SPAZI DI BANACH

Spazi normati e spazi di Banach

- X spazio vettoriale su $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
- norma in X: $\quad \|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

  (N1) $\quad \|x\| = 0 \iff x = 0$

  (N2) $\quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall x \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

  (N3) $\quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$

- $(X, \|\cdot\|)$ sp. normato su $\mathbb{K}$

Oss.
- $\begin{cases} \text{(N2)} & \text{omogeneità della norma} \\ \text{(N3)} & \text{disuguaglianza triangolare} \end{cases}$
- $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$;
- $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in X$.

Esempi: a) $X = \mathbb{K}^N$, $\quad p \in [1, +\infty]$

$$\begin{cases} \|x\|_p = \left(\sum_{1 \leq m \leq N} |x_m|^p \right)^{1/p} & 1 \leq p < +\infty \\ \|x\|_\infty = \max_{1 \leq m \leq N} |x_m| & p = +\infty \end{cases} \qquad x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{K}^N$$

$p = 2 \implies \|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ norma euclidea.

b) $\{x_n\}_{n \geq 1}$ p-sommabile se $\sum_{n \geq 1} |x_n|^p < +\infty$ $\quad (1 \leq p < +\infty)$

$\ell_p = \{ x = \{x_n\}_{n \geq 1} : x \text{ p-sommabile} \}$ $\quad 1 \leq p < +\infty$

$\ell_\infty = \{ x = \{x_n\}_{n \geq 1} : x \text{ limitata} \}$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n\geq 1} |x_n|^p \right)^{1/p}, \qquad x = \{x_n\}_{n\geq 1} \in \ell_p \qquad 1 \leq p < +\infty$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|, \qquad x = \{x_n\}_{n\geq 1} \in \ell_\infty \qquad p = +\infty$$

c) $c_\infty = \left\{ x = \{x_n\}_{n\geq 1} : \exists\, x_\infty \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \lim_{n\to+\infty} x_n = x_\infty \right\}$

$c_0 = \left\{ x = \{x_n\}_{n\geq 1} : \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \right\}$

$\|x\|_u = \sup_{n\geq 1} |x_n|, \qquad x = \{x_n\}_{n\geq 1} \in c_\infty, c_0$

d) Ω ins. (non vuoto)

$B(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{K} : f \text{ limitata} \}$

$\|f\|_{u,\Omega} = \sup\{ |f(\omega)| : \omega \in \Omega \}, \qquad f \in B(\Omega)$

- $\|\cdot\|_u = \|\cdot\|_{u,\Omega}$ se chiaro dal contesto
- $\Omega = \mathbb{N}_+ \Rightarrow B(\mathbb{N}_+) = \ell_\infty$ e $\|\cdot\|_u = \|\cdot\|_\infty$. ▨

- $(X, \|\cdot\|)$ sp. normato $\Rightarrow d(x,y) = \|x-y\|$ $x,y \in X$

- d <u>metrica indotta dalla norma</u>

- $\begin{cases} B_r(x_0) = \{ x : \|x - x_0\| < r \} \\ B_r[x_0] = \{ x : \|x - x_0\| \leq r \} \end{cases} \qquad x_0 \in X, \ r > 0$

- in $(X, \|\cdot\|)$ vale tutto quello che vale per gli spazi metrici: insiemi limitati, aperti, chiusi, successioni etc. etc.

Proposizione: Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno sp. normato. Allor

a) $(x,y) \in X \times X \longmapsto x+y \in X$
$(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X \longmapsto \lambda x \in X$ continue

b) $$\begin{cases} T_a : X \to X & T_a x = x + a, \quad x \in X \quad (a \in X) \\ M_\lambda : X \to X & M_\lambda x = \lambda x, \quad x \in X \quad (\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0) \end{cases}$$

omeomorfismi di X su se stesso

c) $Y \subset X$ sottosp. vettoriale $\Rightarrow$ $cl(Y)$ sottosp. vettoriale

Dim. . . . . .

- serie e serie generalizzate (somme nonordinate)
- definizione di sp. di Banach

X sp. di Banach $\Longleftrightarrow$ ogni serie assolutamente convergente e' convergente

- norme equivalenti su X $\|\cdot\|_i$ $i = 1, 2$

$\exists\, c_i > 0 \ (i = 1,2) : \quad c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_2 \qquad \forall x \in X$

Esempio $X = \mathbb{K}^N$ e $1 \leq p \leq q \leq +\infty$

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \qquad x \in \mathbb{K}^N$$
$$\|x\|_p \leq N^{1/p - 1/q} \|x\|_q \qquad (1/q = 0 \text{ se } q = +\infty!)$$

- algebra normata X (o di Banach)

X algebra (commutativa o no, unità o no), $\|\cdot\|$ norma su

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \qquad \forall x, y \in X$$

- $(x,y) \in X \times X \longmapsto xy \in X$ continua
- $A \subset X$ sottoalgebra $\Rightarrow cl(A)$ sottoalgebra

<u>Teorema</u>: $(B(\Omega), \|\cdot\|_u)$ algebra di Banach (commutativa con unità).

<u>Dim</u>. Basta provare la completezza.

- $f_n \in B(\Omega)$ $n \geq 1$ successione di Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1 : \left[m, n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f_m\|_u \leq \varepsilon \right] \quad (*)$$

- $\forall \omega \in \Omega$ $\{f_n(\omega)\}_n$ e' di Cauchy in $\mathbb{K}$

$$\Downarrow$$

$$\exists f : \Omega \to \mathbb{K} : f(\omega) = \lim_{n \to +\infty} f_n(\omega) \ \forall \omega \in \Omega$$

- $\exists M \geq 0$: $\|f_n\|_u \leq M \ \forall n \geq 1 \Rightarrow f \in B(\Omega)$

- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$: valga $(*)$

$$\Downarrow$$

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(\omega) - f_m(\omega)| \leq \|f_n - f_m\|_u \leq \varepsilon \quad \forall \omega \in \Omega$$

- $m \to +\infty \Rightarrow |f_n(\omega) - f(\omega)| \leq \varepsilon \ \forall \omega \in \Omega \ \forall n \geq n_0$

Quindi $f_n \to f$ in $B(\Omega)$ per $n \to +\infty$. ▨

Operatori lineari

. X, Y spazi vettoriali su $\mathbb{K}$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(X,Y) = \{T : X \to Y \text{ operatore lineare}\} \\ \mathcal{L}(X) \text{ se } X = Y \end{cases} \quad \text{sp. vettoriali su } \mathbb{K}$$

. X, Y spazi normati su $\mathbb{K}$

$T \in \mathcal{L}(X,Y)$ limitato se $\sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} < +\infty$.

