MISURA DI LEBESGUE IN $\mathbb{R}^n$

Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$

- $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N]$ $\quad (a_n \leq b_n \ n = 1, \dots, N)$ (*)

  $\downarrow$
  rettangolo compatto (con i lati ....)

- $\operatorname{int}(R) \neq \phi \implies R$ non degenere

- $V_N(R) = \prod_{1 \leq n \leq N} (b_n - a_n)$ se R come in (*)

- $\mathcal{R} = \{\phi\} \cup \{R :$ rettangolo compatto non degenere

- $V_N(\phi) = 0$

Def. La funzione $\mathcal{L}^N : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, +\infty]$ definita d

$$\mathcal{L}^N(A) = \inf \left\{ \sum_k V_N(R_k) : A \subset \bigcup_k R_k \text{ e } R_k \in \mathcal{R} \ \forall k \right\}, \ A \subset \mathbb{R}^N$$

si dice misura esterna di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ e la collezione di insiemi

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \{ E : \mathcal{L}^N(A) = \mathcal{L}^N(A \cap E) + \mathcal{L}^N(A \setminus E) \ \forall A \subset \mathbb{R}^N \}$$

si dice σ-algebra di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$. ▨

- $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow E$ <u>Lebesgue misurabile</u>

- $\begin{cases} |E| = \mathcal{L}^N(E) & E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \\ |A|_* = \mathcal{L}^N(A) & A \subset \mathbb{R}^N \end{cases}$

- $\begin{cases} T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \text{ e } |T| = 0 \Rightarrow T \text{ Lebesgue-trascurabile} \\ \mathcal{N}(\mathbb{R}^N) = \{ T : T \text{ Lebesgue trascurabile} \} \end{cases}$

<u>Teorema</u>: Siano $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ la σ-algebra di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$ e $\mathcal{L}^N : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, +\infty]$ la misura esterna di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$. Allora,

a) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ e' una σ-algebra di $\mathbb{R}^N$ e la restrizione di $\mathcal{L}^N$ a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ e' una misura positiva di Borel in $\mathbb{R}^N$ complet[a] tale che

- K compatto $\Rightarrow \mathcal{L}^N(K) < +\infty$;

(**)
- $\forall E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)\ \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.c.
$$E \subset B \text{ e } \mathcal{L}^N(E) = \mathcal{L}^N(B);$$

b) per ogni insieme $A \subset \mathbb{R}^N$ ed $x_0 \in \mathbb{R}^N$ si ha
- $\mathcal{L}^N(A + x_0) = \mathcal{L}^N(A)$;
- $A + x_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$;

c) $\mathcal{L}^N(R) = V_N(R)$ per ogni rettangolo compatto della forma (*) ■

Lemma: $c_0^n \le c_1^n \le \dots \le c_{i_n}^n$ $(i_n \in \mathbb{N}_+ \ n = 1, \dots, N)$

$$\Downarrow$$

$$\prod_{1 \le n \le n} (c_{i_n}^n - c_0^n) = \sum_{\substack{1 \le j_1 \le i_1 \\ \vdots \\ 1 \le j_N \le i_N}} \prod_{1 \le n \le N} (c_{j_{n-1}}^n, c_{j_n}^n).$$

Dim Per induzione su N. ■

Proposizione: Sia

$$\mathcal{L}_\delta^N(A) = \inf \left\{ \sum_k V_N(R_k) : A \subset \bigcup_k R_k \text{ con } R_k \in \mathcal{R} \text{ e diam}(R_k) < \delta \right\}, A\subset$$

Allora, $\mathcal{L}_\delta^N = \mathcal{L}^N \quad \forall \delta > 0.$

Oss. • $\mathcal{L}^N$ e' una misura esterna metrica!

• Nella definizione di $\mathcal{L}^N$ si possono usare solo cubi. ■

Dim. a) Basta provare solo (**).

• $E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e $~~|E| = +\infty~~$ $\Rightarrow$ $B = \mathbb{R}^N$

• $~~E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)~~$ e $|E| < +\infty$

Proviamo che (**) vale per ogni $A \subset \mathbb{R}^N$.

- $|A|_* = +\infty \Rightarrow B = \mathbb{R}^N$
- $|A|_* < +\infty \Rightarrow \forall n \; \exists \{R_{n,k}\}_k :$ $\cdot \; \sum_k' V_N(R_{n,k}) \leq |A|_* + 1/n$, $\cdot \; A \subset \bigcup_k R_{n,k}$
- $B = \bigcap_n \left(\bigcup_k R_{n,k} \right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ e $A \subset B$

$$|A|_* \leq |B| \leq \sum_k' V_N(R_{n,k}) \leq |A|_* + 1/n \quad \forall n.$$

b) $\cdot$ $|A + x_0|_* = |A|_*$ ovvio!

$\cdot$ $\begin{cases} A \cap (E + x_0) = [(A - x_0) \cap E] + x_0 \\ A \setminus (E + x_0) = [(A - x_0) \setminus E] + x_0 \end{cases}$

c) $\cdot$ $|R| \leq V_N(R)$ per definizione

- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \{R_k\}_k \subset \mathcal{R} :$ $- \; R \subset \bigcup_k R_k$, $- \; \sum_k' V_N(R_k) < |R| + \varepsilon/2$
- ingrandendo si ha $- \; R \subset \bigcup_k \operatorname{int}(R_k)$, $- \; \sum_k' V_N(R_k) < |R| + \varepsilon$
- Heine-Borel $\Rightarrow R \subset \operatorname{int}(R_1) \cup \dots \cup \operatorname{int}(R_{k_0})$
- possiamo supporre $R \cap \operatorname{int}(R_k) \neq \emptyset \quad k = 1, \dots, k_0$
- $\begin{cases} R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N] \\ R_k = [a_{1,k}, b_{1,k}] \times \dots \times [a_{N,k}, b_{N,k}] \quad k = 1, \dots, k_0 \end{cases}$

- $\{a_n, b_n\} \cup \{a_{n,k}, b_{n,k} : k=1,\dots,k_0\} = \{c_0^n < c_1^n < \dots < c_{i_n}^n\}_{n=1,\dots,N}$

- $P_1, \dots, P_{h_0}$ $\quad h_0 = i_1 \cdot i_2 \cdots i_N \Rightarrow \begin{cases} R = P_1 \cup \dots \cup P_{h_0} \\ V_N(R) = V_N(P_1) + \dots + V_N(P_{h_0}) \end{cases}$

$\uparrow$ lemma!

- riapplichiamo il lemma a ogni R_k

$$H_k = \{h \in \{1,\dots,h_0\} : P_h \subset R_k\} \quad k=1,\dots,k_0$$

$$\Downarrow$$

$$R_k = \bigcup_{h \in H_k} P_h \quad e \quad V_N(R_k) = \sum_{h \in H_k}' V_N(P_h)$$

- $\forall h \in \{1,\dots,h_0\} \ \exists k \in \{1,\dots,k_0\} : h \in H_k$

$$\Downarrow$$

$$V_N(R) = \sum_{1 \le h \le h_0}' V_N(P_h) \le \sum_{1 \le k \le k_0}' \sum_{h \in H_k}' V_N(P_h) =$$

$$= \sum_{1 \le k \le k_0}' V_N(R_k) < |R| + \varepsilon$$

$\blacksquare$

Regolarità della misura di Lebesgue

Teorema: Sia $\mu : \mathcal{L} \to [0,+\infty]$ una misura positiva di Borel in $\mathbb{R}^N$ t.c.

- K compatto $\Rightarrow \mu(K) < +\infty$;
- $\forall E \in \mathcal{L}\ \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) : E \subset B$ e $\mu(E) = \mu(B)$;

e sia $E \in \mathcal{L}$. Allora,

a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists F_\varepsilon$ chiuso, V_ε aperto : $- F_\varepsilon \subset E \subset V_\varepsilon$
$- \mu(V_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$

b) $\exists B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\ i = 1,2$: $- B_1 \subset E \subset B_2$
$- \mu(B_2 \setminus B_1) = 0$.

Dim. I) $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ e $\mu(B) < +\infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists K_\varepsilon$ comp. : $- K_\varepsilon \subset B$
$- \mu(B \setminus K_\varepsilon) \leq$

- $\nu(A) = \mu(A \cap B)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ misura positiva di Borel finita
- $\mathcal{A} = \{ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) : \forall \varepsilon > 0\ \exists K_\varepsilon$ compatto : $K_\varepsilon \subset A$ e $\nu(A \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon \}$
  $\hookrightarrow$ $\boxed{K \text{ compatto} \Rightarrow K \in \mathcal{A}}$
- $A_m \in \mathcal{A}\ m \geq 1 \Rightarrow A = \bigcap_m A_m \in \mathcal{A}$

$\varepsilon > 0 \Rightarrow K_m$ compatto : $K_m \subset A_m$ e $\nu(A_m \setminus K_m) \leq \varepsilon / 2^m$

$K = \bigcap_m K_m$ compatto : $K \subset A$ e $A \setminus K \subset \bigcup_m A_m \setminus K_m$

- $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A = A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists K_m$ compatto : $K_m \subset A_m$ e $\nu(A_m \setminus K_m) \leq \varepsilon / n$

- $K = K_1 \cup .. \cup K_n$ compatto e $A \setminus K \subset (A_1 \setminus K_1) \cup .. \cup (A_n \setminus K_n)$
- $A_m \in \mathcal{A}$ $m \geq 1$ $\Rightarrow$ $A = \bigcup_m A_m \in \mathcal{A}$

  - $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ $\exists n \geq 1$: $\nu(A \setminus (A_1 \cup .. \cup A_n)) \leq \varepsilon/2$
  - $\exists K$ compatto : $K \subset A_1 \cup .. \cup A_n$ e $\nu((A_1 \cup .. \cup A_n) \setminus K) \leq \varepsilon$
  - $A \setminus K \subset [A \setminus (A_1 \cup .. \cup A_n)] \cup [(A_1 \cup .. \cup A_n) \setminus K]$
- aperti e chiusi sono unione numerabile di compatti
- $\mathcal{B}' = \{ A \in \mathcal{A} : A^c \in \mathcal{A} \}$ σ-algebra contenente gli aperti
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.
- $B \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K_\varepsilon$ compatto: $K_\varepsilon \subset B$ e $\nu(B \setminus K_\varepsilon) \leq$
- $\varepsilon \geq \nu(B \setminus K_\varepsilon) = \mu((B \setminus K_\varepsilon) \cap B) = \mu(B \setminus K_\varepsilon)$

II) $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists F_\varepsilon$ chiuso, V_ε aperto: - $F_\varepsilon \subset B \subset V_\varepsilon$
- $\mu(V_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq$

- $B_n = B \cap \{ x : n-1 \leq \|x\| < n \}$, $n \geq 1$ $\Rightarrow$ $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $\mu(B_n) < +\infty$ e $B = \bigcup_n$
- $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ $\forall n$ $\exists K_n$ compatto ; $K_n \subset B_n$ e $\mu(B_n \setminus K_n) \leq \varepsilon/2^{n+1}$
- $F_\varepsilon = \bigcup_n K_n$ chiuso (dim!) e $F_\varepsilon \subset B$ con $\mu(B \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon/2$
- $F_\varepsilon \subset B^c$ chiuso : $\mu(B^c \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon/2$ $\Rightarrow$ $V_\varepsilon = F_\varepsilon^c$
- V_ε aperto : $B \subset V_\varepsilon$ e $V_\varepsilon \setminus B = B^c \setminus F_\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\mu(V_\varepsilon \setminus B) \leq \varepsilon/2$.

III) $E \in \mathcal{L} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists F_\varepsilon$ chiuso, V_ε aperto: - $F_\varepsilon \subset E \subset V_\varepsilon$
- $\mu(V_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \le \varepsilon$

- $E \in \mathcal{L} \Rightarrow \exists \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) : E \subset B$ e $\mu(E) = \mu(B)$
- $\mu(E) < +\infty \Rightarrow \mu(B \setminus E) = 0$
- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists V_\varepsilon$ aperto: $B \subset V_\varepsilon$ e $\mu(V_\varepsilon \setminus B) \le \varepsilon/2$
- $E \subset V_\varepsilon$ e $V_\varepsilon \setminus E = (V_\varepsilon \setminus B) \cup (B \setminus E) \Rightarrow \mu(V_\varepsilon \setminus E) \le \varepsilon/2$
- $\mu(E) = +\infty \Rightarrow E_n = E \cap \{x : n-1 \le \|x\| < n\}, n \ge 1 \Rightarrow E = \bigcup_n E_n$
- $E_n \in \mathcal{L}$ e $\mu(E_n) < +\infty \ \forall n \Rightarrow \forall n \ \exists V_n$ aperto: - $E_n \subset V_n$
- $\mu(V_n \setminus E_n) \le \varepsilon/2$
- $V_\varepsilon = \bigcup_n V_n$ aperto: $E \subset V_\varepsilon$ e $V_\varepsilon \setminus E \subset \bigcup_n (V_n \setminus E_n) \Rightarrow \mu(V_\varepsilon \setminus E) \le \varepsilon$
- ragionando sul complementare E^c si trova F_ε chiuso $F_\varepsilon \subset E$ t.c. $\mu(E \setminus F_\varepsilon) \le \varepsilon/2$.

Questo prova (a). Infine, (b) segue in modo ovvio da (a). ▨

Corollario: Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme. Sono equivale

a) E e' Lebesgue misurabile;

b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists F_\varepsilon$ chiuso, V_ε aperto: $F_\varepsilon \subset E \subset V_\varepsilon$ e $\mu(V_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

c) $\exists B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ $i = 1,2$: $B_1 \subset E \subset B_2$ e $\mu(B_2 \setminus B_1) = 0$.

