risultati sulle misure di Capitolo 1 e Capitolo 4. Illustriamo in questa parte questo approccio considerando dapprima come al solito il caso delle funzioni di distribuzione.

Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di distribuzione normalizzata e quindi in particolare tale che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

e sia $\mu \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ la restrizione alla $\sigma-$algebra di Borel della misura di Lebesgue–Stieltjes associata ad f cosicché risulta

$$f(x) = \mu((-\infty, x]), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Sia quindi

$$\mu = \mu_{\mathrm{ac}} + \mu_{\mathrm{s}}$$

la decomposizione di Lebesgue di μ rispetto alla (restrizione alla $\sigma-$algebra di Borel della) misura di Lebesgue $\mathcal{L}^1 \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ cosicché risulta

$$\mathcal{N}(\mathcal{L}^1) \subset \mathcal{N}(\mu_{\mathrm{ac}}) \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \mu_{\mathrm{s}} \perp \mathcal{L}^1 \\ \mu_{\mathrm{ac}} \perp \mu_{\mathrm{s}} \end{cases}$$

(Teorema 4.24) e siano $f_{\mathrm{ac}}, f_{\mathrm{s}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni crescenti e non negative definite da

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{ac}}(x) &= \mu_{\mathrm{ac}}((-\infty, x]) \\ f_{\mathrm{s}}(x) &= \mu_{\mathrm{s}}((-\infty, x]) \end{aligned} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Proviamo quindi che risulta

$$f_{\mathrm{ac}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f', \qquad x \in \mathbb{R},$$

e che la funzione f_s è una funzione di distribuzione normalizzata e singolare. Risulta pertanto

$$f(x) = \mu((-\infty\,, x]) = \int_{-\infty}^{x} f' + f_s(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

in accordo con Teorema 6.53 con f_{ac} e f_s parte assolutamente continua[9] e parte singolare di f rispettivamente.
La dimostrazione di queste affermazioni è basata sul risultato seguente[10].

Lemma 6.58. *Sia $\nu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ una misura di Borel finita sui compatti tale che $\nu \perp \mathcal{L}^1$. Allora,*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\nu((x\,, x+h])}{h} = 0 \qquad \text{per } \mathcal{L}^1\text{– q.o. } x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Sia $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ un insieme di Borel tale che $\nu(B) = 0$ e $|\mathbb{R} \setminus B| = 0$. Poniamo

$$B_k = \left\{ x \in B:\ \limsup_{h\to 0^+} \frac{\nu((x\,, x+h])}{h} > 1/k \right\}, \qquad k \geq 1,$$

e proviamo che ogni insieme B_k è Lebesgue misurabile con $|B_k| = 0$.
Sia $k \geq 1$ fissato. Dato $\varepsilon > 0$, sia V_ε un insieme aperto tale che $B \subset V_\varepsilon$ e $\nu(V_\varepsilon) < \varepsilon/k$ (Corollario 3.9). Per ogni $x \in B_k$ esistono allora $h_{x,n} > 0$ $(n \geq 1)$ tali che

- $[x\,, x + h_{x,n}] \subset V_\varepsilon$ per ogni n;
- $\nu((x\,, x + h_{x,n}]) > h_{x,n}/k$ per ogni n;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h_{x,n} = 0^+$.

La famiglia di intervalli

$$\mathcal{I} = \big\{ [x\,, x + h_{x,n}] :\ n \geq 1 \text{ e } x \in B_k \big\}$$

così definita è un ricoprimento di Vitali di B_k. Esistono quindi $[x_j\,, x_j + h_j]$ $(j \geq 1)$ intervalli disgiunti di $\mathcal{I}$ tali che

$$\Big| B_k \setminus \Big(\bigcup\nolimits_j [x_j\,, x_j + h_j] \Big) \Big| = 0.$$

Si ha allora

$$|B_k|_* \leq \Big| B_k \cap \Big(\bigcup\nolimits_j [x_j\,, x_j + h_j] \Big) \Big|_* \leq \sum_j h_j \leq k \sum_j \nu((x_j\,, x_j + h_j]) \leq k\nu(V_\varepsilon) = \varepsilon$$

e dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue l'asserto. $\square$

Per il teorema di Radon–Nikodym (Teorema 4.20), la parte assolutamente continua μ_{ac} di μ si rappresenta come integrale indefinito

$$\mu_{ac}(B) = \int_B g, \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

di un'opportuna funzione Borel misurabile $g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ tale che

$$0 \leq \int_{-\infty}^{x} g < +\infty$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha allora

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\mu((x\,, x+h])}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g + \frac{\mu_s((x\,, x+h])}{h}$$

[9] Se f è limitata, la parte assolutamente continua f_{ac} è effettivamente tale in tutto $\mathbb{R}$ altrimenti è tale solo su ogni intervallo superiormente limitato.