Oss. X, Y sp. normati e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$

. T limitato $\iff$ $[A \subset X \text{ limitato} \Rightarrow T(A) \subset Y \text{ limitato}]$

$\iff \exists C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \ \forall x \in X$

. T limitato
$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} < +\infty$ $\Rightarrow \|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \ \forall x \in X$

Proposizione: Siano

$B(X,Y) = \{T \in \mathcal{L}(X,Y) : T \text{ limitato}\}$ $\quad (B(X) \text{ se } X = Y)$

$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$, $\quad T \in B(X,Y)$

Allora,

a) $B(X,Y)$ sp. vettoriale su $\mathbb{K}$

b) $\|\cdot\|$ norma su $B(X,Y)$

Esempio: operatore lineare non limitato

a) $c_c = \{ x = \{x_n\}_{n\geq 1} : x_n = 0 \text{ definitivamente} \}$ e $\|\cdot\|_\infty$

$T \in \mathcal{L}(c_c)$ $\quad Tx = \{(Tx)_n\}_{n\geq 1}$ e $(Tx)_n = n x_n \ \forall n \ x = \{x_n\} \in c_c$

b) se X sp. di Banach serve AC (appunti) ■

Teorema: X sp. normato, Y sp. di Banach $\Rightarrow B(X,Y)$ sp. di Banach

Dim. . . . . ■

Teorema: Siano X, Y, Z sp. normati e $S \in B(X,Y)$, $T \in B(Y,Z)$. Allora,

$$TS \in B(X,Z) \text{ e } \|TS\| \leq \|T\| \, \|S\|$$

Dim. . . . ■

Oss $B(X)$ algebra normata/di Banach ■

- X, Y sp. normati su $\mathbb{K}$

$$\begin{cases} L(X,Y) = \{ T \in \mathcal{L}(X,Y) : T \text{ continuo} \} \\ L(X) \text{ se } X = Y \end{cases}$$ sp. vettoriali su

Teorema: Siano X, Y sp. normati e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.
Sono equivalenti
a) T limitato;
b) T continuo;
c) T continuo in $x_0 = 0$.

Oss $B(X,Y) = L(X,Y)$!

Dim Basta (c) $\Rightarrow$ (a)

- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : [\|x\| \le \delta \Rightarrow \|Tx\| \le \varepsilon]$
- $\|x\| \le 1 \Rightarrow \|\delta x\| \le \delta \Rightarrow \|T(\delta x)\| \le \varepsilon \Rightarrow \|Tx\| \le \varepsilon/\delta$

Oss. $T \in L(X,Y) \Rightarrow \ker(T)$ chiuso.

Non vale il viceversa:
- $T \in \mathcal{L}(c_c)$ $\quad (Tx)_n = n x_n \quad n \ge 1 \quad \forall\, x = \{x_n\}_n \in c_c$
- $\ker(T) = \{0\}$ ma T non continuo!

Isomorfismi

- X, Y sp. normati su $\mathbb{K}$ e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$

  T isomorfismo di sp. normati se
  - T isomorfismo lineare di X su Y;
  - $T \in L(X,Y)$ e $T^{-1} \in L(Y,X)$.

- $\begin{cases} Iso(X,Y) = \{ T \in L(X,Y) : T \text{ isomorfismo di sp. normati} \} \\ Iso(X) \text{ se } X = Y \end{cases}$

Oss.

- $T \in Iso(X,Y) \iff T^{-1} \in Iso(Y,X)$.
- $S \in Iso(X,Y)$ e $T \in Iso(Y,Z) \Rightarrow TS \in Iso(X,Z)$.
- $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ isomorfismo lineare di X su Y.

  $T \in Iso(X,Y) \iff \exists\, c_2 \geq c_1 > 0 : c_1 \|x\| \leq \|Tx\| \leq c_2 \|x\| \ \forall x \in X$

  In tal caso si ha $\|T\| \leq c_2$ e $\|T^{-1}\| \leq 1/c_1$.

- $T \in Iso(X,Y)$ isomorfismo isometrico se $\|Tx\| = \|x\| \ \forall x \in X$

- $\begin{cases} X, Y \text{ isomorfi se } \exists\, T \in Iso(X,Y) \\ X, Y \text{ isometricamente isomorfi se } \exists\, T \in Iso(X,Y) \\ \qquad \text{isomorfismo isometrico} \end{cases}$

Funzionali lineari e duale

. X sp. normato su $\mathbb{K}$

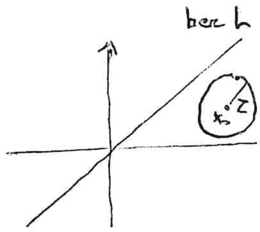
. $\begin{cases} X^* = L(X, \mathbb{K}) & \text{duale (topologico) di } X \\ \|L\| = \sup\{|Lx| : \|x\| \leq 1\} & \text{norma di } L \in X^* \end{cases}$

Teorema: X sp. normato $\Rightarrow$ $(X^*, \|\cdot\|)$ sp. di Banach

Teorema: Siano X sp. normato e $L \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ funzionale lineare. Allora,

$$L \in X^* \iff \ker L \text{ chiuso}$$

Dim. ($\Rightarrow$) Ovvio!



($\Leftarrow$) $L \neq 0$ altrimenti è ovvio!

. $L \neq 0$ e $\ker L$ chiuso $\Rightarrow$ $\exists\, x_0 \in X,\ r > 0 : \ker L \cap B_r[x_0] = \emptyset$

. P.A. L illimitato $\Rightarrow$ $\exists\, x \in X : \|x\| \leq 1$ e $|Lx| > |Lx_0|/r$

. $-\frac{Lx_0}{Lx} x \in B_r[0] \Rightarrow x_0 - \frac{Lx_0}{Lx} x \in B_r[x_0]$ e

$$L\left(x_0 - \frac{Lx_0}{Lx} x\right) = 0 \quad \text{assurdo!} \ \blacksquare$$

Oss ($\Leftarrow$) falsa per $T \in \mathcal{L}(X, Y)$!