Dim Ovvio! ■

Corollario: Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme Lebesgue mis.

Allora,

a) se $|E| < +\infty$, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon$ compatto, V_ε aperto: $- K_\varepsilon \subset E \subset V$
$- |V_\varepsilon \setminus K_\varepsilon| \leq$

b) $\exists$ K_n compatti, V_n aperti $(n \geq 1)$ t.c.

$$\bigcup_n K_n \subset E \subset \bigcap_n V_n \quad \text{e} \quad \left|\left(\bigcap_n V_n\right) \setminus \left(\bigcup_n K_n\right)\right| = 0;$$

c) $$|E| = \begin{cases} \sup\{|K| : K \text{ compatto e } K \subset E\} \\ \inf\{|V| : V \text{ aperto e } E \subset V\}. \end{cases}$$

Dim. a) . $E_n = E \cap B_n[0]$ $n \geq 1$

. $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n \geq 1 : |E \setminus E_n| \leq \varepsilon/2$

. $\exists\, F_\varepsilon$ chiuso : $F_\varepsilon \subset E_n$ e $|E_n \setminus F_\varepsilon| \leq \varepsilon/2 \Rightarrow K = F_\varepsilon$ compatto.

b) $\exists\, B_1 \in \tilde{\mathcal{F}}_\sigma$, $B_2 \in \mathcal{G}_\delta$: $B_1 \subset E \subset B_2$ e $|B_2 \setminus B_1| = 0$
Ogni $\mathcal{F}_\sigma$ e' un K_σ in $\mathbb{R}^N$

c) Ovvio! ■

Unicità della misura di Lebesgue

Teorema: Siano $\mathcal{S}$ σ-algebra di insiemi di $\mathbb{R}^N$ e $\mu: \mathcal{S} \longrightarrow [0,+\infty]$ misura positiva di Borel non nulla t.c.

- K compatto $\Rightarrow \mu(K) < +\infty$;
- $\forall E \in \mathcal{S}\ \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$: $E \subset B$ e $\mu(E) = \mu(B)$;
- $\mu(B + x_0) = \mu(B)$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Allora,

a) $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ ed $\exists\, c > 0$: $\mu(E) = c|E|$ $\forall E \in \mathcal{S}$;

b) μ completa $\Rightarrow \mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

cubi diadici

$$Q^{(k)} = \{ x = (x_1, \dots, x_N) : 0 \le x_n \le 1/2^k \quad n = 1, \dots, N \} \qquad k \geq 0$$

$$\mathcal{Q}_k = \left\{ \frac{h}{2^k} + Q^{(k)} : h \in \mathbb{Z}^N \right\} \qquad k \geq 0$$

$$\mathcal{Q}_d = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{Q}_k$$

$Q \in \mathcal{Q}_d$ cubo diadico

Lemma: $V \subset \mathbb{R}^N$ aperto (non vuoto) $\Rightarrow \exists\ Q_j \in \mathcal{L}_d\ j \geq 1$ t.

a) $\mathrm{int}(Q_i) \cap \mathrm{int}(Q_j) = \emptyset \quad i \neq j$;

b) $V = \bigcup_{j \geq 1} Q_j$.

Dim. . . . .

Oss: Prendendo

$$Q^{(k)} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_N) : 0 \leq x_n < 1/2^k \quad n = 1, \dots, N \right\} \quad k \geq 0$$

si ottiene la scomposizione di V in cubi diadici disgiunti

Dim. . $c = \mu(Q^{(0)}) \geq 0$

. $Q^{(0)} = Q_1 \cup \dots \cup Q_{2^{kN}}$ con $Q_h \in \mathcal{L}_k$ $h = 1, \dots, 2^{kN}$ cubi diadici disgiunti

. $2^{kN} \mu(Q^{(k)}) = \sum'_{1 \leq h \leq 2^{kN}} \mu(Q_h) = \mu(Q^{(0)}) = c$

$= c|Q^{(0)}| = \dots = c 2^{kN} |Q^{(k)}|$

. $\mu(Q^k) = c|Q^{(k)}| \quad \forall k \geq 0$

. $\mu(Q) = c|Q| \quad Q \in \mathcal{L}_d \Rightarrow \mu(V) = c|V| \quad \forall V$ aperto

$\Rightarrow \mu(B) = c|B| \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

. μ non nulla $\Rightarrow c > 0$

- $E \in \mathcal{L} \Rightarrow \exists\, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\ (i=1,2) : B_1 \subset E \subset B_2$ e $\mu(B_2 \setminus B_1) = 0$
- $B_1 \subset E \subset B_2$ e $|B_2 \setminus B_1| = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ ($\mathcal{L}^N$ completa)
- μ completa $\Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ (scambiare i ruoli) $\blacksquare$

Categoria di Baire

Quali insiemi sono piccoli in senso topologico?

<u>Def</u>. Sia (X, τ) sp. topologico. Un insieme $E \subset X$ si dice

- di <u>I categoria</u> (<u>magro</u>) se
$$E = \bigcup_n E_n \quad e \quad \mathrm{int}(\mathrm{cl}(E_n)) = \emptyset \ \forall n;$$
- di <u>II categoria</u> se non è di I categoria ∎

<u>Oss</u>. $E \subset X$ si dice

- <u>rado</u> se $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(E)) = \emptyset$;
- <u>residuo</u> se E^c è magro. ∎

<u>Proprietà</u>:

1) $E \subset F$ e F magro $\Rightarrow$ E magro;

2) $\begin{cases} E_n \ (n \geq 1) \text{ magro} \\ E_n \ (n \geq 1) \text{ residuo} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} E = \bigcup_{n \geq 1} E_n \text{ magro} \\ E = \bigcap_{n \geq 1} E_n \text{ residuo} \end{array}$ ∎

<u>Esempi</u>:
- $\mathbb{Q}$ magro in $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ residuo in $\mathbb{R}$. ∎

Oss. Sia $E \subset X$. Allora,

- E raro $\iff$ E^c contiene un aperto denso
- E magro $\iff$ $\exists\, F \in \mathcal{F}_\sigma$ magro : $E \subset F$
- E residuo $\iff$ $\exists\, G \in \mathcal{G}_\delta$ denso : $G \subset E$ ▨

Teorema (R. Baire): Sia (X,d) spazio metrico completo e siano V_n $(n \geq 1)$ aperti densi di X. Allora,

$$G = \bigcap_{n\geq 1} V_n$$

e' un $\mathcal{G}_\delta$ denso di X.

Corollario: Sia (X,d) spazio metrico completo. Allora, X e' di II categoria in se'.

Dim. Proviamo che

$$W \text{ aperto (non vuoto)} \Rightarrow W \cap G \neq \emptyset.$$

- $x_0 \in X$ e $r_0 > 0$: $B_{r_0}[x_0] \subset W$
- V_1 aperto denso $\Rightarrow \exists\, x_1 \in V_1 \cap B_{r_0}(x_0)$ e $0 < r_1 \leq 1$: $B_{r_1}[x_1] \subset V_1 \cap B_{r_0}(x_0)$
- V_2 aperto denso $\Rightarrow \exists\, x_2 \in V_2 \cap B_{r_1}(x_1)$ e $0 < r_2 \leq \frac{1}{2}$: $B_{r_2}[x_2] \subset V_2 \cap B_{r_1}(x_1)$
- iterando si determinano $x_n \in X$ e $r_n > 0$ $(n \geq 1)$ t.c.

- $B_{r_n}[x_n] \subset V_n \cap B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \quad \forall n \geq 1$;

- $0 < r_n \leq 1/n \quad \forall n \geq 1$.

- per induzione: $n \geq m \Rightarrow \begin{array}{l} B_{r_n}[x_n] \subset V_n \\ B_{r_n}[x_n] \subset B_{r_m}[x_m] \end{array}$

- $\{x_n\}_n$ di Cauchy $\Rightarrow \exists\, x \in X : \lim_{n \to +\infty} x_n = x$

- $\begin{cases} x \in B_{r_n}[x_n] \subset V_n \quad \forall n \\ x \in B_{r_0}[x_0] \subset W \end{cases} \Rightarrow x \in W \cap G$. $\blacksquare$

Insiemi trascurabili (e non solo).

- $|\{x\}| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$
- ogni insieme finito o numerabile e' trascurabile
  in particolare $\mathbb{Q}^N$ e' trascurabile

Ogni insieme trascurabile e' (al più) numerabile? NO

Esempio (insieme di Cantor)

$C \subset [0,1]$:
- C compatto e $\mathrm{int}(C) = \emptyset$
- $|C| = 0$
- C e' non numerabile

Oss. C chiuso e non numer.!

- $C = \bigcap_n C_n$ e $C_n = I_{n,1} \cup \dots \cup I_{n,2^n}$ $\quad n \geq 0$
- $|C_n| = (2/3)^n$ e $|I_{n,m}| = 1/3^n$ $\quad m = 1, \dots, 2^n$
- $\varphi : C \to \{0,1\}^{\mathbb{N}_+}$ biettiva definita da

$$\varphi(x) = \{c_n(x)\}_{n \geq 1} : \quad c_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in I_{n,m} \text{ e } m \text{ dispari} \\ 1 & \text{se } x \in I_{n,m} \text{ e } m \text{ pari} \end{cases}$$

- $\psi : [0,1] \to \{0,1\}^{\mathbb{N}_+}$ iniettiva definita da

$$\psi(x) = \{d_n(x)\}_{n \geq 1} : \quad x = \sum_{n \geq 1}{}' \, d_n(x)/2^n$$

che non usa successioni definitivamente uguali a 1 se non per $x = 1$: ad esempio

$$1/2 = 0.1000\ldots \quad \text{e non} \quad x = 0.01111\ldots$$

- $\varphi^{-1} \circ \psi : [0,1] \to C$ iniettiva $\blacksquare$

<u>Oss</u> . idem con $3\in(0,1)$ al posto di $1/3$!

. $\mathrm{int}(C)=\phi \Rightarrow C$ e' il bordo di $[0,1]\setminus C$.

Due domande:

1) solo gli insiemi trascurabili sono privi di punti interni?

2) che relazione c'e' tra trascurabile e magro?

1 Per ogni $0<\varepsilon<1$ $\exists\ V_\varepsilon\subset(0,1)$ t.c.

- V_ε aperto
- $\mathbb{Q}\cap(0,1)\subset V_\varepsilon$
- $|V_\varepsilon|=\varepsilon$

- $W_\varepsilon=\bigcup_{k\geq 1}\left(q_k-\varepsilon/2^{k+1},\, q_k+\varepsilon/2^{k+1}\right)\cap(0,1)$

  $\{q_k\}_k=\mathbb{Q}\cap(0,1)$

- W_ε aperto di $(0,1)$: $\mathbb{Q}\cap(0,1)\subset W_\varepsilon$ e $|W_\varepsilon|\leq\varepsilon$

- $|W_\varepsilon|=\varepsilon \Rightarrow V_\varepsilon=W_\varepsilon$

- $|W_\varepsilon|<\varepsilon \Rightarrow \varphi(t)=|W_\varepsilon\cup[0,t]|$, $t\geq 0$

- φ crescente e continua (dimostrarlo!)

- $\varphi(0) = |W_\varepsilon| \leq \varepsilon$ e $\varphi(1) = 1$
- $\exists\, t \in (0,1) : \varphi(t) = \varepsilon \Rightarrow V_\varepsilon = W_\varepsilon \cup [0,t]$ $\blacksquare$

<u>Oss</u>. $[0,1] \setminus V_\varepsilon$ e' il bordo di V_ε e $|[0,1] \setminus V_\varepsilon| = 1-\varepsilon$
Quindi $\exists$ aperti con bordo di misura positiva! $\blacksquare$

(2) $\exists$: $F \subset [0,1]$ magro con $|F| = 1$
$G \subset [0,1]$ residuo con $|G| = 0$

- $V_{1/n}$ $n \geq 1$ come in (1) $\Rightarrow V_{1/n}$ aperto denso e $|V_{1/n}| =$
- $G = \bigcap_n V_n$ G_δ denso (residuo) con $|G| = 0$
- $F = G^c \Rightarrow F_\sigma$ magro con $|F| = 1$ $\blacksquare$

<u>Oss</u>. Perche' non puo' essere $G = \mathbb{Q} \cap (0,1)$?

<u>Teorema</u>: Siano $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ op. lineare e $E, T \subset \mathbb{R}^N$ insiemi. Allora,

a) T trascurabile $\Rightarrow$ $L(T)$ trascurabile

b) E misurabile $\Rightarrow$ $L(E)$ misurabile

<u>Oss</u> Vale con $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ e $M \geq N$

<u>Non</u> vale con $M < N$! ∎

<u>Dim</u>. $K = \|L\|$ ($K > 0$ altrimenti e' ovvio)

a) . $Q_\ell[x] = \{ y = (y_1, \dots, y_N) : |y_n - x_n| \leq \ell \ n = 1, \dots, N \}$ $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$

. $Q_\ell[x] \subset B_{\sqrt{N}\ell}[x]$

. $L(B_{\sqrt{N}\ell}[x]) \subset B_{K\sqrt{N}\ell}[Lx]$

. $B_{K\sqrt{N}\ell}[Lx] \subset Q_{K\sqrt{N}\ell}[Lx]$

. T trascurabile, $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ $\exists\, Q_k = Q_{\ell_k}[x_k]$ $k \geq 1$ t.c.