[10] È questo un caso particolare del successivo Corollario ??.

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $h > 0$ cosicché, passando al limite per $h \to 0^+$, risulta

$$g(x) = f'(x) \qquad \text{per } \mathcal{L}^1\text{– q.o. } x \in \mathbb{R}$$

in conseguenza di Teorema 6.4, di Teorema 6.20 e di Lemma 6.58.
Consideriamo quindi la funzione f_{s}. Essa è evidentemente crescente ed è anche normalizzata poiché risulta

$$\begin{aligned}\lim_{y\to x^+} f_{\mathrm{s}}(y) = \lim_{n\to+\infty} f_{\mathrm{s}}(x+1/n) = \lim_{n\to+\infty} \mu_{\mathrm{s}}((-\infty\,, x+1/n]) = \\ = \mu\left(\bigcap_n \left(-\infty\,, x+\frac{1}{n}\right]\right) = \mu_{\mathrm{s}}((-\infty\,,x]) = f_{\mathrm{s}}(x)\end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f_{\mathrm{s}}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_{\mathrm{s}}(-n) = \lim_{n\to+\infty} \mu_{\mathrm{s}}((-\infty\,,-n]) = \\ = \mu_{\mathrm{s}}\left(\bigcap_n (-\infty\,,-n]\right) = \mu_{\mathrm{s}}(\varnothing) = 0\end{aligned}$$

per Proposizione 1.22 – (c), essendo la misura μ_{s} finita sugli insiemi superiormente limitati. Risulta infine

$$0 \le (f_{\mathrm{s}})'(x) = \lim_{h\to0^+} \frac{f_{\mathrm{s}}(x+h) - f_{\mathrm{s}}(x)}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{\mu_{\mathrm{s}}((x\,,x+h])}{h} = 0$$

per $\mathcal{L}^1$– q.o. $x \in \mathbb{R}$ in conseguenza di Teorema 6.4 e di Lemma 6.58. Pertanto f_{s} è una funzione singolare e questo completa la dimostrazione della scomposizione di f in parte assolutamente continua e parte singolare. L'unicità della scomposizione si prova come in Teorema 6.53
Avendo scomposto f nella sua parte assolutamente continua e nella sua parte singolare, resta ora da procedere alla scomposizione della parte singolare f_{s} nella somma di una funzione singolare di tipo Cantor–Vitali e di una funzione di puro salto. Consideriamo a tal fine la decomposizione

$$\mu_{\mathrm{s}} = \mu_{\mathrm{cv}} + \mu_{\mathrm{j}}$$

della parte singolare μ_{s} nella sua parte continua e nella sua parte (puramente) atomica (Teorema 1.35) che denotiamo con μ_{cv} e μ_{j} rispettivamente e proviamo che le funzioni $f_{\mathrm{cv}}, f_{\mathrm{j}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{cv}}(x) &= \mu_{\mathrm{cv}}((-\infty\,,x]) \\ f_{\mathrm{j}}(x) &= \mu_{\mathrm{j}}((-\infty\,,x]) \end{aligned} \qquad x \in \mathbb{R},$$

sono due funzioni di distribuzione normalizzate di tipo Cantor–Vitali e di puro salto ripettivamente e che la funzione di distribuzione di puro salto f_{j} risulta essere

$$(*{*}*{*}*) \qquad f_{\mathrm{j}}(x) = \sum_{\substack{y\in D(f)\\ y\le x}} [f(y^+) - f(y^-)], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Risulta pertanto

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f' + f_{\mathrm{cv}}(x) + \sum_{\substack{y\in D(f)\\ y\le x}} [f(y^+) - f(y^-)]$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ in accordo con Teorema 6.56 ed il corrispondente risultato per le funzioni a variazione limitata normalizzate (Teorema 6.57) segue come al solito dalla decomposizione di Jordan di f.