(c_c e $(Tx)_n = n x_n \quad \forall x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in c_c$) $\blacksquare$

Spazi normati di dimensione finita

Teorema: Siano X sp. normato su $\mathbb{K}$ con $\dim X =$
e $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^N, X)$ un isomorfismo lineare di $\mathbb{K}^N$ su X
Allora, L e' un isomorfismo di sp. di Banach.

Dim. . $u_n = L e_n$ $n = 1, \dots, N$ ($\{e_1, \dots, e_N\}$ base canonica di $\mathbb{K}^N$)

- $\{u_1, \dots, u_N\}$ base di X
- $\lambda = \lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^N e_N \in \mathbb{K}^N \Rightarrow \|L\lambda\| \le \left(\sum_{1\le n\le N} \|u_n\|^2\right)^{1/2} \|\lambda\|$
- L limitato con $\|L\| \le \left(\sum_{1\le n\le N} \|u_n\|^2\right)^{1/2}$
- P.A. $L^{-1} \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K}^N)$ illimitato
- $\exists\ x_k \in X$ $k \ge 1$: $\|x_k\| \le 1$ e $\|Lx_k\| \to +\infty$ per $k \to +\infty$.
- $\lambda_k = \dfrac{L^{-1}x_k}{\|Lx_k\|}$ $k \ge 1$ $\Rightarrow$ $\|\lambda_k\| = 1$ $\forall k$
- $\exists\ \lambda_{k_h}$ $h \ge 1$ e $\lambda \in \mathbb{K}^N$: $\lambda_{k_h} \to \lambda$ per $h \to +\infty$ (S^{N-1} compatta)
- $\|\lambda_{k_h}\| = 1$ $\forall h$ $\Rightarrow$ $\|\lambda\| = 1$
- $L\lambda = \lim_{h\to+\infty} L\lambda_{k_h} = \lim_{h\to+\infty} \dfrac{x_{k_h}}{\|Lx_{k_h}\|} = 0$
- $\|\lambda\| = 1$ e $L\lambda = 0$ assurdo! ▨

Corollario: Siano X, Y sp. normati su $\mathbb{K}$ con $\dim X < +\infty$

Allora,

a) X e' sp. di Banach;

b) $\dim X = \dim Y \Rightarrow X, Y$ sp. di Banach isomorfi;

c) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ limitato;

d) tutte le norme su X sono equivalenti;

e) $K \subset X$ compatto $\Leftrightarrow$ $K \subset X$ chiuso e limitato.

Dim. a) Ovvio!

b) Sono entrambi isomorfi come sp. di Banach a $\mathbb{K}^N$ $(N = \dim X = \dim Y)$

c) . $\dim X = N$ e $\{u_1, \ldots, u_N\}$ base di X

. $L \in Iso(\mathbb{K}^N, X)$: $Le_n = u_n$ $n = 1, \ldots, N$

. $S \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^N, Y)$: $Se_n = Tu_n$ $n = 1, \ldots, N$

. teorema $\Rightarrow$ S limitato con $\|S\| \leq \left(\sum_1^N \|Tu_n\|^2\right)^{1/2}$

. $T = S \circ L^{-1}$ limitato.

d) . $X_i = (X, \|\cdot\|_i)$ $i = 1, 2$

. id_X isomorfismo di sp. di Banach di X_1 su X_2

e) Ovvio! ▨

Corollario: Siano X sp. normato su $\mathbb{K}$ e $Y \subset X$ sottospazio con $\dim Y < +\infty$. Allora Y e' chiuso.

Lemma (F. Riesz): Siano X sp. normato su $\mathbb{K}$ e $Y \subset X$ sottospazio chiuso con $Y \neq X$. Allora, per ogni $\varepsilon \in (0,1)$ $\exists\, x_\varepsilon \in X$ tale che

- $\|x_\varepsilon\| = 1$;
- $\|x_\varepsilon - y\| > 1-\varepsilon$ per ogni $y \in Y$.

Dim.

- $x_0 \in X \setminus Y$ e $\varepsilon \in (0,1)$
- $d = d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\} > 0$
- $d/_{1-\varepsilon} > d \Rightarrow \exists\, \bar{y} \in Y : \ 0 < \|x_0 - \bar{y}\| < d/_{1-\varepsilon}$
- $x_\varepsilon = \dfrac{x_0 - \bar{y}}{\|x_0 - \bar{y}\|} \Rightarrow \|x_\varepsilon\| = 1$
- $x_\varepsilon - y = \dfrac{x_0 - \bar{y}}{\|x_0 - \bar{y}\|} - y = \dfrac{x_0 - (\bar{y} + \|x_0 - \bar{y}\| y)}{\|x_0 - \bar{y}\|} \quad \forall y \in Y$
- $y \in Y \Rightarrow \bar{y} + \|x_0 - \bar{y}\| y \in Y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|x_\varepsilon - y\| = \frac{\|x_0 - (\bar{y} + \|x_0 - \bar{y}\| y)\|}{\|x_0 - \bar{y}\|} > d \cdot \frac{1-\varepsilon}{d} = 1-\varepsilon \quad \blacksquare$$

Corollario: Sia X sp. normato su $\mathbb{K}$. Sono equivalenti

a) $\dim X < +\infty$;

b) X ha la proprietà di Heine-Borel;

c) X è localmente compatto.

Oss. $B_1 = B_1[0]$ compatto $\Leftrightarrow$ $\dim X < +\infty$. ▨

Dim. Basta provare che (c) $\Rightarrow$ (a).

- X localmente compatto $\Rightarrow$ $S_1 = \{x : \|x\| = 1\}$ compatto
- $\varepsilon \in (0,1)$ $\Rightarrow$ $\exists\, y_1, \dots, y_n \in S_1 :\ S_1 \subset B_{1-\varepsilon}(y_1) \cup \dots \cup B_{1-\varepsilon}(y_n)$
- $Y = \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_n\}$ sottosp. chiuso
- P.A. $\dim X = +\infty$ $\Rightarrow$ $Y \neq X$
- lemma $\Rightarrow$ $\exists\, x_\varepsilon \in S_1 :\ \|x_\varepsilon - y\| > 1 - \varepsilon \quad \forall y \in Y$ assurdo!