$T \subset \bigcup_k Q_k$ e $\sum_k |Q_k| \leq \varepsilon$

. $Q'_k = Q_{K\sqrt{N}\ell_k}(Lx_k)$ $k \geq 1$

. $L(T) \subset \bigcup_k Q'_k$ e $\sum_k |Q'_k| \leq (K\sqrt{N})^N \sum_k |Q_k|$

b) $E = \bigcup_n K_n \cup T$ con K_n compatto e T trascurabile ∎

Teorema: Sia $T \subset \mathbb{R}^N$ t.c.

$$T \subset X_0 + x_0$$

con X_0 sottospazio con $\dim X_0 \leq N-1$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$.
Allora T e' trascurabile in $\mathbb{R}^N$

Dim. Supponiamo $x_0 = 0$ e $\dim X_0 = N-1$ $(N \geq 2$

Caso 1: $X_0 = \text{span}\{e_1, \dots, e_{N-1}\}$

- T limitato $\Rightarrow$ $T \subset R \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ R rettangolo compatto in $\mathbb{R}^{N-1}$ della forma (*

- T illimitato $\Rightarrow$ $T = \bigcup_k T \cap B_k[0]$.

Caso 2: $X_0 = \text{span}\{u_1, \dots, u_{N-1}\}$ $\{u_1, \dots, u_{N-1}\}$ base ort.

- $\exists\, u_N$: $\{u_1, \dots, u_N\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^N$

- $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ op. lin. ortogonale : $Le_k = u_k$ $k = 1, \dots, N$

- $S = L^{-1}(T) \subset \text{span}\{e_1, \dots, e_N\}$ $\Rightarrow$ S trascurabile

- $T = L(S)$ trascurabile. ∎

Integrazione in $\mathbb{R}^N$

terminologia e notazioni:

- $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile $\equiv$ $E \subset \mathbb{R}^N$ Lebesgue misurabile
- $f : E \to \mathbb{K}$ misur. in E $\equiv$ $f : E \to \mathbb{K}$ Lebesgue misur. in E
- $f : E \to \mathbb{K}$ integr. in E $\equiv$ $f : E \to \mathbb{K}$ Lebesgue integr. in E
- $\int_E f$ o $\int_E f(x)\,dx$ al posto di $\int_E f \, d\mathcal{L}^N$;
- $I \subset \mathbb{R}$ $(N=1)$ intervallo con $a = \inf I$ e $b = \sup I$ e $f : I \to \mathbb{K}$ integrabile in I

$$\int_a^b f = \int_I f$$

con convenzione sugli intervalli orientati.

Def Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile. Una funzione $f : E \to \mathbb{K}$ tale che

- f misurabile in E;
- $\int_K |f| < +\infty$ per ogni $K \subset E$ compatto;

si dice <u>localmente integrabile in E</u>. ▨

Teorema: Siano $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile e $f: E \to \mathbb{K}$ una funzione. Allora,

a) f continua $\Rightarrow$ f misurabile in E;

b) f misur. e limitata in E e $|E| < +\infty$ $\Rightarrow$ f integr. in E

c) f continua e limitata in E e $|E| < +\infty$ $\Rightarrow$ f integ. in E

Corollario: Siano $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile, $T \subset E$ trascurabile e $f: E \to \mathbb{K}$ una funzione t.c.

(*) · $f|_{E \setminus T}$ è continua.

Allora,

a) f misurabile in E;

b) f limitata in E e $|E| < +\infty$ $\Rightarrow$ f integr. in E.

Oss. (*) è molto più debole che chiedere che l'insieme

$$D = \{x \in E : f \text{ non è continua in } x\}$$

sia trascurabile. ▨

Integrale di Riemann e integrale di Lebesgue

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

$R-\int_a^b f$ integrale di Riemann

$L-\int_a^b f$ ———————— Lebesgue

Teorema: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ Riemann integrabile in $[a,b]$. Allora f e' Lebesgue integrabile in $[a,b]$ e si ha

$$R-\int_a^b f = L-\int_a^b f$$

Oss. . f Lebesgue integ. e limitata $\not\Rightarrow$ f Riemann integ.

. si estende agli integrali generalizzati assolutamente convergenti e agli integrali di Riemann in $\mathbb{R}^N$. ■

Dim f reale

. $\forall n \geq 1 \ \exists \ P_n = \{ a = t_{n,0} < t_{n,1} < \dots < t_{n,k_n} = b \}$ $(k_n \geq 1)$ t.c

- $0 \leq S^+(f, P_n) - S^-(f, P_n) \leq 1/n$
- $P_n \subset P_{n+1}$

ove

$$M^+_{n,k} = \sup\{f(t) : t_{n,k-1} \le t \le t_{n,k}\}$$

$$M^-_{n,k} = \inf\{f(t) : t_{n,k-1} \le t \le t_{n,k}\}$$

$$S^\pm(f, P_n) = \sum_{1\le k\le k_n}{}' M^\pm_{n,k}(t_{n,k} - t_{n,k-1})$$

- $$I_{n,k} = \begin{cases} [t_{n,k-1}, t_{n,k}) & k = 1, \dots, k_n - 1 \\ [t_{n,k_n-1}, t_{n,k_n}] & k = k_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^-_{n,k} = \inf\{f(t) : t \in I_{n,k}\} \\ \alpha^+_{n,k} = \sup\{f(t) : t \in I_{n,k}\} \end{cases}$$

- $s^\pm_n = \sum_{1\le k\le k_n}{}' \alpha^\pm_{n,k} 1_{I_{n,k}}$ semplice e Borel mis. t.c.

  - $s^-_n \le s^-_{n+1}$ e $s^+_{n+1} \le s^+_n \quad \forall n$
  - $s^-_n \le f \le s^+_n \quad \forall n$

- $\begin{cases} s^- = \sup_n s^-_n \\ s^+ = \inf_n s^+_n \end{cases}$ Borel misurabili t.c.

$$s^-_n \le s^- \le f \le s^+ \le s^+_n \quad \forall n$$

- $S^-(f, P_n) \le L\text{-}\int_a^b s^-_n$ e $L\text{-}\int_a^b s^+_n \le S^+(f, P_n) \quad \forall n$

- $0 \le L\text{-}\int_a^b (s^+ - s^-) \le L\text{-}\int_a^b (s^+_n - s^-_n) \le S^+(f, P_n) - S^-(f, P_n) \le 1/n \quad \forall$

- $L\text{-}\int_a^b (s^+ - s^-) = 0 \Rightarrow s^+ = s^-$ q.o. in $[a, b]$

- f Lebesgue misurabile in $[a,b]$
- $L\text{-}\int_a^b f\,,\ R\text{-}\int_a^b f \in [\,S^-(f,P_n)\,,\ S^+(f,P_n)\,]\quad \forall n$

$$\Downarrow$$

$$0 \le \left| L\text{-}\int_a^b f - R\text{-}\int_a^b f \right| \le S^+(f,P_n) - S^-(f,P_n) \le 1/n \quad \forall n$$

Quindi $\quad L\text{-}\int_a^b f = R\text{-}\int_a^b f.$ $\blacksquare$

<u>Esempio</u>: Calcoliamo $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx$.

- $f(x) = e^{-x}\operatorname{sen} x\,,\ x \ge 0$ continua in $[0,+\infty) \Rightarrow$ misurabile in $[0,+\infty)$
- $0 \le |f(x)| \le e^{-x}$ per $x \ge 0$ e

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx \underset{\uparrow\,\text{CM}}{=} \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_0^n e^{-x}\,dx}_{\text{Riemann}} = \dots = 1$$

Quindi f e' integrabile in $[0,+\infty)$

- $$\int_0^{+\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx \underset{\uparrow\,\text{CD}}{=} \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_0^n e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx}_{\text{Riemann}} = \dots =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x)e^{-x}\Big|_0^n = 1/2 \quad \blacksquare$$

<u>Teorema</u> (H. Lebesgue) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ una funzione limitata e sia

$$D = \{x \in [a,b] : f \text{ } \underline{\text{non}} \text{ è continua in } x\}.$$

l'insieme dei punti di discontinuità di f. Sono equivalenti

a) f è Riemann integrabile in $[a,b]$;

b) D è Lebesgue trascurabile.

<u>Dim</u> (a) $\Rightarrow$ (b) (f <u>reale</u>)

Con le notazioni del teorema precedente sia

$$T = \{s^- < s^+\} \cup \left(\bigcup_n P_n\right).$$

- T trascurabile
- $\varepsilon > 0$, $x \in [a,b] \setminus T \Rightarrow \exists n \geq 1 : 0 \leq s_n^+(x) - s_n^-(x) \leq \varepsilon$
- $\exists k \in \{1, \dots, k_n\} : t_{n,k-1} < x < t_{n,k}$
- $0 < \delta < \min\{t_{n,k} - x \, ; \, x - t_{n,k-1}\}$
- $y \in [x-\delta, x+\delta] \Rightarrow x, y \in (t_{n,k-1}, t_{n,k}) \Rightarrow s_n^{\pm}(x), s_n^{\pm}(y) = \alpha^{\pm}_{n,k}$
- $y \in [x-\delta, x+\delta] \Rightarrow 0 \leq |f(y) - f(x)| \leq \alpha^+_{n,k} - \alpha^-_{n,k} \leq \varepsilon.$

(b) $\Rightarrow$ (a) (f reale)

- $M>0$: $|f(x)| \le M \quad \forall x \in [a,b]$
- $\varepsilon>0 \Rightarrow I_k$ ($k \ge 1$) intv. compatti (nondegeneri) t.c.

$$D \subset \bigcup_k I_k \quad e \quad \sum_k{}' |I_k| < \varepsilon/4M$$

- allarghiamo gli intervalli trovando intervalli aperti concentrici t.c.

$$D \subset \bigcup_k I_k \quad e \quad \sum_k{}' |I_k| \le \varepsilon/4M \cdot$$

- $K = [a,b] \setminus \left(\bigcup_k I_k\right)$ compatto
- $x \in K \Rightarrow \exists\, I_x$ intv. aperto t.c.

$$\sup\{|f(y_1)-f(y_2)| : y_i \in [a,b] \cap I_x \; i=1,2\} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

- $\{I_k\}_k \cup \{I_x : x \in K\}$ ricoprimento aperto di $[a,b]$
- $\exists\, J_1, \dots, J_n$ intv. aperti : $[a,b] \subset J_1 \cup \dots \cup J_n$
- $\{J_1, \dots, J_n\}$ ricoprimento minimale
- rinumerando eventualmente gli intv. $\exists$ $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ t.c.

$$[t_{m-1}, t_m] \subset J_m \qquad m = 1, \dots, n$$

- $0 \le S^+(f,P) - S^-(f,P) =$

$$= \sum_m{}'' (M_m^+ - M_m^-)(t_m - t_{m-1}) + \sum_m{}''' (M_m^+ - M_m^-)(t_m - t_{m-1}) <$$

$$\leq 2M \sum_m{}' |J_m| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_m{}'' (t_m - t_{m-1})$$

$$\leq 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon . \quad \blacksquare$$

Funzione di Cantor-Vitali

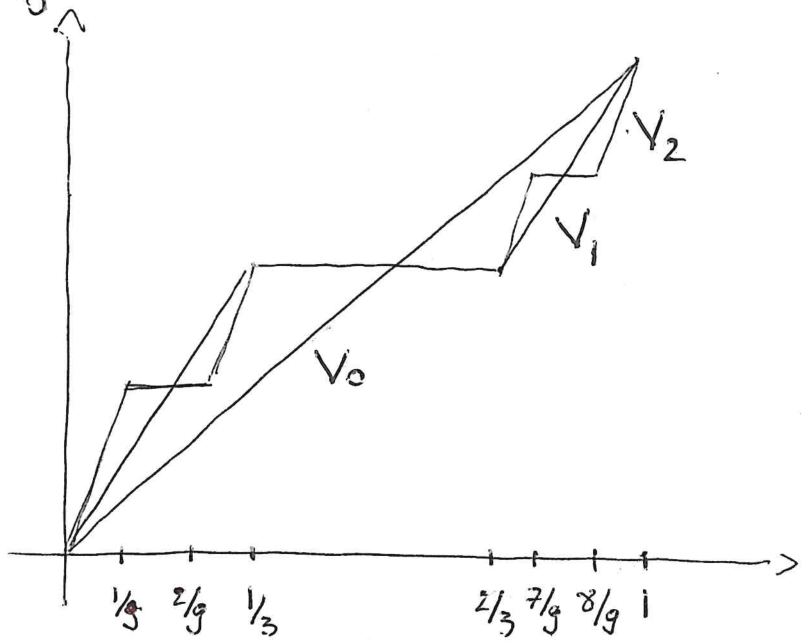
$V : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

- V continua e crescente con $V(0)=0$ e $V(1)=1$;
- V derivabile in $[0,1]\setminus C$ con

$$V'(x) = 0, \qquad x \in [0,1]\setminus C;$$

- $|V(C)| = 1$.

- $v_n(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \mathbb{1}_{C_n}(t), \quad t \in [0,1] \quad n \geq 0;$
- $V_n(x) = \int_0^x v_n(t)\,dt, \quad x \in [0,1]$



- V_n continua e crescente in $[0,1]$ con

$$V_n(0) = 0 \quad e \quad V_n(1) = 1 \qquad \forall n \geq 0$$

$$V_n(1) = \left(\tfrac{3}{2}\right)^n |C_n| = \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \left(\tfrac{2}{3}\right)^n = 1, \qquad n \geq 0.$$

- $C_n = I_{n,1} \cup \dots \cup I_{n,2^n}$ e $I_{n,m} = [a_{n,m}, b_{n,m}]$ $m = 1, \dots, 2^n$

- $\displaystyle\int_{I_{n,m}} v_n = \left(\tfrac{3}{2}\right)^n |I_{n,m}| = \frac{1}{2^n}$ $\quad m = 1, \dots, 2^n$ e $n \geq 0$

- $I_{n,m} = I_{n+1,2m-1} \cup I_{n+1,2m}$ $\quad m = 1, \dots, 2^n$

- $\displaystyle\int_{I_{n,m}} v_{n+1} = \int_{I_{n+1,2m-1}} v_{n+1} + \int_{I_{n+1,2m}} v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$

- Quindi si ha

$$\int_{I_{n,m}} v_n = \int_{I_{n,m}} v_{n+k} \qquad \forall k \geq 1 \qquad (*)$$

per $m = 1, \dots, 2^n$ e $n \geq 0$.