Le funzioni f_{cv} e f_{j} sono crescenti e con le stesse considerazioni già svolte per la parte singolare f_{s} si prova che sono normalizzate. Si ha inoltre

$$0 \leq (f_{\mathrm{cv}})'(x) + (f_{\mathrm{j}})'(x) = (f_{\mathrm{s}})'(x) = 0$$

per $\mathcal{L}^1$– q.o. $x \in \mathbb{R}$ e quindi entrambe le funzioni f_{cv} e f_{j} sono singolari. Resta solo da provare che f_{cv} è continua e quindi di tipo Cantor–Vitali e che f_{j} è la funzione di puro salto definita da $(*****)$.

Consideriamo dapprima la funzione f_{cv}. Essendo f_{cv} normalizzata, essa è continua in x se e solo se risulta $f_{\mathrm{cv}}(x^-) = f_{\mathrm{cv}}(x)$. Essendo f_{cv} crescente e μ_{cv} finita sui compatti, si ha

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{cv}}(x^-) = \lim_{n\to+\infty} f_{\mathrm{cv}}(x-1/n) &= \lim_{n\to+\infty} \mu_{\mathrm{cv}}((-\infty\,, x-1/n]) = \\ &= \mu_{\mathrm{cv}}((-\infty\,, x]) - \mu_{\mathrm{cv}}(\{x\}) = f_{\mathrm{cv}}(x) - \mu_{\mathrm{cv}}(\{x\}) \end{aligned}$$

e queto prova la continuità di f_{cv} poiché risulta $\mu_{\mathrm{cv}}(\{x\}) = 0$ per ogni x essendo μ_{cv} priva di atomi.

Infine, la dimostrazione di $(*****)$ è conseguenza del lemma seguente.

LEMMA 6.59. *Sia $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ un insieme di Borel. Allora, le seguenti affermzioni sono equivalenti:*

(a) *A è un μ_{s}– atomo;*

(b) *$A \cap D(f) = \{x\}$ e $\mu_{\mathrm{s}}(A) = \mu_{\mathrm{s}}(\{x\}) > 0$;*

e in tal caso risulta

$$\mu_{\mathrm{s}}(\{x\}) = f(x^+) - f(x^-), \qquad x \in D(f).$$

Dal lemma segue infatti che risulta

$$\mu_{\mathrm{j}}(B) = \sum_{y\in B\cap D(f)} \mu_{\mathrm{s}}(\{y\}) = \sum_{y\in B\cap D(f)} [f(y^+) - f(y^-)]$$

per ogni insieme di Borel $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ da cui segue $(*****)$ per $B = (-\infty\,, x]$.

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente provare che (a) implica (b) poiché l'implicazione opposta è ovvia.

(a) Sia A un μ_{s}–atomo. Essendo μ_{s} una misura positiva σ–finita, deve essere $0 < \mu_{\mathrm{s}}(A) < +\infty$ e per lo stesso motivo possiamo supporre che A sia limitato. Sia quindi (a_0, b_0) un intervallo tale che $A \subset [a_0, b_0)$. Posto $c_0 = (a_0 + b_0)/2$, deve essere

$$\mu_{\mathrm{s}}(A \cap [a_0\,, c_0)) = \mu_{\mathrm{s}}(A) \qquad \text{oppure} \qquad \mu_{\mathrm{s}}(A \cap [c_0\,, b_0)) = \mu_{\mathrm{s}}(A).$$

Sia $[a_1\,, b_1)$ quello tra i due sottointervalli $[a_0\,, c_0)$ e $[c_0\,, b_0)$ per il quale risulta

$$\mu_{\mathrm{s}}(A \cap [a_1\,, b_1)) = \mu_{\mathrm{s}}(A).$$

Iterando questo argomento si determina una successione decrescente di intervalli $[a_n\,, b_n)$ $(n \geq 0)$ la cui lunghezza tende a zero tali che

$$\mu_{\mathrm{s}}(A \cap [a_n\,, b_n)) = \mu_{\mathrm{s}}(A)$$

per ogni n. Si ha allora

$$\mu_{\mathrm{s}}\left(\bigcap_n A \cap [a_n\,, b_n)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu_{\mathrm{s}}(A \cap [a_n\,, b_n)) = \mu_{\mathrm{s}}(A) > 0$$