▨

Teorema: Siano X sp. di Banach su $\mathbb{K}$ e $K \subset X$ un insieme. Sono equivalenti:

a) K e' chiuso e limitato e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M_\varepsilon$ sottosp. t.c. $\dim M_\varepsilon < +\infty$ e $d(K, M_\varepsilon) \leq \varepsilon$;

b) K e' compatto.

Dim. (a) $\Rightarrow$ (b)

- $C \geq 0$: $\|x\| \leq C$ $\forall x \in K$
- $\varepsilon > 0 \Rightarrow M_{\varepsilon/3}$ sottosp. come sopra.
- $\forall x \in K$ $\exists y_x \in M_\varepsilon$: $\|x - y_x\| < \varepsilon/3$
- $\|y_x\| \leq \|x\| + \|y_x - x\| \leq C + \varepsilon/3$ $\forall x \in K \Rightarrow \{y_x : x \in K\}$ limi
- $\{y_x : x \in K\}$ limitato e contenuto in $M_{\varepsilon/3}$
- $\exists x_1, \dots, x_n \in K$: $y_m = y_{x_m}$ $m = 1, \dots, n$

  $\{y_x : x \in K\} \subset B_{\varepsilon/3}(y_1) \cup \dots \cup B_{\varepsilon/3}(y_n$
- $x \in K \Rightarrow \exists m \in \{1, \dots, n\}$: $\|y_x - y_m\| < \varepsilon/3$
- $\|x - x_m\| \leq \|x - y_x\| + \|y_x - y_m\| + \|y_m - x_m\| < \varepsilon$
- K chiuso e totalmente limitato + X sp. di Banac

$$\Downarrow$$

K compatto

(b) $\Rightarrow$ (a) Ovvio! ▨

Estensione di funzionali lineari (teor. di Hahn Banach)

Teorema (H. Hahn - S. Banach)

Siano X sp. normato su $\mathbb{K}$, M_0 sottosp. vettoriale di X e $L_0 \in M_0^*$. Allora, esiste $L \in X^*$ tale che

- $Lx = L_0 x \quad \forall x \in M_0$;
- $\|L\| = \|L_0\|$.

Oss. La seconda uguaglianza asserisce che

$$\|L_0\| = \sup\{|L_0 x| : x \in M_0 \text{ e } \|x\| \le 1\}$$
$$\overset{!}{=} \|L\| = \sup\{|Lx| : x \in X \text{ e } \|x\| \le 1\}. \qquad \blacksquare$$

Dim. ... $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (caso reale)

- $L_0 \neq 0$ altrimenti è ovvio!
- $\mathcal{U} = \{(M', L') : M' \subset X \text{ sottosp. e } L' \in (M')^* \text{ t.c. valga } (*)\}$

$$(*) \begin{cases} M' \subset X \text{ sottospazio t.c. } M_0 \subset M' \\ L' = L_0 \text{ su } M_0 \text{ e } \|L'\| = \|L_0\| \end{cases}$$

- ordiniamo $\mathcal{U}$ ponendo

$(M', L') \le (M'', L'')$ se $M' \subset M''$ e $L' = L''$ su M'

- HMT $\Rightarrow \exists\ \mathcal{U}_{max}$ insieme totalmente ordinato massimale
- $\begin{cases} M = \bigcup \{ M' : (M', L') \in \mathcal{U}_{max} \} \\ L : M \to \mathbb{R} \quad Lx = L'x \text{ se } (M', L') \in \mathcal{U}_{max} \text{ e } x \in M' \end{cases}$
- M sottosp. di X tale che $M_0 \subset M$ e $L : X \to \mathbb{R}$ lineare
- $x \in M \Rightarrow \exists\ (M', L') \in \mathcal{U}_{max} : x \in M'$ e $Lx = L'x$

$$\Rightarrow \quad \|Lx\| = \|L'x\| \le \|L'\|\,\|x\| = \|L_0\|\,\|x\|$$

$$\Rightarrow \quad L \in M^* \text{ e } \|L\| \le \|L_0\|$$

- $M_0 \subset M$ e $L = L_0$ su $M_0 \Rightarrow \|L_0\| \le \|L\|$
- $L \in M^*$ e $\|L\| = \|L_0\|$

Resta da provare che risulta $M = X$.

- si può supporre $\|L_0\| = 1$
- P.A. $M \neq X \Rightarrow \exists\ x_0 \in X : x_0 \notin M$
- $x, y \in M \Rightarrow Lx - Ly = L(x-y) \le \|x-y\| \le \|x - x_0\| + \|y - x_0\|$

$$\Rightarrow \quad A_x = Lx - \|x - x_0\| \le Ly + \|y - x_0\| = B_y$$

- $\exists\ \alpha \in \mathbb{R} : Lx - \|x - x_0\| \le \alpha \le Ly + \|y - x_0\| \quad \forall x, y \in M$
- $x = y \in M \Rightarrow |Lx - \alpha| \le \|x - x_0\| \quad x \in M$
- $x \in M, t \neq 0 \Rightarrow -x/t \in M \Rightarrow |L(-x/t) - \alpha| \le \|(-x/t) - x_0\|$

$$\Rightarrow \quad |Lx + t\alpha| \le \|x + tx_0\| \quad (\text{anche } t=$$

- $M' = \text{span}\{M, x_0\} = \{ x + tx_0 : x \in M \text{ e } t \in \mathbb{R} \}$

$\hookrightarrow$ rappresentazione unica!