- $(*) \Rightarrow V_{n+k} = V_n$ in $[0,1] \setminus C_n$ $\forall k \geq 1$

- $\displaystyle\max_{x \in [0,1]} |V_{n+1}(x) - V_n(x)| =$

$$= \max_{m=1,\dots,2^n} \max_{x \in I_{m,n}} |V_{n+1}(x) - V_n(x)| =$$

$$= \max_{m=1,\dots,2^n} \max_{x \in [a_{m,n}, b_{m,n}]} \left| \int_{a_{m,n}}^{x} [v_{n+1}(t) - v_n(t)]\, dt \right| \leq$$

$$\leq \max_{m=1,\dots,2^n} \int_{a_{m,n}}^{b_{m,n}} |v_{n+1}(t) - v_n(t)|\, dt =$$

$$= \max_{1 \le m \le 2^n} 2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{3}{2}\right)^{n}\right]\frac{1}{3^{n+1}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n}\frac{1}{3^{n+1}} =$$

$$= \dots = \frac{1}{3\,2^{n-1}}$$

- $\{V_n\}_n$ uniformemente di Cauchy in $[0,1]$
- $\exists\, V : [0,1] \to \mathbb{R}$ t.c. $V_n \to V$ uniform. in $[0,1]$ $n \to +\infty$
- V continua e crescente con $V(0)=0$ e $V(1)=1$.
- $x \in [0,1] \setminus C = \bigcup_n [0,1] \setminus C_n \Rightarrow \exists\, n \geq 2 : x \in [0,1] \setminus C_n$

$$\Rightarrow \exists\, m \in \{2, \dots, 2^n\} : b_{n,m-1} < x < a_{n,m}$$

- V_n costante in ogni componente connessa di $[0,1] \setminus C_n$:

$$V_n = \text{cost. in } (b_{n,m-1}, a_{n,m})$$

- $V = V_n$ in $[0,1] \setminus C_n \Rightarrow \exists\, V'(x) = 0$.

- $[0,1] = V([0,1]) = V(C) \cup V([0,1] \setminus C)$

- $\begin{cases} V([0,1] \setminus C) = \bigcup_n V_n([0,1] \setminus C_n) \\ V_n([0,1] \setminus C_n) \text{ finito } \forall n \end{cases} \Rightarrow V([0,1] \setminus C)$ numerab

- $|V(C)| = 1$

$\blacksquare$

Insiemi non misurabili

(1) Ogni insieme misurabile con misura positiva contiene un insieme non misurabile

(2) Esistono insiemi (Lebesgue) misurabili che non sono Borel misurabili

(1) <u>Lemma</u> (H. Steinhaus): Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile con $|E| > 0$. Allora, $\mathrm{int}(E-E) \neq \emptyset$

<u>Oss</u>. E misurabile con $|E|>0$ può avere $\mathrm{int}(E) = \emptyset$ ma non può essere così piccolo da avere $\mathrm{int}(E-E) = \emptyset$!

<u>Dim</u>. Supponiamo $0 < |E| < +\infty$

- $\exists$ K compatto, V aperto: $K \subset E \subset V$ e $|V| < 2|K|$
- $0 < r < d(K, V^c)$
- $\|x\| < r \Rightarrow K \cap (x+K) \neq \emptyset$

  se K e $x+K$ fossero disgiunti si avrebbe

  $2|K| = |K| + |x+K| \leq |V| < 2|K|$ ASSURDO!
- $\forall x \in B_r(0)$ si ha $y = x + z$ con $y, z \in K$

ovvero $\quad x = y - z \in K - K \subset E - E.$

- $B_r(0) \subset E - E$ ▨

Poniamo

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^N$$

(x, y razionalmente equivalenti)

$\mathbb{R}^N/\sim \; = \mathbb{R}^N/\mathbb{Q}^N$ gruppo quoziente

$V \subset \mathbb{R}^N$: V contiene uno ed un solo elemento di $\mathbb{R}^N/\sim$ si dice <u>insieme di Vitali</u>

<u>Oss</u> assioma della scelta $\Rightarrow \exists$ ins. di Vitali ▨

<u>Teorema</u> : V insieme di Vitali $\Rightarrow$ V non misurabile.

<u>Dim</u> . $V_q = V + q \quad q \in \mathbb{Q}^N$

- $q_i \in \mathbb{Q}^N (i = 1, 2)$ e $q_1 \neq q_2 \Rightarrow V_{q_1} \cap V_{q_2} = \phi$
- $\mathbb{R}^N = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^N} V_q$
- $\mathrm{int}(V_q - V_q) = \phi$ $\qquad$ ASSURDO!

$(\mathrm{int}(V_q - V_q) \neq \phi \Rightarrow \exists\, z \in \mathbb{Q}^N\; z \neq 0 : \; z = (q + x) - (q + y) = x - y \in V - V)$

Corollario: E misurabile con $|E|>0$

$$\Downarrow$$

$$\exists\, A \subset E \text{ non misurabile}$$

Dim. $\mathbb{Q}^N = \{q_n\}_{n\geq 1}$ e V ins. di Vitali

- $E_n = E \cap V_{q_n}$ $\quad n \geq 1$
- P.A. E_n misurabile $\forall n \Rightarrow 0 < |E| = \sum_n' |E_n|$
- $\exists\, n : |E_n| > 0 \Rightarrow \mathrm{int}(E_n - E_n) \neq \phi$

$$\Rightarrow \mathrm{int}(V_{q_n} - V_{q_n}) \neq 0 \quad \text{ASSURDO!}$$

(2) metodo I: $\quad \mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)) = \aleph$

$\quad\quad\quad\quad \mathrm{card}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)) = 2^{\aleph}$

metodo II:

- $\phi(x) = x + V(x)$, $x \in [0,1]$ omeomorfismo di $[0,1]$ su $[0$
- $[0,1]\setminus C$ aperto $\Rightarrow [0,1]\setminus C = \bigcup_k J_k$ intv. aperti disgiunt
- V costante su $J_n \Rightarrow V(J_n) = c_n$ $\forall n$
- $\phi([0,1]\setminus C) = \bigcup_n (c_n + J_n) \Rightarrow |\phi([0,1]\setminus C)| \leq \sum_n' |J_n| =$

$$= [0,1]\setminus C = 1$$

- Quindi $|\phi(C)| \geq 1$

- $\exists\, A \subset \phi(C)$ non misurabile .

- $\phi^{-1}(A) \subset C$ (Lebesgue) misurabile ma non Borel mis.

(ϕ manda insiemi di Borel in insiemi di Borel) ∎

Formula di riduzione

Identifichiamo $\mathbb{R}^{M+N}$ con $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$.

Teorema: Siano $E \subset \mathbb{R}^M$, $F \subset \mathbb{R}^N$ insiemi misurabili in $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ rispettivamente. Allora,

a) $E \times F$ e' misurabile in $\mathbb{R}^{M+N}$;

b) $\mathcal{L}^{M+N}(E \times F) = \mathcal{L}^M(E)\,\mathcal{L}^N(F)$ $\quad (0 \cdot \infty = 0!)$.

Dim a) . $\begin{cases} E = B_1 \cup T_1 & B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M) \text{ e } T_1 \subset \mathbb{R}^M \text{ trascurabile} \\ F = B_2 \cup T_2 & B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \text{ e } T_2 \subset \mathbb{R}^N \text{ trascurabile} \end{cases}$

. $E \times F = (B_1 \times B_2) \cup (B_1 \times T_2) \cup (B_2 \times T_1) \cup (T_1 \times T_2)$ con

- $B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{M+N})$ $\quad \longleftarrow$ esercizio!
- $B_1 \times T_2$, $B_2 \times T_1$, $T_1 \times T_2$ trascurabili in $\mathbb{R}^{M+N}$.

b) Dividiamo la dimostrazione in tre passi.

(1) $U \subset \mathbb{R}^M$, $V \subset \mathbb{R}^N$ aperti $\Rightarrow \mathcal{L}^{M+N}(U \times V) = \mathcal{L}^M(U)\,\mathcal{L}^N(V)$.

. Basta $U \subset \mathbb{R}^M$, $V \subset \mathbb{R}^N$ aperti (non vuoti) e limitati

. $\exists$ $\{R_i\}_i$, $\{S_j\}_j$ cubi compatti ... non sovrapposti: $\quad U = \bigcup_i R_i$, $\; V = \bigcup_j S_j$

- $U \times V = \bigcup_{i,j} (R_i \times S_j)$ con $R_i \times S_j$ cubi compatti ... nonsovrappos
- $\mathcal{L}^{M+N}(R_i \times S_j) = \mathcal{L}^M(R_i)\,\mathcal{L}^N(S_j) \quad \forall\, i,j$
- $\mathcal{L}^{M+N}(U \times V) = \sum_{i,j}' \mathcal{L}^M(R_i \times S_j) =$ Fubini-Tonelli!

$$= \sum_{i,j}' \mathcal{L}^M(R_i)\,\mathcal{L}^N(S_j) = \Big(\sum_i' \mathcal{L}^M(R_i)\Big)\Big(\sum_j' \mathcal{L}^M(S_j)\Big) =$$

$$= \mathcal{L}^M(U)\,\mathcal{L}^N(V)$$

(2) $H \subset \mathbb{R}^M$, $K \subset \mathbb{R}^N$ compatti $\Rightarrow \mathcal{L}^{M+N}(H \times K) = \mathcal{L}^M(H)\,\mathcal{L}^N(K)$

- $U \subset \mathbb{R}^M$, $V \subset \mathbb{R}^N$ aperti limitati : $H \subset U$ e $K \subset V$
- $\mathcal{L}^{M+N}(H \times K) \leq \mathcal{L}^{M+N}(U \times V) = \mathcal{L}^M(U)\,\mathcal{L}^N(V)$
- passando all'estremo inferiore su U e V si trova

$$\mathcal{L}^{M+N}(H \times K) \leq \mathcal{L}^M(H)\,\mathcal{L}^N(K)$$

- $W \subset \mathbb{R}^{M+N}$ aperto limitato : $H \times K \subset W$
- $\exists\, U \subset \mathbb{R}^M$, $V \subset \mathbb{R}^N$ aperti limitati : $\begin{cases} H \subset U \text{ e } K \subset V \\ U \times V \subset W \end{cases}$ (*)
- $\mathcal{L}^M(H)\,\mathcal{L}^N(K) \leq \mathcal{L}^M(U)\,\mathcal{L}^N(V) = \mathcal{L}^{M+N}(U \times V) \leq \mathcal{L}^{M+N}(W)$
- passando all'estremo inferiore su W si trova

$$\mathcal{L}^M(H)\,\mathcal{L}^N(K) \leq \mathcal{L}^{M+N}(H \times K).$$

(3) $E \subset \mathbb{R}^M$, $F \subset \mathbb{R}^N$ misurabili $\Rightarrow \mathcal{L}^{M+N}(E \times F) = \mathcal{L}^M(E)\,\mathcal{L}^N(F)$.

- Basta $E \subset \mathbb{R}^M$, $F \subset \mathbb{R}^N$ misurabili e limitati

- $\begin{cases} H \subset \mathbb{R}^M \text{ compatto, } U \subset \mathbb{R}^M \text{ aperto limitato} : & H \subset E \subset U \\ K \subset \mathbb{R}^N \text{ compatto, } V \subset \mathbb{R}^N \text{ aperto limitato} : & K \subset F \subset V \end{cases}$

- $$\begin{aligned} \mathcal{L}^M(H)\mathcal{L}^N(K) = \mathcal{L}^{M+N}(H \times K) &\le \\ \le \mathcal{L}^{M+N}(E \times F) &\le \\ \le \mathcal{L}^{M+N}(U \times V) &= \mathcal{L}^M(U)\mathcal{L}^N(V) \end{aligned}$$

- sup e inf $\Rightarrow \quad \mathcal{L}^{M+N}(E \times F) = \mathcal{L}^M(E)\mathcal{L}^N(F).$ ∎

Dim. di $(*)$

Oss. $\begin{cases} H \subset \mathbb{R}^M, K \subset \mathbb{R}^N \text{ compatti} \\ W \subset \mathbb{R}^{M+N} \text{ aperto} \end{cases} : \quad H \times K \subset W$

- $0 < \delta < d(H \times K, W^c)/2$

- $\begin{cases} U = \{x : d(x, H) < \delta\} \\ V = \{y : d(y, K) < \delta\} \end{cases}$

- $(x,y) \in U \times V \Rightarrow \begin{matrix} \exists\, x' \in H : & \|x - x'\| < \delta \\ \exists\, y' \in K : & \|y - y'\| < \delta \end{matrix} \quad \text{e } (x', y') \in H \times K$