da cui segue $\bigcap_n A \cap [a_n\,, b_n) = \{x\}$. Risulta quindi $\mu_{\mathrm{s}}(\{x\}) = \mu_{\mathrm{s}}(A) > 0$ con

$$f(x^+) - f(x^-) = \mu(\{x\}) = \mu_{\mathrm{s}}(\{x\}) > 0$$

(Teorema 6.45 – (c)) da cui segue $x \in D(f)$. $\square$

Esercizi

6.1. Per $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ fissati, costruite un insieme misurabile $E = E_{\alpha,\beta}$ contenuto nell'intervallo $[-1, 1]$ tale che risulti

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{\big|E \cap [-h, h]\big|}{2h} = \alpha \qquad \text{e} \qquad \beta = \limsup_{h\to 0^+} \frac{\big|E \cap [-h, h]\big|}{2h}.$$

6.2. Costruite una funzione integrabile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f = 0 \qquad \text{e} \qquad \nexists \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f|.$$

Il punto $x = 0$ non è punto di Lebesgue di f anche se esiste il limite delle medie di f attorno a x.

6.3. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di distribuzione tale che $f \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ e sia $df\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ la relativa misura positiva di Lebesgue–Stieltjes. Provate che per ogni funzione di Borel $g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ risulta

$$\int_{\mathbb{R}} g\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} g f'.$$

6.4. Siano $f, g \in NBV(\mathbb{R})$ due funzioni a variazione totale limitata, continue e normalizzate e siano $df, dg\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ le relative misure di Lebesgue–Stieltjes complesse. Provate che vale la seguente formula di integrazione per parti

$$\int_a^b f\, dg + \int_a^b g\, df = f(b)g(b) - f(a)g(a), \qquad -\infty < a < b < +\infty.$$

Note e commenti

Capitolo 1.
Bla, bla, bla ...

Costruzione di misure. La nozione di misura esterna e la descrizione del metodo di Carathéodory è in [5].

Atomi e misure continue. La possibilità di decomporre uno spazio con misura finita in atomi e insiemi di misura piccola (Teorema 1.31) è dovuta a S. Saks ([]) mentre la caratterizzazione delle misure continue in termini di connessione dell'immagine è dovuta a W. Sierpiński [18]. I risultati di questa parte si estendono alle misure *decomponibili* o *localizzabili* (Teorema 19.27 in [9]).

Capitolo 2.
Bla, bla, bla ...

Misura prodotto. Bla, bla, bla ...

Capitolo 3.
Bla, bla, bla ...
L'esempio di Esercizio 3.1 è adattato da [6] (Sezione 13).

Capitolo 4.
Bla, bla, bla ...

Teorema di Radon–Nikodym. Oltre l'ambito delle misure σ finite, il teorema di Radon–Nikodym continua a valere nel contesto di misure $\mu \ll \lambda$ con μ misura arbitraria e λ misura decomponibile (Teorema 19.27 in [9]).
Bla, bla, bla ...

Capitolo 5.
Bla, bla, bla ...
La costruzione di un insieme non misurabile secondo Lebesgue è dovuta a G. Vitali ([24]) ed utilizza in modo essenziale l'assioma della scelta. È naturale chiedersi se esso sia equivalente all'esistenza di insiemi non misurabili. Come spesso accade per questo genere di questioni, la risposta è meno limpida di quanto sarebbe auspicabile e prende la forma di un "sì, ma in un certo senso". Rinviamo a [19] per la discussione di questo legame con l'avvertenza che tale dicussione richiede strumenti sofisticati che esulano completamente dagli obiettivi di queste note.
L'insieme del quadrato di lato $[0,1]$ avente sezioni ... (Esercizio 5.20) è dovuto a Sierpiński.

Capitolo 6.
Bla, bla, bla ...