- $x' \in M' \Rightarrow \exists!\ (x,t) \in M \times \mathbb{R} : x' = x + t x_0$
- $L' : M' \to \mathbb{R} \quad L'x' = Lx + t\alpha$ se $x' = x + t x_0 \in M'$
- L' lineare e $\|L'\| \le 1$
- $M \subset M'$ e $L' = L$ su $M \Rightarrow 1 = \|L\| \le \|L'\|$
- $(M'', L'') \le (M', L') \quad \forall (M'', L'') \in \mathcal{U}_{max}$ assurdo! ▨

Corollario: Siano X sp. normato su $\mathbb{K}$, $M \subset X$ sottosp. e $x_0 \in X$. Allora

$$x_0 \notin \overline{M} \iff \exists\ L \in X^* : Lx = 0\ \forall x \in M \text{ e } Lx_0 \neq 0$$

Dim ($\Rightarrow$)

- $\exists\ r > 0 : M \cap B_r(x_0) = \emptyset$
- $M' = \operatorname{span}\{M, x_0\}$
- $x' \in M' \Rightarrow \exists!\ (x, \lambda) \in M \times \mathbb{K} : x' = x + \lambda x_0$
- $L' : M' \to \mathbb{K} \quad L'x' = L'(x + \lambda x_0) = \lambda \quad x' = x + \lambda x_0 \in M'$
- L' lineare con $L'x = 0\ \forall x \in M$ e $L'x_0 = 1$
- $x' = x + \lambda x_0\ (x \in M$ e $\lambda \neq 0) \Rightarrow -x/\lambda \in M$
- $\|x'\| = \|x + \lambda x_0\| = |\lambda|\, \|x_0 - (-x/\lambda)\| \ge r|\lambda| = r|L'x'|$ anche $\lambda = 0$
- $|L'x'| \le 1/r \|x'\| \quad \forall x' \in M' \Rightarrow L' \in (M')^*$ e $\|L'\| \le 1/r$
- $L'x = 0 \quad \forall x \in M$ e $L'x_0 = 1$
- $HB \Rightarrow \exists\ L \in X^* : L = 0$ su M e $Lx_0 = 1$ ▨

<u>Corollario</u>: Siano X sp. normato su $\mathbb{K}$ e $x_0 \in X$, $x_0 \neq$
Allora $\exists\ L \in X^*$ t.c.

- $L x_0 = \|x_0\|$
- $\|L\| = 1$

<u>Dim</u>.

- $M_0 = \{ \lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{K} \}$ sottosp.
- $L_0 : M_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad L_0 x = L_0(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$, $\quad x = \lambda x_0 \in M_0$
- L_0 lineare e $L_0 \in M_0^*$ con $L_0 x_0 = 1$ e $\|L_0\| = 1$
- HB $\Rightarrow \exists\ L \in X^*$: $L = L_0$ su M_0 e $\|L\| = 1$ ∎

Principio di uniforme limitatezza

Teorema (S. Banach - H. Steinhaus)

Siano X sp. di Banach su $\mathbb{K}$ e Y uno sp. normat
su $\mathbb{K}$ e siano $T_i \in B(X,Y)$ $(i \in I)$ op. lineari limitat
Allora sono equivalenti

a) $\sup_i \|T_i\| = +\infty$

b) $\exists\, G \in \mathcal{G}_\delta$ denso di X t.c. $\sup_i \|T_i x\| = +\infty$ $\forall x \in$

Oss. Formulazione equivalente:

$$\sup_i \|T_i\| < +\infty \quad \text{oppure} \quad \exists\, G \in \mathcal{G}_\delta^{\text{denso}} V: \sup_i \|T_i x\| = +\infty \ \forall x \in G$$

Dim. . $T^*(x) = \sup_{i \in I} \|T_i x\|$, $x \in X$

. $T^*: X \to [0,+\infty]$ s.c.i. $\Rightarrow$ $V_n = \{x : T^*(x) > n\}$ aperto n:

(a) $\Rightarrow$ (b)

. P.A. $\exists\, n$: V_n non e' denso

. $x_0 \in X$, $r > 0$: $B_r[x_0] \cap V_n = \emptyset$

. $\|T_i(x)\| \le n$ $\forall i \in I$ e $x \in B_r[x_0]$

. $y \in B_r[0]$ $\Rightarrow$ $y = (x_0 + y) - x_0 \in B_r[x_0] + B_r[x_0]$

- $\|T_i x\| \leq \|T_i(x_0+y)\| + \|T_i x_0\| \leq 2n \quad \forall i \in I$
- $\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|T_i x\| \leq 2n/r \quad \forall i$ assurdo!
- Baire $\Rightarrow G = \bigcap_n Y_n \in \mathcal{G}_\delta(X)$ denso.

(b) $\Rightarrow$ (a)

- $G \in \mathcal{G}_\delta$ denso $\Rightarrow G \cap B_1(0) \neq \phi \Rightarrow \exists x$ con $\|x\|<1$:

$$\sup_i \|T_i x\| = +\infty$$

- $\|T_i\| \geq \|T_i x\| \quad \forall i \Rightarrow \sup_i \|T_i\| = +\infty$ ∎

<u>Teorema</u>: Siano X sp. di Banach su $\mathbb{K}$, Y sp. normato su $\mathbb{K}$ e $T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ $n \geq 1$ op. lineari limitati t.c. $\{T_n x\}_n$ converge per ogni $x \in X$. Allora, posto

$$Tx = \lim_{n \to +\infty} T_n x, \quad x \in X,$$

si ha

a) $T \in \mathcal{B}(X,Y)$;

b) $\|T\| \leq \liminf_{n \to +\infty} \|T_n\|$.

<u>Dim</u>. (a). $T \in \mathcal{L}(X,Y)$

- BS $\Rightarrow \exists M \geq 0 : \|T_n\| \leq M \quad \forall n$
- $\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|Tx\| = \|\lim_{n \to +\infty} T_n x\| = \lim_{n \to +\infty} \|T_n x\| \leq$

$$\leq \limsup_{n \to +\infty} \|T_n\| \, \|x\|$$

Quindi $T \in \mathcal{B}(X,Y)$.

b) $\cdot$ $\{T_{n_k}\}_{k\geq 1}$: $\lim_{k\to+\infty} \|T_{n_k}\| = \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|$

$\cdot$ $\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|Tx\| = \lim_{k\to+\infty} \|T_{n_k} x\| \leq \left(\liminf_{n\to+\infty} \|T_{n_k}\|\right) \|x\|$

$\cdot$ $\|T\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|$.