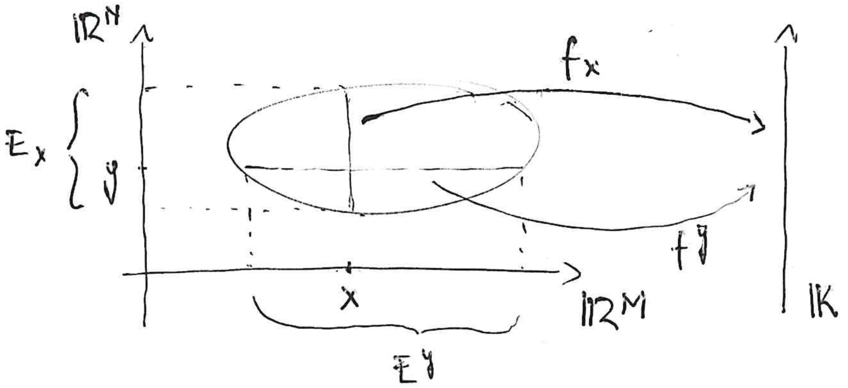
- $$\begin{aligned} \|(x,y) - (x',y')\| &\le \|(x,y) - (x',y)\| + \|(x',y) - (x',y')\| = \\ &= \|x - x'\| + \|y - y'\| < 2\delta < d(H \times K, W^c) \end{aligned}$$

- $(x,y) \in U \times V \Rightarrow d((x,y), H \times K) < 2\delta \Rightarrow U \times V \subset W^c.$ ∎

Notazioni:

- $(x,y) \in \mathbb{R}^{M+N}$ con $x \in \mathbb{R}^M$ e $y \in \mathbb{R}^N$
- $\begin{cases} \pi_1 : \mathbb{R}^{M+N} \to \mathbb{R}^M \\ \pi_2 : \mathbb{R}^{M+N} \to \mathbb{R}^N \end{cases}$ proiezioni canoniche
- $E \subset \mathbb{R}^{M+N} \Rightarrow$ $E_x = \{ y \in \mathbb{R}^N : (x,y) \in E \}$ $x \in \mathbb{R}^M$

  $E^y = \{ x \in \mathbb{R}^M : (x,y) \in E \}$ $y \in \mathbb{R}^M$



- $f : E \to \mathbb{K}\ (\mathbb{R}_\infty)$

  $f_x : E_x \to \mathbb{K}\ (\mathbb{R}_\infty)$ $\quad f_x(y) = f(x,y)$ $\forall y \in E_x$ $(x \in \pi_1(E))$

  $f^y : E^y \to \mathbb{K}\ (\mathbb{R}_\infty)$ $\quad f^y(x) = f(x,y)$ $\forall x \in E^y$ $(y \in \pi_2(E$

Teorema: Sia $E \subset \mathbb{R}^{M+N}$ misurabile in $\mathbb{R}^{M+N}$. Allora, $\exists\, T \subset \mathbb{R}^M$ trascurabile in $\mathbb{R}^M$ t.c.

a) E_x e' misurabile in $\mathbb{R}^N$ $\forall x \in \mathbb{R}^M \setminus T$

b) la funzione $m_E : \mathbb{R}^M \to [0,+\infty]$ definita da

$$m_E(x) = \begin{cases} \mathcal{L}^N(E_x) & x \in \mathbb{R}^M \setminus T \\ +\infty & x \in T \end{cases}$$

e' misurabile in $\mathbb{R}^M$ e si ha

$$(*) \qquad \mathcal{L}^{M+N}(E) = \int_{\mathbb{R}^M} m_E(x)\, d\mathcal{L}^M(x)$$

Oss.

- con abuso di notazione $(*)$ si scrive

$$\mathcal{L}^{M+N}(E) = \int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{L}^N(E_x)\, d\mathcal{L}^M(x)$$

- analogo risultato con $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$ scambiati:

$$\mathcal{L}^{M+N}(E) = \int_{\mathbb{R}^N} m^E(y)\, d\mathcal{L}^N(y)$$

- puo' essere $T \neq \emptyset$ e $\pi_1(E)$ non misurabile!

$A \subset \mathbb{R}$ non misurabile $\Rightarrow$ $E = \{0\} \times A$, $E = A \times \{0\}$ misurabile in $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow E_0 = A$ e $\pi_1(E) = A$. ▨

<u>Oss.</u> (CH) $\Rightarrow \exists\, A \subset [0,1]\times[0,1]$ t.c.

- $(A_x)^c$ numerabile $\forall x \in [0,1]$
- A^y numerabile $\forall y \in [0,1]$

(W. Sierpiński 1919)

- A non misurabile in $\mathbb{R}^2$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 1_A(x,y)\, dy \right) dx = 1$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 1_A(x,y)\, dx \right) dy = 0$$

$\blacksquare$

Lemma 1: Sia $U \subset \mathbb{R}^{M+N}$ aperto. Allora,

a) U_x è aperto in $\mathbb{R}^N$ per ogni $x \in \mathbb{R}^M$;

b) la funzione $x \in \mathbb{R}^M \longmapsto \mathcal{L}^N(U_x) \in [0,+\infty]$ è Borel misurabile in $\mathbb{R}^M$ e si ha

$$\mathcal{L}^{M+N}(U) = \int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{L}^N(U_x)\, d\mathcal{L}^M(x).$$

Dim. a) Ovvio!

b) • $R = [a^1, b^1) \times \ldots \times [a^{M+N}, b^{M+N})$ rettangolo semiaperto
$(a^m < b^m \quad m = 1, \ldots, M+N)$

• $R = S \times T$ con S, T rettangoli semiaperti di $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^N$

• $R_x = \begin{cases} T & x \in S \\ \phi & x \notin S \end{cases}$ e $\mathcal{L}^N(R_x) = \mathcal{L}^N(T)\, 1_S(x) \quad x \in \mathbb{R}^M$

• $x \in \mathbb{R}^M \longmapsto \mathcal{L}^N(R_x)$ Borel misurabile in $\mathbb{R}^M$

• $U \subset \mathbb{R}^{M+N}$ aperto $\Rightarrow \exists\, R_J$ rettangoli semiaperti disgiunti
$U = \bigcup_J R_J$ e $\mathcal{L}^{M+N}(U) = \sum_J{}' \mathcal{L}^{M+N}(R_J)$

• $R_J = S_J \times T_J \quad J \geq 1$

• $I_x = \{J : x \in S_J\} \quad \Rightarrow U_x = \bigcup_{J \in I_x} T_J$

• $J_1, J_2 \in I_x$ e $J_1 \neq J_2 \Rightarrow T_{J_1} \cap T_{J_2} = \phi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^N(U_x) = \sum_{J \in I_x}{}' \mathcal{L}^N(T_J) = \sum_{J \geq 1}{}' \mathcal{L}^N(T_J)\, 1_{S_J}(x)$$
$x \in \mathbb{R}^M$

• $x \in \mathbb{R}^M \longmapsto \mathcal{L}^N(U_x) \in [0,+\infty]$ Borel misurabile

$$\int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{L}^N(U_x)\, d\mathcal{L}^M(x) = \sum_{j\geq 1}{}' \mathcal{L}^N(T_j) \int_{\mathbb{R}^M} 1_{S_j}(x)\, d\mathcal{L}^M(x) =$$

$$= \sum_{j\geq 1}{}' \mathcal{L}^M(S_j)\, \mathcal{L}^N(T_j)$$

$$= \sum_{j\geq 1}{}' \mathcal{L}^{M+N}(R_j) = \mathcal{L}^{M+N}(U). \qquad \blacksquare$$

Lemma 2: Sia $K \subset \mathbb{R}^{M+N}$ compatto. Allora,

a) K_x e' compatto per ogni $x \in \mathbb{R}^M$;

b) la funzione $x \in \mathbb{R}^M \longmapsto \mathcal{L}^N(K_x) \in [0, +\infty)$ e' Borel misurabile in $\mathbb{R}^M$ e si ha

$$\mathcal{L}^{M+N}(K) = \int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{L}^N(K_x)\, d\mathcal{L}^M(x).$$

Dim a) Ovvio!

$$\boxed{\Rightarrow \mathcal{L}^{M+N}(K) = \lim_{j \to +\infty} \mathcal{L}^{M+N}(V_j)}$$

b) . V_j $j \geq 1$ aperti limitati : $V_{j+1} \subset V_j$ $\forall j$ e $K = \bigcap_{j\geq 1} V_j$

. $K_x = \bigcap_{j\geq 1} (V_j)_x$ e $\mathcal{L}^N(K_x) = \lim_{j\to+\infty} \mathcal{L}^N((V_j)_x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^M$

. $x \in \mathbb{R}^M \longmapsto \mathcal{L}^N(K_x)$ Borel misurabile in $\mathbb{R}^M$

. $0 \leq \mathcal{L}^N(K_x) \leq \mathcal{L}^N((V_1)_x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^M$ e $\int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{L}^N((V_1)_x)\, d\mathcal{L}^M(x) = \mathcal{L}^{M+N}(V_1) < +\infty$

. CD $\Rightarrow$ $\int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{L}^N(K_x)\, d\mathcal{L}^M(x) = \lim_{j\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{L}^N((V_j)_x)\, d\mathcal{L}^M(x) =$

$$= \lim_{j\to+\infty} \mathcal{L}^{M+N}(V_j) = \mathcal{L}^{M+N}(K). \qquad \blacksquare$$

Dim (1) $E \subset \mathbb{R}^{M+N}$ misurabile e limitato

- $\exists\, K_j$ compatto, V_j aperto limitato $(j \geq 1)$ t.c.

$$K_j \subset E \subset V_j \quad e \quad \mathcal{L}^{M+N}(V_j \setminus K_j) \leq 1/j$$

per ogni $j \geq 1$

- supponiamo $K_j \subset K_{j+1}$ e $V_{j+1} \subset V_j$ per ogni j

- $K_j \subset E \subset V_j \Rightarrow (K_j)_x \subset E_x \subset (V_j)_x \quad \forall x \in \mathbb{R}^M$

- $$\begin{cases} K_j \subset K_{j+1} \\ V_{j+1} \subset V_j \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathcal{L}^N((K_j)_x) \leq \mathcal{L}^N((K_{j+1})_x) \\ \mathcal{L}^N((V_j)_x) \leq \mathcal{L}^N((V_{j+1})_x) \end{array} \quad x \in \mathbb{R}^M$$

- $$\begin{cases} k(x) = \sup_j \mathcal{L}^N((K_j)_x) = \lim_{j \to +\infty} \mathcal{L}^N((K_j)_x) \\ v(x) = \inf_j \mathcal{L}^N((V_j)_x) = \lim_{j \to +\infty} \mathcal{L}^N((V_j)_x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^M$$

- $k, v : \mathbb{R}^M \to [0, +\infty)$ Borel misurabili in $\mathbb{R}^M$

- Fatou

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^M} [v(x) - k(x)]\, d\mathcal{L}^M(x) \leq \liminf_{j \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^M} [\mathcal{L}^N((V_j)_x) - \mathcal{L}^N((K_j)_x)]\, d\mathcal{L}^M(x) =$$

$$= \liminf_{j \to +\infty} \mathcal{L}^{M+N}(V_j \setminus K_j) = 0$$

- $T = \{k < v\}$ trascurabile in $\mathbb{R}^M$

- $x \in \mathbb{R}^M \setminus T \Rightarrow$ E_x misurabile
  $m_E(x) = k(x) = v(x)$

- $m_E = k = v$ q.o. in $\mathbb{R}^M \Rightarrow m_E$ misurabile in $\mathbb{R}^M$

- $$\mathcal{L}^{M+N}(K_j) = \int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{L}^N((K_j)_x)\, d\mathcal{L}^M(x) \le$$
$$\le \int_{\mathbb{R}^M} m_E(x)\, d\mathcal{L}^M(x) \le$$
$$\le \int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{L}^N((V_j)_x)\, d\mathcal{L}^M(x) = \mathcal{L}^{M+N}(V_j) \qquad \forall j$$

- $j \to +\infty \implies \mathcal{L}^{M+N}(E) = \int_{\mathbb{R}^M} m_E(x)\, d\mathcal{L}^M(x)$.

(2) $E \subset \mathbb{R}^{M+N}$ misurabile e illimitato

- $E_n = E \cap B_n[0]$ $n \geq 1$ misurabile e limitato in $\mathbb{R}^{M+N}$

- $\begin{cases} \exists\, T_n \text{ trascurabile in } \mathbb{R}^M : (E_n)_x \text{ misurabile in } \mathbb{R}^N\ \forall x \in \mathbb{R}^M \setminus T_n \\ m_n = m_{E_n} : \mathbb{R}^M \to [0,+\infty] \text{ misur. in } \mathbb{R}^M : \mathcal{L}^{M+N}(E_n) = \int_{\mathbb{R}^M} m_n(x)\, d\mathcal{L}^M(x) \end{cases}$

- possiamo supporre $T_n \subset T_{n+1} \implies m_n \le m_{n+1}$ in $\mathbb{R}^M$

- $T = \bigcup_n T_n$ trascurabile in $\mathbb{R}^M$

- $E_x = \bigcup_n (E_n)_x$ misurabile in $\mathbb{R}^N$ $\forall x \in \mathbb{R}^M \setminus T$

- $m_E(x) = \sup_n m_n(x) = \lim_{n \to +\infty} m_n(x)$ $x \in \mathbb{R}^M$ misurabile in $\mathbb{R}^M$

- $\mathcal{L}^{M+N}(E_n) = \int_{\mathbb{R}^M} m_n(x)\, d\mathcal{L}^M(x)$ $n \geq 1$

- $n \to +\infty$ e CM + cont. $\uparrow \implies \mathcal{L}^{M+N}(E) = \int_{\mathbb{R}^M} m_E(x)\, d\mathcal{L}^M(x)$.