Funzioni continue non derivabili in alcun punto. La funzione di Takagi–van der Waerden ha una lunga storia di scoperte e riscoperte che è raccontata in [1]. La sua definizione originale con $a = 1/2$ e $b = 2$ è dovuta a T. Takagi ([22]) e poi a B. L. van der Waerden con $a = 1/10$ e $b = 10$ ([25]). La dimostrazione della non

derivabilità della funzione di Takagi–van der Waerden qui presentata è dovuta a P. Billingsley ([3]). Un altro popolare esempio di funzione continua non derivabile in alcun punto è la *funzione di McCarthy* ([10]). I risultati sulla holderianità della funzione di Takagi–van der Waerden e della funzione di Weierstrass sono dovuti a A. Shidfar e K. Sabetfakhri ([17] e [16]).
La funzione strettamente crescente e singolare di Esempio 6.7 è stata resa popolare da F. Riesz e B. Sz.-Nagy ([12]) anche se lo stesso tipo di funzione era già stato menzionato in precedenza da E. Hellinger in un differente contesto ([8]). Per la costruzione di funzioni strettamente crescenti e singolari si veda anche [21].
La dimostrazione qui presentata della genericità della non derivabilità in alcun punto delle funzioni continue in $[0,1]$ è quella originale di S. Banach ([2]).

Derivazione e integrazione per funzioni di una variabile reale. La trattazione delle relazioni tra derivazione e integrazione per funzioni di una variabile reale qui presentata è basata sul teorema di ricoprimento di Vitali. Un approccio alternativo è basato sul così detto *lemma del sole nascente* ([12] o [13]).

Bibliografia

[1] P. C. Allaart e K. Kawamura, *The Takagi function: a survey*, Real Anal. Exchange **37** (2011/12), 1–54.

[2] S. Banach, *Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, Studia Math. **3** (1931), 174–179.

[3] P. Billingsley, *Notes: Van Der Waerden's continuous nowhere differentiable function*, Amer. Math. Monthly **89** (1982), 691.

[4] A. Browder, *Mathematical analysis. An introduction*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1996.

[5] C. Carathéodory, *Über das Lineare Maß von Punktmengen: Eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. (1914), 404–426.

[6] R. E. Edwards, *A theory of Radon measures on locally compact spaces*, Acta Math. **89** (1953), 133–164.

[7] G. H. Hardy, *Weierstrass's non differentiable function*, Trans. Amer. Math. Soc. **17** (1916), 301–325.

[8] E. Hellinger, "Die othogonalinvarianten quadratischer formen von unendlichvielen variabelen", tesi di dott., Göttingen, 1907.

[9] E. Hewitt e K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Graduate Texts in Mathematics No. 25, Springer-Verlag, New York, 1975.

[10] J. McCarthy, *An everywhere continuous nowhere differentiable function*, Amer. Math. Monthly **60** (1953), 709.

[11] J. C. Oxtoby, *Measure and category. A survey of the analogies between topological and measure spaces*, Graduate Texts in Mathematics No. 2, Springer-Verlag, New York, 1971.

[12] F. Riesz e B. Sz.-Nagy, *Functional analysis*, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1955.

[13] A. C. M. van Rooij e W. H. Schikhof, *A second course on real functions*, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1982.

[14] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, Third Ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York, 1976.

[15] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Third Ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[16] A. Shidfar e K. Sabetfakhri, *Hölder continuity or discontinuity of Weierstrass' function*, Bull. Iranian Math. Soc. **16** (1989), 9–21.

[17] A. Shidfar e K. Sabetfakhri, *On the Hölder continuity of certain functions*, Exposition. Math. **8** (1990), 365–369.

[18] W. Sierpiński, *Sur les fonctions d'ensemble additives et continues*, Fund. Math. **3** (1922), 240–246.

[19] R. M. Solovay, *A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Ann. of Math. (2) **92** (1970), 1–56.

[20] K. Stromberg, *The Banach-Tarski paradox*, Amer. Math. Monthly **86** (1979), 151–161.

[21] L. Takács, *An increasing continuous singular function*, Amer. Math. Monthly **85** (1978), 35–37.

[22] T. Takagi, *A simple example of the continuous function without derivative*, Phys. Math. Soc. Japan **1** (1903), 176–177.

[23] J. L. Taylor, *Foundations of analysis*, vol. 18, Pure and Applied Undergraduate Texts, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[24] G. Vitali, *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Gamberini e Parmeggiani, Bologna (1905), 231–235.

[25] B. L. van der Waerden, *Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion*, Math. Z. **32** (1930), 474–475.

[26] S. Wagon, *The Banach–Tarski paradox*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

Indice analitico