$\blacksquare$

Teorema dell'applicazione aperta

Teorema (S. Banach – J. Schauder)

Siano X, Y sp. di Banach su $\mathbb{K}$ e $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ t.c.

$$\mathrm{im}(T) = Y.$$

Allora, $\exists\, \delta > 0$ t.c. $B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$.

Oss. 0 è punto interno di $T(B_1(0))$! $\blacksquare$

Dim. Poniamo $B_\tau = B_\tau(0)$ $(\tau > 0)$ in X e Y.

(1) $\exists\, \delta > 0 : B_\delta \subset \mathrm{cl}(T(B_1))$

- T suriettivo $\Rightarrow$ $Y = \bigcup_{k \geq 1} T(B_k)$
- Y sp. di Banach $\Rightarrow$ $\exists\, k \geq 1 : \mathrm{int}(\mathrm{cl}(T(B_k))) \neq \emptyset$ (Baire)
- $y_0 \in Y$ e $\eta > 0$: $B_\eta(y_0) \subset \mathrm{cl}(T(B_k))$
- $\|y\| < \eta$ $\Rightarrow$ $\exists\, x'_j, x''_j \in X$ $(j \geq 1)$: $x'_j, x''_j \in B_k$ $\forall j$ e $\begin{cases} Tx'_j \to y_0 \\ Tx''_j \to y_0 - y \end{cases}$
- $x_j = x'_j - x''_j$ $j \geq 1$ $\Rightarrow$ $x_j \in B_{2k}$ $\forall j$ e $Tx_j \to y$
- $B_\eta \subset \mathrm{cl}(T(B_{2k}))$
- $\delta = \eta/2k$ $\Rightarrow$ $B_\delta \subset \mathrm{cl}(T(B_1))$

(2) $\forall y \in B_\delta$ e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, x_n \in X$ $(n \geq 1)$ t.c.

- $\|x_1\| < 1$ e $\|x_n\| < \varepsilon/2^{n-1}$ per $n \geq 2$;
- $\|Tx_1 + \dots + Tx_n - y\| < \delta\varepsilon/2^n$ per $n \geq 1$.

- $y \in Y$ con $\|y\| < \delta$ e $\varepsilon > 0$ fissati
- (1) $\Rightarrow$ $\exists\, x_1 \in X$: $\|x_1\| < 1$ e $\|Tx_1 - y\| < \delta\varepsilon/2$
- $\bar{y}_2 = \frac{2}{\varepsilon}(y - Tx_1)$ $\Rightarrow$ $\|\bar{y}_2\| < \delta$
- (1) $\Rightarrow$ $\exists\, \bar{x}_2 \in X$: $\|\bar{x}_2\| < 1$ e $\|T\bar{x}_2 - \frac{2}{\varepsilon}(y - Tx_1)\| < \delta/2$
- $x_2 = \varepsilon \bar{x}_2/2$ $\Rightarrow$ $\|x_2\| < \varepsilon/2$ e $\|Tx_1 + Tx_2 - y\| < \delta\varepsilon/4$

Iterando si determinano $x_n \in X$ $(n \geq 1)$ con le proprietà cercate.

(3) $B_\delta \subset T(B_1)$

- $y \in Y$ con $\|y\| < \delta$ e $\varepsilon > 0$ fissati
- $x_n \in X$ $(n \geq 1)$ come in (2)
- $\sum_{n \geq 1}' \|x_n\| < 1 + \sum_{n \geq 2}' \varepsilon/2^{n-1} = 1 + \varepsilon$
- X sp. di Banach $\Rightarrow$ $x = \sum_{n \geq 1}' x_n$ converge
- $\|x\| < 1 + \varepsilon$ e $Tx = y$
- $B_\delta \subset T(B_{1+\varepsilon})$ $\forall \varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ $B_{\delta/1+\varepsilon} \subset T(B_1)$ $\forall \varepsilon > 0$
- $B_\delta = \bigcup_{\varepsilon > 0} T(B_{\delta/1+\varepsilon}) \subset T(B_1)$. ■

<u>Corollario</u>: Siano X, Y sp. di Banach su $\mathbb{K}$ e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ t.c.

$$\operatorname{im}(T) = Y.$$

Allora,

a) $V \subset X$ aperto $\Rightarrow$ $T(V) \subset Y$ aperto

b) T iniettivo $\Rightarrow$ $T \in \mathcal{I}so(X, Y)$.

<u>Dim.</u> a) $V \subset X$ aperto e $y_0 \in T(V)$

- $\exists\, x_0 \in V : Tx_0 = y_0$

$$\boxed{B_\rho(0) \subset T(B_{\rho/\delta}(0))\ \forall \rho > 0}$$

- BS $\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$
- $r > 0 : B_{r/\delta}(x_0) \subset V \Rightarrow B_r(y_0) \subset T(B_{r/\delta}(x_0)) \subset T(V)$
- y_0 punto interno di $T(V)$

b) Ovvio! ∎

Biduale e spazi riflessivi

- X sp. normato con norma $\|\cdot\|$
- $X^* = L(X, \mathbb{K})$ duale di X (topologico)
- $x^* \in X^*$ e $\langle x^*, x \rangle = x^*(x)$ $\forall x \in X$
- $\begin{cases} \|x^*\| = \sup\{|\langle x^*, x\rangle| : \|x\| \leq 1\}, & x^* \in X^* \\ \|x\| = \sup\{|\langle x^*, x\rangle| : \|x^*\| \leq 1\}, & x \in X \end{cases}$ (HB!)
- X^* sp. di Banach con norma $\|\cdot\|$
- $X^{**} = L(X^*, \mathbb{K})$ biduale di X
- $x^{**} \in X^{**}$ e $\langle x^{**}, x^* \rangle = x^{**}(x^*)$ $\forall x^* \in X^*$
- $\|x^{**}\| = \sup\{|\langle x^{**}, x^*\rangle| : \|x^*\| \leq 1\}$, $x^{**} \in X^{**}$
- X^{**} sp. di Banach con norma $\|\cdot\|$

Oss. V sp. vettoriale con $\dim V = N < +\infty$

- $\dim V^* = N$ e V, V^* sono isomorfi (come sp. vett.)
- $\dim V^{**} = N$ e V, V^*, V^{**} sono isomorfi (———) ▨

Domanda: Che relazione c'è tra X e X^{**} ?