$\blacksquare$

__Teorema__ (G. Fubini - L. Tonelli I)

Sia $f: \mathbb{R}^{M+N} \to [0,+\infty]$ misurabile in $\mathbb{R}^{M+N}$.
Allora, $\exists\, T \subset \mathbb{R}^M$ trascurabile t.c.

a) $y \in \mathbb{R}^N \longmapsto f_x(y) \in [0,+\infty]$ misurabile in $\mathbb{R}^N$ $\forall x \in \mathbb{R}$

b) la funzione $\varphi: \mathbb{R}^M \to [0,+\infty]$ definita da

$$\varphi(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\, d\mathcal{L}^N(y) & x \in \mathbb{R}^M \setminus T \\ +\infty & x \in T \end{cases}$$

è misurabile in $\mathbb{R}^M$ e si ha

$$\int_{\mathbb{R}^{M+N}} f(x,y)\, d\mathcal{L}^{M+N}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^M} \varphi(x)\, d\mathcal{L}^M(x).$$

__Oss.__

- con abuso di notazione

$$\int_{\mathbb{R}^{M+N}} f(x,y)\, d\mathcal{L}^{M+N}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^M}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\, d\mathcal{L}^N(y)\right) d\mathcal{L}^M(x)$$

- idem con x e y scambiati:

$$\int_{\mathbb{R}^M}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\, d\mathcal{L}^N(y)\right) d\mathcal{L}^M(x) = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\, d\mathcal{L}^M(x)\right) d\mathcal{L}^N(y)$$

- se $E \subset \mathbb{R}^{M+N}$ è misurabile in $\mathbb{R}^{M+N}$ e $f: E \to [0,+\infty]$ è misurabile in E $\exists\, T \subset \mathbb{R}^M$ trascurabile tale che

a) E_x e' misurabile in $\mathbb{R}^N$ e $f_x : E_x \to [0,+\infty]$ e' misurabile in E_x per ogni $x \in \mathbb{R}^M \setminus T$

b) la funzione $\varphi : \mathbb{R}^M \to [0,+\infty]$ definita da

$$\varphi(x) = \begin{cases} \int_{E_x} f(x,y)\, d\mathcal{L}^N(y) & x \in \mathbb{R}^M \setminus T \\ +\infty & x \in T \end{cases}$$

e' misurabile in $\mathbb{R}^M$ e si ha

$$\int_E f(x,y)\, d\mathcal{L}^{M+N}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^M} \varphi(x)\, d\mathcal{L}^M(x).$$

Oss. Se f non e' misurabile si può avere

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx = 1$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy = 0$$

(esempio di Sierpiński con (CH)).

Teorema (G. Fubini - L. Tonelli II)

Sia $f: \mathbb{R}^{M+N} \to \mathbb{K}$ integrabile in $\mathbb{R}^{M+N}$. Allora, $\exists\, T \subset \mathbb{R}^M$ trascurabile t.c.

a) la funzione $y \in \mathbb{R}^N \mapsto f_x(y) \in \mathbb{K}$ è integrab in $\mathbb{R}^N$ $\forall x \in \mathbb{R}^M \setminus T$;

b) la funzione $\varphi : \mathbb{R}^M \mapsto \mathbb{K}$ definita da

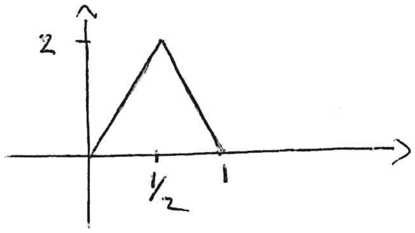
$$\varphi(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\, d\mathcal{L}^N(y) & x \in \mathbb{R}^M \setminus T \\ 0 & x \in T \end{cases}$$

è integrabile in $\mathbb{R}^M$ e si ha

$$\int_{\mathbb{R}^{M+N}} f(x,y)\, d\mathcal{L}^{M+N}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^M} \varphi(x)\, d\mathcal{L}^M(x).$$

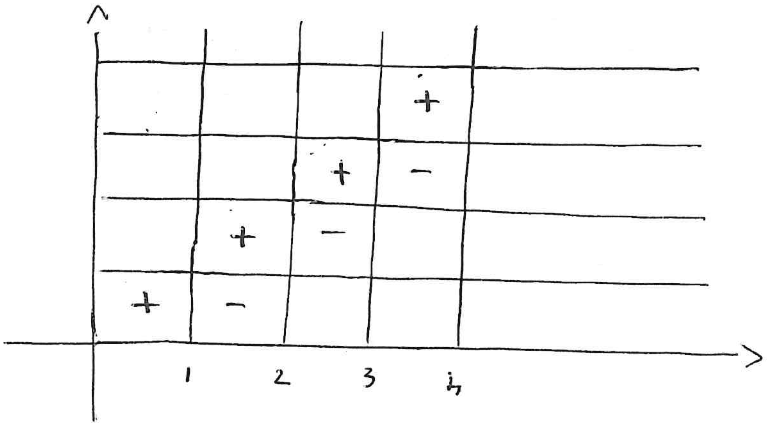
Esempio:

$$\varphi(x) = \max\{\min\{2x, 4x-4\}, 0\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

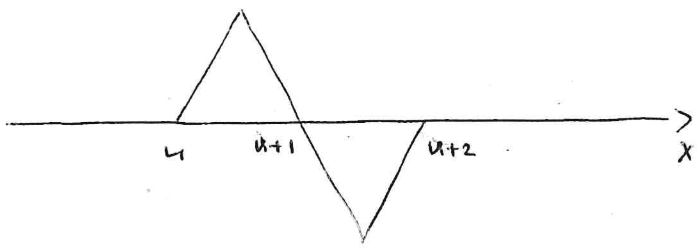


- $\int_0^1 \varphi(x)\,dx = 1$
- $\varphi_n(x) = \varphi(x-n) \quad x \in \mathbb{R} \quad n \geq 0$
- $f(x,y) = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} [\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)]\varphi_n(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$f(x,y)$



$\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)$



- f continua in $\mathbb{R}^2$ con $\int_{\mathbb{R}^2} |f| = +\infty$
- $f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \text{ e } y \leq 0 \\ [\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)]\varphi_n(y) & x \in \mathbb{R} \text{ e } n \leq y \leq n+1 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$
- $f(x,y) = \begin{cases} 0 & y \in \mathbb{R} \text{ e } x \leq 0 \\ \varphi(x)\varphi(y) & y \in \mathbb{R} \text{ e } 0 \leq x \leq 1 \\ -\varphi_n(x)\varphi_{n-1}(y) + \varphi_n(x)\varphi_n(y) & y \in \mathbb{R} \text{ e } n \leq x \leq n+1 \quad (n \in \mathbb{N} \end{cases}$

- $$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} \varphi_{n+1}(x)\,dx\right)\varphi_n(y) = 0 & n \le y \le n+1 \quad n \geq \end{cases}$$

- $$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \varphi(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,dy = \varphi(x) & 0 \le x \le 1 \\ -\varphi_n(x)\int_{\mathbb{R}} \varphi_{n-1}(y)\,dy + \varphi_n(x)\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y)\,dy = -\varphi_n(x) + \varphi_n(x) = 0 & n \le x \le n+1 \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Quindi si ha

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\right)dy = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx =$$

SPAZI LCH E MISURE DI RADON

Spazi LCH

X LCH se
- X e' sp. topologico di Hausdorff
- $\forall x \in X \ \exists U_x$ intorno di x compatto (

Oss.

- LCH $\equiv$ sp. topologico di Hausdorff localmente compatt
- (*) equivale a: $\forall x \in X \ \exists U$ aperto: $-\ x \in U$, $-\ \overline{U}$ compatto ▨

Oss. X sp. topologico di Hausdorff

$$\begin{cases} K \text{ compatto} \\ y \notin K \end{cases} \Rightarrow \exists \ V \text{ aperto}: \ K \subset V \text{ e } y \notin \overline{V} \quad ▨$$

Proposizione: Siano X LCH e K compatto, U aperto t.c

$K \subset U$.

Allora, $\exists \ V$ aperto t.c.

(**)
- $\overline{V}$ compatto;
- $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Dim. . $\forall x \in K \ \exists U_x$ intorno aperto di x: $\overline{U}_x$ compatto

. K compatto $\Rightarrow \exists \ U_m = U_{x_m}$ $m=1, \dots, n$: $\overline{U}_m$ compatto, $K \subset U_1 \cup \dots \cup U_n = G$

- $K \subset G$ e $\overline{G}$ compatto
- $U = X \Rightarrow V = G$ ed e' finito
- $U \neq X \Rightarrow F = U^c$ chiuso e $F \cap K = \phi$
- $K \cap F = \phi \Rightarrow \forall y \in F \ \exists \ W_y$ aperto : $\begin{array}{l} - K \subset W_y \\ - y \notin \overline{W}_y \end{array}$
- $\{F \cap \overline{G} \cap \overline{W}_y\}_{y \in F}$ chiusi con $\bigcap_{y \in F} F \cap \overline{G} \cap \overline{W}_y = \phi$
- $\overline{G}$ compatto $\Rightarrow \exists \ W_h = W_{y_h} \ h = 1, .., k : F \cap \overline{G} \cap (\overline{W}_1 \cap .. \cap \overline{W}_k) =$
- $V = G \cap W_1 \cap \ldots \cap W_k$ aperto t.c.
  - $\overline{V} \subset \overline{G} \cap \overline{W}_1 \cap \ldots \cap \overline{W}_k \Rightarrow \overline{V}$ compatto
  - $\overline{V} \cap F = \phi \Rightarrow \overline{V} \subset F^c = U$. ▨

Oss.

a) (**) equivale a $\left[\begin{array}{c} K \text{ compatto, } F \text{ chiuso e } K \cap F = \phi \\ \Downarrow \\ \exists \, U, V \text{ aperti} : \begin{array}{l} - K \subset V, \ F \subset U \\ - U \cap V = \phi \\ - \overline{V} \text{ compatto} \end{array} \end{array} \right]$

In particolare,

$$X \text{ LCH} \Rightarrow X \text{ regolare } (T_3)$$

b) $\forall x \in X \ \exists \ \mathcal{U}(x)$ base d'intorni di x con $\overline{U}_x$ compatto per ogni $U_x \in \mathcal{U}(x)$. ▨

Esempi:

- U aperto, F chiuso di $\mathbb{R}^N$ sono LCH
- toro (unidimensionale) $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ e' spazio di Hausdorff compatto (LCH in particolare) ▨

- spazi vettoriali di funzioni continue (X sp. topo

$C(X) = \{ f : X \to \mathbb{K} \text{ continua} \}$

$C_b(X) = \{ f : X \to \mathbb{K} \text{ continua e limitata} \}$

$C_c(X) = \{ f : X \to \mathbb{K} \text{ continua con } \operatorname{supp}(f) \text{ compatto} \}$

ove $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{f \neq 0\}}$.

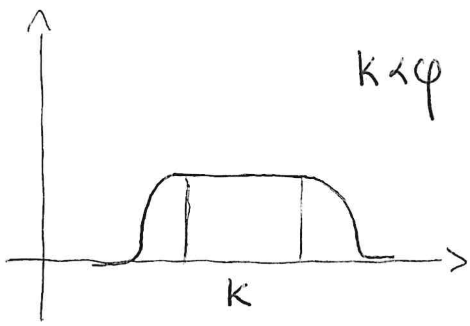
Oss. $C_c(X) \subset C_b(X) \subset C(X)$. ▨

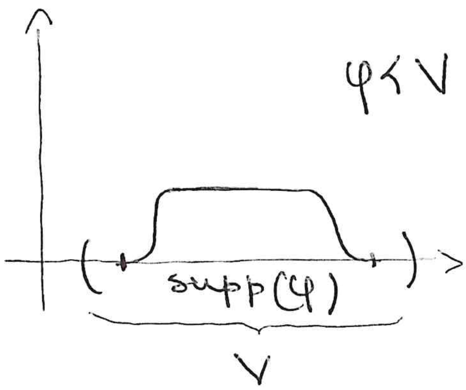
Notazione: K compatto, V aperto

- $K \prec \varphi \equiv \varphi \in C_c(X)$ reale : $\begin{cases} 0 \le \varphi(x) \le 1 & \forall x \in X \\ \varphi(x) = 1 & \forall x \in K \end{cases}$

- $\varphi \prec V \equiv$ __________ : $\begin{cases} 0 \le \varphi(x) \le 1 & \forall x \in X \\ \operatorname{supp}(\varphi) \subset K \end{cases}$

- $K \subset V \Rightarrow [K \prec \varphi \prec V \Leftrightarrow K \prec \varphi \text{ e } \varphi \prec V]$





■

<u>Teorema</u> (P. Urysohn) Siano X LCH e K compatto, V aperto t.c. $K \subset V$. Allora, $\exists\, \varphi \in C_c(X)$ t.c.

$$K \prec \varphi \prec V.$$

<u>Dim</u>. ..... ■

<u>Oss</u>. LCH è $T_{3.5}$ ma non è in genere T_4 (esempi non banali). ■

<u>Teorema</u> (esaustione compatta)

Sia X LCH e σ-compatto. Allora, $\exists\, K_n$ $n \geq$ t.c.

- K_n compatto e $K_n \subset \mathrm{int}(K_{n+1})$ $\forall n$
- $X = \bigcup_n K_n$

<u>Oss</u>. $\{K_n\}_n$ esaustione compatta di X ■

Dim.