Sia X sp. normato con norma $\|\cdot\|$.

Dato $x \in X$, sia $Jx : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ definita da

$$\langle Jx, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle, \qquad x^* \in X^*.$$

- $Jx : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ lineare $\forall x \in X$
- $|\langle Jx, x^* \rangle| = |\langle x^*, x \rangle| \leq \|x\| \|x^*\| \ \forall x^* \in X^* \Rightarrow Jx \in X^{**} \ \forall x \in X$

Si verifica che

$$x \in X \longmapsto Jx \in X^{**}$$

e' lineare e si ha

$$\|Jx\| = \sup\{|\langle Jx, x^* \rangle| : \|x^*\| \leq 1\} =$$
$$= \sup\{|\langle x^*, x \rangle| : \|x^*\| \leq 1\} = \|x\|$$

per ogni $x \in X$. Quindi,

$$J : X \longrightarrow X^{**}$$

e' un isomorfismo isometrico di X in X^{**}.

<u>Def</u>. Uno sp. di Banach X e' <u>riflessivo</u> se

$$J(X) = X^{**}.$$

$\blacksquare$

Oss.

- X riflessivo $\Rightarrow$ X, X^{**} isometricamente isomorfi.
- X normato non di Banach $\Rightarrow$ X non riflessivo.
- affinché X sia riflessivo occorre che l'isomorfismo isometrico di X su X^{**} sia dato da J. ▨

Teorema: Siano X sp. di Banach e $Y \subset X$ sottosp. Allora,

a) X riflessivo $\Leftrightarrow$ X^* riflessivo

b) X riflessivo e Y chiuso $\Rightarrow$ Y^* riflessivo.

Oss.
$$X \xrightarrow{J} X^{**} \xrightarrow{J} X^{****} \;\cdots$$
$$X^{*} \xrightarrow{J} X^{***} \xrightarrow{J} X^{*****} \;\cdots$$

- $J(\underbrace{X^{**\cdots *}}_{n\text{-volte}}) = \underbrace{X^{**\cdots *}}_{(n+2)\text{-volte}} \Rightarrow \underbrace{X^{**\cdots *}}_{n\text{-volte}}$ riflessivo $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{X^{**\cdots *}}_{(n+1)\text{-volte}}$ riflessivo $\Rightarrow J(\underbrace{X^{**\cdots *}}_{(n+1)\text{-volte}}) = \underbrace{X^{**\cdots *}}_{(n+3)\text{-volte}}$

X riflessivo $\Rightarrow$
$$X \equiv X^{**} \equiv X^{****} \cdots$$
$$X^{*} \equiv X^{***} \equiv X^{*****} \cdots$$
▨

Dim. appunti ...

Teorema: Sia X sp. di Banach. Allora,

X^* separabile $\Rightarrow$ X separabile

Oss. Il viceversa e' in genere falso (esercizio...., a meno che X sia riflessivo. ■

Dim.

- X^* separabile $\Rightarrow \exists \{x_n^*\}_n$ numerabile e denso in X^*
- $\forall n \; \exists \, x_n \in X : \|x_n\| \leq 1$ e $|\langle x_n^*, x_n \rangle| \geq \|x_n^*\|/2$
- $\begin{cases} D = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}} \{x_n : n \geq 1\} & \text{se } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ D = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}} \{x_n : n \geq 1\} & \text{se } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$ numerabile
- P.A. $\overline{D} \neq X \Rightarrow \exists \, x_0 \in X$ con $x_0 \notin \overline{D}$ ($x_0 \neq 0$!)
- HB $\Rightarrow \exists \, x_0^* \in X^* : \langle x_0^*, x_n \rangle = 0 \; \forall n$ e $\langle x_0^*, x_0 \rangle \neq 0$
- $\exists \, x_{n_k}^* \; (k \geq 1) : x_{n_k}^* \longrightarrow x_0^*$ in X^* per $k \to +\infty$
- $\|x_{n_k}^*\|/2 \leq |\langle x_{n_k}^*, x_{n_k} \rangle| \leq$

$$\leq |\langle x_{n_k}^* - x_0^*, x_{n_k} \rangle| + |\cancel{\langle x_0^*, x_{n_k} \rangle}| \leq$$

$$\leq \|x_{n_k}^* - x_0^*\| \longrightarrow 0 \text{ per } k \to +\infty$$

- $x_{n_k}^* \longrightarrow 0$ in X^* per $k \to +\infty \Rightarrow x_0^* = 0$ Assurdo! ■

MISURE REALI E COMPLESSE

Misure reali e complesse

X insieme (non vuoto)

$\lambda : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva su $\mathcal{S}$

$f : X \to \mathbb{K}$ λ-integrabile

$$E_n \in \mathcal{S} \; n \geq 1 : \begin{array}{l} E_m \cap E_n = \emptyset \; m \neq n \\ E = \bigcup_n E_n \end{array} \Rightarrow \int_E f d\lambda = \sum_n \int_{E_n} f d\lambda$$

La funzione

$$E \in \mathcal{S} \longmapsto \int_E f d\lambda \in \mathbb{K}$$

e' numerabilmente additiva.

Def. Una funzione $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ t.c.

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $E_n \in \mathcal{S} \; n \geq 1 : \begin{array}{l} E_m \cap E_n = \emptyset \; m \neq n \\ E = \bigcup_n E_n \end{array} \Rightarrow \mu(E) = \sum_n \mu(E_n)$

si dice misura reale/complessa su $\mathcal{S}$.