- X σ-compatto $\Rightarrow$ $\exists\, H_n$ $(n \geq 1)$ compatti : $X = \bigcup_n H_n$
- H_1 compatto $\Rightarrow$ $\exists\, U$ aperto : $\begin{cases} H_1 \subset U \\ \overline{U} \text{ compatto} \end{cases}$
- $K_1 = \overline{U}$ compatto
- $H_2 \cup K_1$ compatto $\Rightarrow$ $\exists\, V$ aperto : $\begin{cases} H_2 \cup K_1 \subset V \\ \overline{V} \text{ compatto} \end{cases}$
- $K_2 = \overline{V}$ compatto : $K_1 \subset \operatorname{int}(K_2)$ e $H_1 \cup H_2 \subset K_2$
- $H_3 \cup K_2$ compatto $\Rightarrow$ $\exists\, W$ aperto : $\begin{cases} H_3 \cup K_2 \subset W \\ \overline{W} \text{ compatto} \end{cases}$
- $K_3 = \overline{W}$ compatto : $K_2 \subset \operatorname{int}(K_3)$ e $H_1 \cup H_2 \cup H_3 \subset K$

Iterando $\exists$ K_n $(n \geq 1)$ compatti t.c.

- $K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1})$ $\forall n$
- $H_1 \cup \dots \cup H_n \subset K_n$ $\forall n$

$\blacksquare$

Misure di Radon

- X LCH
- Una misura positiva di Borel $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ in X si dice
  - esternamente regolare in $E \in \mathcal{S}$ se
    $$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U \text{ e } U \text{ aperto}\};$$
  - internamente regolare in $E \in \mathcal{S}$ se
    $$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ e } K \text{ compatto}\};$$
  - regolare in $E \in \mathcal{S}$ se e' esternamente e internamente regolare in E.
- μ e' esternamente/internamente regolare ovvero regolare se e' tale in ogni insieme $E \in \mathcal{S}$

Def. Sia X LCH. Una misura positiva di Borel $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ in X t.c.

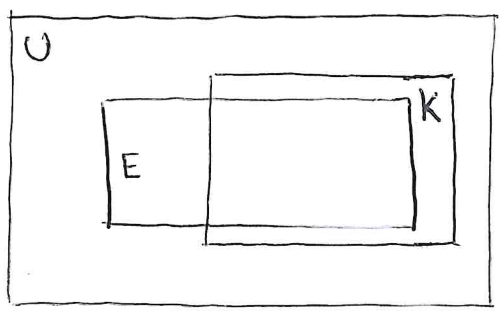
- $\mu(K) < +\infty \quad \forall K$ compatto;
- μ e' esternamente regolare;
- μ e' internamente regolare negli aperti;

si dice <u>misura positiva di Radon in X</u>. $\blacksquare$

<u>Teorema</u>: Siano X LCH, $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva di Radon in X e $E \in \mathcal{S}$ insieme σ-finito. Allora, μ è internamente regolare in E.

<u>Dim</u>. (i) $\mu(E) < +\infty$

- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, U$ aperto : $E \subset U$ e $\mu(U) < \mu(E) + \varepsilon/2$
- $\exists\, K$ compatto : $K \subset U$ e $\mu(K) > \mu(U) - \varepsilon/2$



- $K \setminus E \subset U \setminus E \Rightarrow \mu(K \setminus E) \le \mu(U \setminus E) < \varepsilon/2$
- $\exists\, V$ aperto : $K \setminus E \subset V$ e $\mu(V) < \varepsilon/2$
- $H = K \setminus V$ compatto
- $x \in H \Rightarrow \begin{matrix} x \in K \\ x \notin V \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x \in K \\ x \notin K \setminus E \end{matrix} \Rightarrow x \in E$
- $\mu(H) = \mu(K) - \mu(K \cap V) > \mu(U) - \varepsilon/2 - \mu(V) >$

$$> \mu(U) - \varepsilon \ge \mu(E) - \varepsilon$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0$ $\exists H$ compatto: $H \subset E$ e $\mu(H) \geq \mu(E) - \varepsilon$

(2) $\mu(E) = +\infty$ e E σ-finito

- E σ-finito $\Rightarrow \exists E_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$: $E_n \subset E_{n+1}$, $\mu(E_n) < +\infty$ $\forall n$ e $E = \bigcup_n E$
- $M > 0 \Rightarrow \exists n \geq 1 : \mu(E_n) > M$
- (1) $\Rightarrow \exists K$ compatto : $K \subset E_n$ e $\mu(K) > M$

Quindi $\forall M > 0$ $\exists K$ compatto: $K \subset E$ e $\mu(K) > M$. ▨

<u>Corollario</u>: Siano X LCH e $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow [0, +\infty]$ misura positiva di Radon in X. Allora,

a) μ σ-finita $\Rightarrow$ μ regolare;

b) X σ-compatto $\Rightarrow$ μ regolare.

<u>Teorema</u>: Siano X LCH, $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ misura positiva di Radon σ-finita in X e $E \in \mathcal{S}$. Allora,

a) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists F_\varepsilon$ chiuso, V_ε aperto : $\begin{cases} F_\varepsilon \subset E \subset V_\varepsilon \\ \mu(V_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon \end{cases}$

b) $\exists F \in \tilde{\mathcal{F}}_\sigma, G \in \mathcal{G}_\delta$: $\begin{cases} F \subset E \subset G \\ \mu(G \setminus F) = 0 \end{cases}$

<u>Dim</u>. Si ripete la dimostrazione fatta per la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$.

- μ σ-finita $\Rightarrow \exists\, X_n \in \mathcal{S}\ (n \geq 1) : \mu(X_n) < +\infty\ \forall n$ e $X = \bigcup_n X_n$

a) $\cdot$ $\mu(E \cap X_n) < +\infty \Rightarrow \exists\, V_n$ aperto : $\begin{array}{l} E \cap X_n \subset V_n \\ \mu(V_n \setminus (E \cap X_n)) \leq \varepsilon/2 \end{array}$

- $V_\varepsilon = \bigcup_n V_n$ aperto : $E \subset V_\varepsilon$
- $V_\varepsilon \setminus E \subset \bigcup_n (V_n \setminus (E \cap X_n)) \Rightarrow \mu(V_\varepsilon \setminus E) \leq \varepsilon/2$
- idem con E^c e $F_\varepsilon = V_\varepsilon^c$

b) $\cdot$ $\forall n\ \exists\, F_{1/n}$ chiuso, $V_{1/n}$ aperto: $\begin{cases} F_{1/n} \subset E \subset V_{1/n} \\ \mu(V_{1/n} \setminus F_{1/n}) \leq 1/n \end{cases}$

- $F = \bigcup_n F_{1/n} \in \mathcal{F}_\sigma$, $G = \bigcap_n G_{1/n} \in \mathcal{G}_\delta$: $\begin{cases} F \subset E \subset G \\ \mu(G \setminus F) = 0 \end{cases}$ ▨

<u>Oss</u>.

- Se $\mu(E) < +\infty$ in (a) si può prendere K_ε compatto al posto di F_ε chiuso.
- In (b) si può prendere $F_\varepsilon = \bigcup_{n \geq 1} K_n$ con K_n compatto
- μ completa $\Rightarrow$ [(a) o (b) $\Rightarrow E \in \mathcal{S}$]. ▨

Teorema: Siano X LCH con aperti σ-comp e $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva di Borel in X t.c.

- $\mu(K) < +\infty \quad \forall K$ compatto;
- $\forall E \in \mathcal{S} \ \exists B \in \mathcal{B}(X) : E \subset B$ e $\mu(E) = \mu(B)$.

Allora, μ e' una misura positiva di Radon in X regolare.

Dim. Si ripete la dimostrazione fatta in $\mathbb{R}^N$

Misure di Radon e funzionali lineari positivi

. X LCH e $L: C_c(X) \to \mathbb{K}$ funzionale lineare ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).

L si dice positivo su $C_c(X)$ se

$$\varphi \in C_c(X) \text{ reale con } \varphi(x) \geq 0 \ \forall x \in X \Rightarrow L\varphi \geq 0$$

. $\mu: \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ misura positiva di Radon in X

$$f \in C_c(X) \Rightarrow \begin{cases} - \ f \text{ Borel misur.} \Rightarrow f \ \mathcal{S}\text{-misur.} \\ - \ \int_X |f| d\mu \leq \|f\|_u \cdot \mu(\text{supp}(f)) < +\infty \end{cases}$$

Quindi ogni $f \in C_c(X)$ e' μ-integrabile in X e

$$L_\mu: C_c(X) \to \mathbb{K} \qquad L_\mu f = \int_X f d\mu, \quad f \in C_c(X),$$

e' un funzionale lineare positivo su $C_c(X)$.

<u>Teorema</u> (F. Riesz):

Siano X LCH e $L: C_c(X) \to \mathbb{K}$ funzionale lineare positivo su $C_c(X)$. Allora, $\exists \ \mu: \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ misura positiva di Radon in X completa t.c.

$$Lf = \int_X f d\mu, \qquad f \in C_c(X).$$

Inoltre, μ e' univocamente determinata su $\mathcal{B}(X)$.

Dim. Appunti ▨

Esempi:

a) X LCH e $x_0 \in X$

$$L: C_c(X) \longrightarrow \mathbb{K} \qquad Lf = f(x_0), \quad f \in C_c(X).$$

- L funzionale lineare positivo su $C_c(X)$
- la misura positiva di Radon in X completa che rappresenta L è la delta di Dirac $\delta_{x_0} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,1]$

$$f(x_0) = \int_X f \, d\delta_{x_0}, \quad f \in C_c(X)$$

b) $X = \mathbb{R}^N$

L'integrale di Riemann

$$Lf = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx, \qquad f \in C_c(\mathbb{R}^N),$$

è un funzionale lineare positivo su $C_c(\mathbb{R}^N)$.
La misura positiva di Radon in $\mathbb{R}^N$ completa che lo rappresenta è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ (metodo alternativo per costruire la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$). ▨

Funzioni misurabili e funzioni continue

Teorema (N. Lusin): Siano X LCH, $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva di Radon in X e $f : X \to \mathbb{K}$ funzione t.c.

- f e' $\mathcal{S}$-misurabile;
- $\mu(\{f \neq 0\}) < +\infty$.

Allora,

a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi_\varepsilon \in C_c(X) : \mu(\{\varphi_\varepsilon \neq f\}) \leq \varepsilon$;

b) se f e' limitata si puo' avere

$$\sup_{x \in X} |\varphi_\varepsilon(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Dim a) Dividiamo la dim. in 4 passi.

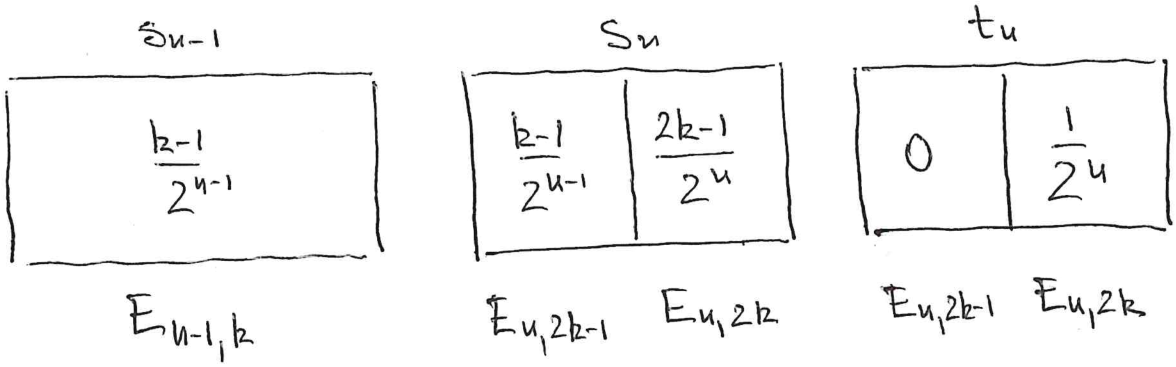
① $\overline{\{f \neq 0\}}$ compatto e f reale con $0 \leq f < 1$

- $E_{n,k} = \left\{ \frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n} \right\}$ $k = 1, \dots, 2^n$ e $n \geq 0$
- $E_{n,1}, \dots, E_{n,2^n}$ partizione $\mathcal{S}$-misur. di X $\forall n$
- $s_n = \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{E_{n,k}}$ $n \geq 0$

- $s_n : X \to [0,1)$ semplice, $\mathcal{S}$-misurabile con
  - $0 \le s_n \le s_{n+1}$ in X $\forall n$;
  - $s_n \to f$ uniformemente in X per $n \to +\infty$

- $t_n = s_n - s_{n-1} \quad n \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} t_1 + \dots + t_n = s_n - s_0 = s_n & n \geq \\ f = \sum'_{n \geq 1} t_n \text{ unif. in } X \end{cases}$

- $t_n = s_n - s_{n-1}$ e $n \geq 2$



- $E_{n-1,k} = E_{n,2k-1} \cup E_{n,2k} \quad k = 1, \dots, 2^{n-1}$ e $n \geq 1$

- $t_n = s_n - s_{n-1} =$ (vale anche per $n=1$!

$$= \sum'_{1 \le k \le 2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{E_{n,k}} - \sum'_{1 \le h \le 2^{n-1}} \frac{h-1}{2^{n-1}} 1_{E_{n-1,h}} =$$

$$= \cancel{\sum'_{1 \le h \le 2^{n-1}} \frac{h-1}{2^{n-1}} 1_{E_{n,2h-1}}} + \sum'_{1 \le h \le 2^{n-1}} \frac{2h-1}{2^n} 1_{E_{n,2h}} +$$

$$- \cancel{\sum'_{1 \le h \le 2^{n-1}} \frac{h-1}{2^{n-1}} 1_{E_{n,2h-1}}} - \sum'_{1 \le h \le 2^{n-1}} \frac{h-1}{2^{n-1}} 1_{E_{n,2h}} =$$

$$= \sum'_{1 \le h \le 2^{n-1}} \left(\frac{2h-1}{2^n} - \frac{h-1}{2^{n-1}} \right) 1_{E_{n,2h}} =$$

$$= \sum'_{1 \le h \le 2^{n-1}} \frac{1}{2^n} 1_{E_{n,2h}} \qquad n \geq 1$$

- $E_n = E_{n,2} \cup E_{n,4} \cup \dots \cup E_{n,2^n} \quad n \geq 1 \Rightarrow t_n = \frac{1}{2^n} \mathbb{1}_{E_n} \quad n \geq$

- $E_n \in \mathcal{S}$ e $E_n \subset \{f \neq 0\} \ \forall n \geq 1 \Rightarrow \mu(E_n) < +\infty \quad n \geq$

- $\overline{\{f \neq 0\}}$ compatto $\Rightarrow \exists V$ aperto: $\overline{\{f \neq 0\}} \subset V$ e $\bar{V}$ compatt

- $\mu(E_n) < +\infty \Rightarrow \exists K_n$ compatto, V_n aperto: $\begin{cases} K_n \subset E_n \subset V_n \subset V \\ \mu(V_n \setminus K_n) \leq \varepsilon/2^n \end{cases}$

- Urysohn $\Rightarrow \exists \varphi_n \in C_c(X) : K_n \prec \varphi_n \prec V_n \quad n \geq 1$

- $\varphi_\varepsilon = \sum_{n \geq 1}' \frac{1}{2^n} \varphi_n$ convergenza totale in X

- φ_ε continua e $\varphi_\varepsilon = 0$ in $(\bar{V})^c \Rightarrow \varphi_\varepsilon \in C_c(X)$

- $x \in \left(\bigcup_n (V_n \setminus K_n) \right)^c = \bigcap_n (K_n \cup V_n^c) \Rightarrow \forall n \ x \in K_n$ o $x \notin V_n$

- $\begin{cases} x \in K_n \Rightarrow \frac{1}{2^n} \varphi_n(x) = \frac{1}{2^n} = t_n(x) \\ x \notin V_n \Rightarrow \frac{1}{2^n} \varphi_n(x) = 0 = t_n(x) \end{cases} \quad \forall n$

- $x \in \left(\bigcup_n (V_n \setminus K_n) \right)^c \Rightarrow \varphi_\varepsilon(x) = \sum_{n \geq 1}' \frac{1}{2^n} \varphi_n(x) = \sum_{n \geq 1}' t_n(x) = f(x)$

- $\{\varphi_\varepsilon \neq f\} \subset \bigcup_n (V_n \setminus K_n)$ e $\mu(\{\varphi_\varepsilon \neq f\}) \leq \sum_{n \geq 1}' \varepsilon/2^n = \varepsilon$.

(2) $\overline{\{f \neq 0\}}$ compatto e f limitata

- f limitata $\Rightarrow \exists M > 0 : |f(x)| < M \quad \forall x \in X$

- $f = u + iv = (u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-)$ con $u, v : X \to \mathbb{R}$ ($v = 0$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- $u^{\pm}/M$, $v^{\pm}/M$ come in (1)
- (1) $\Rightarrow \exists\, \psi_\varepsilon^{\pm}, \chi_\varepsilon^{\pm} \in C_c(X) : \begin{cases} \mu(\{\psi_\varepsilon^{\pm} \neq u^{\pm}/M\}) \leq \varepsilon/4 \\ \mu(\{\chi_\varepsilon^{\pm} \neq v^{\pm}/M\}) \leq \varepsilon/4 \end{cases}$
- $\varphi_\varepsilon = M(\psi_\varepsilon^{+} - \psi_\varepsilon^{-}) + iM(\chi_\varepsilon^{+} - \chi_\varepsilon^{-})$
- $\varphi_\varepsilon \in C_c(X)$ e $\underbrace{\{\varphi_\varepsilon \neq f\} \subset \bigcup_{\pm} \left(\{\psi_\varepsilon^{\pm} \neq u^{\pm}/M\} \cup \{\chi_\varepsilon^{\pm} \neq v^{\pm}/M\} \right)}$

$$\Downarrow$$

$$\mu(\{\varphi_\varepsilon \neq f\}) \leq \varepsilon$$

(3) $\mu(\{f \neq 0\}) < +\infty$ e f limitata

- $\mu(\{f \neq 0\}) < +\infty \Rightarrow \exists\, K$ compatto: $K \subset \{f \neq 0\}$ e $\mu(\{f \neq 0\} \setminus K) \leq \varepsilon/2$
- $g = f \mathbb{1}_K$ come in (2)
- (2) $\Rightarrow \exists\, \varphi_\varepsilon \in C_c(X) : \mu(\{\varphi_\varepsilon \neq g\}) \leq \varepsilon/2$
- $\{\varphi_\varepsilon \neq f\} \subset \{\varphi_\varepsilon \neq g\} \cup (\{f \neq 0\} \setminus K) \Rightarrow \mu(\{\varphi_\varepsilon \neq f\}) \leq \varepsilon$.

(4) $\mu(\{f \neq 0\}) < +\infty$ e f illimitata

- $E_n = \{|f| \leq n\}$ $n \geq 1$ $\Rightarrow$ $E_n \in \mathcal{S}$ e $E_n \subset E_{n+1}$ $\forall n$; $\bigcup_n E_n = X$
- $\{f \neq 0\} \cap E_{n+1} \subset \{f \neq 0\} \cap E_n$ e $\mu(\{f \neq 0\} \setminus E_n) < +\infty$ $\forall n$

$$\Downarrow$$

$$\mu(\{f \neq 0\} \setminus E_n) \longrightarrow 0 \quad n \to +\infty$$

- $n \geq 1$: $\mu(\{f \neq 0\} \setminus E_n) \leq \varepsilon/2$
- $g = f \mathbb{1}_{E_n}$ come in 3
- 3 $\Rightarrow \exists\, \varphi_\varepsilon \in C_c(X) : \mu(\{\varphi_\varepsilon \neq g\}) \leq \varepsilon/2$
- $\{\varphi_\varepsilon \neq f\} \subset \{\varphi_\varepsilon \neq g\} \cup (\{f \neq 0\} \setminus E_n) \Rightarrow \mu(\{\varphi_\varepsilon \neq f\}) \leq \varepsilon$

b) Poniamo

$$M = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

e supponiamo $M > 0$ altrimenti non c'è nulla da provare

- $P_M(z) = \begin{cases} z & |z| \leq M \\ Mz/|z| & |z| > M \end{cases}$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ analogo)
- $P_M \in Lip(\mathbb{K})$ con $Lip(P_M) = 1$

$$|P_M(z) - P_M(w)| \leq |z - w| \, , \quad z, w \in \mathbb{K}$$

- $|f(x)| \leq M \ \forall x \in X \Rightarrow P_M(f(x)) = f(x) \ \forall x \in X$
- (a) $\Rightarrow \exists\, \psi_\varepsilon \in C_c(X) : \mu(\{\psi_\varepsilon \neq f\}) \leq \varepsilon$
- $\varphi_\varepsilon = P_M \circ \psi_\varepsilon \Rightarrow \varphi_\varepsilon \in C_c(X)$ e $\sup_{x \in X} |\varphi_\varepsilon(x)| \leq M$
- $|\varphi_\varepsilon(x) - f(x)| = |P_M(\psi_\varepsilon(x)) - P_M(f(x))| \leq |\psi_\varepsilon(x) - f(x)| \ \forall x$
- $\{\varphi_\varepsilon \neq f\} \subset \{\psi_\varepsilon \neq f\} \Rightarrow \mu(\{\varphi_\varepsilon \neq f\}) \leq \varepsilon$. ▨

<u>Corollario 1</u>: Siano X LCH, $\mu: \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva di Radon in X e $f: X \to \mathbb{K}$ funzione t.c.

- f e' $\mathcal{S}$-misurabile;
- $\mu(\{f \neq 0\}) < +\infty$.

Allora,

a) $\exists \varphi_n \in C_c(X)$ $(n \geq 1)$: $\varphi_n \to f$ μ-q.o. in X per $n \to +\infty$

b) se f e' limitata si puo' avere

$$\sup_{x \in X} |\varphi_n(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|, \quad \forall n \geq 1.$$

<u>Oss.</u> (lemma di Borel - Cantelli)

Siano $\mu: \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva e $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ insiemi. Allora,

$$\sum_{n \geq 1}' \mu(E_n) < +\infty \Rightarrow \mu\left(\limsup_{n \to +\infty} E_n\right) = 0.$$

<u>NB</u>: $\displaystyle \limsup_{n \to +\infty} E_n = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} E_n =$

$$= \{x : x \in E_n \text{ per infiniti } n\}.$$

- $\displaystyle \limsup_{n \to +\infty} E_n \subset \bigcup_{n \geq m} E_m \quad \forall m \geq 1$
- $\displaystyle \mu\left(\limsup_{n \to +\infty} E_n\right) \leq \sum_{n \geq m}' \mu(E_n) \quad \forall m \geq 1$
- $\displaystyle \sum_{n \geq 1}' \mu(E_n) < +\infty \Rightarrow \lim_{m \to +\infty} \sum_{n \geq m}' \mu(E_n) = 0.$ ▨

Dim. (Corollario 1) Basta provare (a).

- Lusin $\Rightarrow \forall n \; \exists \varphi_n \in C_c(X) : \mu(\{\varphi_n \neq f\}) \leq 1/2^n$
- BC $\Rightarrow \mu\left(\limsup_{n\to+\infty} \{\varphi_n \neq f\}\right) = 0$
- $\limsup_{n\to+\infty} \{\varphi_n \neq f\} = \{x : \varphi_n(x) \neq f(x) \text{ per infiniti } n\}$
- $x \notin \limsup_{n\to+\infty} \{\varphi_n \neq f\} \Rightarrow \varphi_n(x) = f(x)$ definitiv. ▨

<u>Corollario 2</u>: Siano X LCH σ-compatto, $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva di Radon in X e $f : X \to \mathbb{K}$ funzione $\mathcal{S}$-misurabile. Allora valgono (a) e (b) di Corollario 1.

<u>Dim</u>.

- X LCH σ-compatto $\Rightarrow \exists V_n$ aperti: $\begin{cases} V_n \subset V_{n+1} \text{ e } \overline{V}_n \text{ compatti} \\ X = \bigcup_n V_n \end{cases}$
- $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}(V_n)$ e $\mu_n = \mu|_{\mathcal{S}_n}$ misura positiva di Radon in V_n
- $f_n = f|V_n$ $\mathcal{S}_n$-misurabile e $\mu(V_n) < +\infty \; \forall n$
- Lusin $\Rightarrow \forall n \; \exists \varphi_n \in C_c(X) : \begin{cases} \text{supp}(\varphi_n) \subset V_n \\ \mu(\{\varphi_n \neq f\} \cap V_n) \leq 1/2^n \end{cases}$
- si conclude come in Corollario 1. ▨

Oss : $X = V$ aperto di $\mathbb{R}^N$

- Corollario 2 vale con $\varphi_n \in C_c^\infty(V)$ $n \geq 1$!
- ⚡ Lusin non vale con $C_c^\infty(V)$ al posto di $C_c(V)$

$\blacksquare$

<u>Teorema</u> (partizioni dell'unità)

Sia X LCH e siano K compatto e $V_1, \dots, V_n$ aperti t.c.

$$K \subset V_1 \cup \dots \cup V_n .$$

Allora, $\exists\ \varphi_m \in C_c(X)$ $m = 1, \dots, n$ t.c.

- $\varphi_m \prec V_m \quad \forall m$;
- $\varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x) = 1 \quad \forall x \in K$.

<u>Oss</u> $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ partizione dell'unità di K subordinata a $V_1, \dots, V_n$

<u>Dim.</u> $n \geq 2$ e $K \cap V_m \neq \emptyset \quad \forall m$

- $x \in K \Rightarrow \exists\ m = m(x) \in \{1, \dots, n\}$ e W_x int. aperto di x : $\begin{cases} \overline{W}_x \text{ compatto} \\ \overline{W}_x \subset V_m \end{cases}$
- $\exists\ W_h = W_{x_h}$ $h = 1, \dots, k$: $K \subset W_1 \cup \dots \cup W_k$
- $H_m = \bigcup \{ \overline{W}_h : \overline{W}_h \subset V_m \}$ $m = 1, \dots, n \Rightarrow \begin{cases} H_m \text{ compatto e } H_m \subset V_m \\ K \subset H_1 \cup \dots \cup H_n \end{cases}$
- Urysohn $\Rightarrow \exists\ \psi_m \in C_c(X)$: $H_m \prec \psi_m \prec V_m$
- $\begin{cases} \varphi_1 = \psi_1 \\ \varphi_m = (1-\psi_1) \cdots (1-\psi_{m-1}) \psi_m \qquad m = 2, \dots, n \end{cases}$
- $\varphi_m \in C_c(X)$ con $\varphi_m \prec V_m \quad \forall m$

- per induzione $\varphi_1 + \dots + \varphi_n = 1 - (1-\psi_1)\cdots(1-\psi_n)$

  - $\varphi_1 + \varphi_2 = \psi_1 + (1-\psi_1)\psi_2 = 1 - (1-\psi_1) + (1-\psi_1)\psi_2 =$

    $= 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2)$

  - $\varphi_1 + \dots + \varphi_m = 1 - (1-\psi_1)\cdots(1-\psi_m) \quad m \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_1 + \dots + \varphi_{m+1} = 1 - (1-\psi_1)\cdots(1-\psi_m) + (1-\psi_1)\cdots(1-\psi_m)\psi_{m+1}$$

$$= 1 - (1-\psi_1)\cdot\dots\cdot(1-\psi_m)(1-\psi_{m+1})$$

- $x \in K \Rightarrow \exists\, m : x \in H_m \Rightarrow \varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x) = 1$ ∎