Oss
- $\{\text{misure positive}\} \not\subset \{\text{misure reali}\}$
- $\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow \mu = \mu_1 + i\mu_2$ μ_j misure reali $(j = 1,2)$
- $E \in \mathcal{S} : \mu(F) = 0 \; \forall F \in \mathcal{S}, F \subset E$ μ-trascurabile

Oss. $\mu: \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ misura reale complessa

$E_n \in \mathcal{S}$ $n \geq 1$: $E_m \cap E_n = \phi$ $m \neq n$

- $\sum_n \mu(E_n)$ incondizionatam. convergente $\Rightarrow$ $\sum_n |\mu(E_n)| < +\infty$
- $\lim_{n \to +\infty} \mu(E_n) = 0$ ▨

Proposizione: $\mu: \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ misura reale/complessa su $\mathcal{S}$

Allora

a) $E, F \in \mathcal{S}$ $\quad E \cap F = \phi \Rightarrow \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$

$\quad E \subset F \Rightarrow \mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$

b) $E_n \in \mathcal{S}$, $E_n \subset E_{n+1}$ $\forall n$ $\Rightarrow$ $\mu(\bigcup_n E_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(E_n)$

c) $E_n \in \mathcal{S}$, $E_{n+1} \subset E_n$ $\forall n$ $\Rightarrow$ $\mu(\bigcap_n E_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(E_n)$

Teorema: $\mu: \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ misura reale/complessa $\Rightarrow$ μ limitata

Dim

1. $E \in \mathcal{S}$: $\sup\{|\mu(F)| : F \in \mathcal{S}, F \subset E\} = +\infty$ $\Rightarrow$ vale (*)

(*) $\exists E_i \in \mathcal{S}$ $i = 1,2$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} E_1 \cup E_2 = E \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset \\ |\mu(E_1)| \geq 1 \text{ e } \sup\{|\mu(F)| : F \in \mathcal{S}, F \subset E_2\} = +\infty \end{cases}$

- $\sup\{|\mu(F)| : F \in \mathcal{S}, F \subset E\} = +\infty$ $\Rightarrow$ $\exists F \in \mathcal{S}$: $F \subset E$ e $|\mu(F)| \geq 1$

- $\sup\{|\mu(G)| : G\in\mathcal{S}, G\subset E\setminus F\} = +\infty \Rightarrow E_1 = F$ e $E_2 = E\setminus F$
- $\sup\{|\mu(G)| : G\in\mathcal{S}, G\subset E\setminus F\} < +\infty \Rightarrow \sup\{|\mu(G)| : G\in\mathcal{S}, G\subset F\} = +\infty$
- $\exists G\in\mathcal{S} : G\subset F$ e $|\mu(G)| \geq |\mu(F)|+1$
- $\sup\{|\mu(H)| : H\in\mathcal{S}, H\subset F\setminus G\} = +\infty \Rightarrow E_1 = G$ e $E_2 = E\setminus G$
- $\sup\{|\mu(H)| : H\in\mathcal{S}, H\subset F\setminus G\} < +\infty \Rightarrow \sup\{|\mu(H)| : H\in\mathcal{S}, H\subset G\} = +\infty$
- $|\mu(F\setminus G)| = |\mu(F)-\mu(G)| \geq |\mu(G)|-|\mu(F)| \geq 1$
- $E_1 = F\setminus G$ e $E_2 = (E\setminus F)\cup G$.

(2) $\sup\{|\mu(E)| : E\in\mathcal{S}\} = +\infty \Rightarrow \exists E_n\in\mathcal{S}\ n\geq 1$: $E_m\cap E_n = \emptyset\ m\neq n$, $|\mu(E_n)|\geq 1\ \forall n$

assurdo! $\blacksquare$

Semivariazione

$$|\mu|_{sv}(E) = \sup\{|\mu(F)| : F\in\mathcal{S}, F\subset E\} \in [0,+\infty) \quad E\in\mathcal{S}$$

$\hookrightarrow$ semivariazione di μ su E

Oss.

$E,F\in\mathcal{S}$ $E\subset F \Rightarrow |\mu|_{sv}(E) \leq |\mu|_{sv}(F)$

$E, E_n\in\mathcal{S}$ $E\subset\bigcup_n E_n \Rightarrow |\mu|_{sv}(E) \leq \sum_n{}' |\mu|_{sv}(E_n)$ $\blacksquare$

Oss $|\mu|_{sv}$ non e' una misura!

$$\mu(E) = \sum_{n\in E}' (-1)^n/2^n, \quad E\subset \mathbb{N}_+ \quad \text{misura reale}$$

$$|\mu|_{sv}(E) = \max\left\{ \sum_{n\in E \text{ pari}}' 1/2^n, \sum_{n\in E \text{ dispari}}' 1/2^n \right\} <$$

$$< \sum_{n\in E \text{ pari}}' 1/2^n + \sum_{n\in E \text{ dispari}}' 1/2^n =$$

$$= |\mu|_{sv}(\{n: n\in E \text{ pari}\}) + |\mu|_{sv}(\{n: n\in E \text{ dispari}\}$$

$E\subset\mathbb{N}_+$: $\{n: n\in E \text{ pari}\} \neq \phi$ e $\{n: n\in E \text{ dispari}\} \neq \phi$. ■

Oss. $\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \{ \mu: \mathcal{S} \to \mathbb{K} \text{ misura reale/complessa su } \mathcal{S}\}$

$$\|\mu\|_{sv} = |\mu|_{sv}(X) \quad \mu\in\mathcal{M}(\mathcal{S})$$

$(\mathcal{M}(\mathcal{S}), \|\cdot\|_{sv})$ sp. normato su $\mathbb{K}$ ■

Teorema: $(\mathcal{M}(\mathcal{S}), \|\cdot\|_{sv})$ sp. di Banach su $\mathbb{K}$.

Dim .....

Variazione totale

Problema: data $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$, $\exists\, \nu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva "minima" t.c.

$$(**) \qquad E \in \mathcal{S} \Rightarrow |\mu(F)| \leq \nu(E) \quad \forall F \in \mathcal{S}, F \subset E \; ?$$

Oss
- $(**)$ equivale a $|\mu(E)| \leq \nu(E)$ $\forall E \in \mathcal{S}$
- $(**) \Rightarrow \sum_n |\mu(E_n)| \leq \ldots \leq \nu(E)$ $\forall E_n, E \in \mathcal{S}$: $E_m \cap E_n = \phi$, $E = \bigcup_n E_n$

$$|\mu|_{tv}(E) = \sup\left\{ \sum_n |\mu(E_n)| : E_n \in \mathcal{S}, E_m \cap E_n = \phi \text{ e } E = \bigcup_n E_n \right\}, \; E \in \mathcal{S}$$

$\hookrightarrow$ variazione totale di μ su E

Teorema: Sia $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$. Allora,

a) $|\mu|_{sv}(E) \leq |\mu|_{tv}(E) \leq c\, |\mu|_{sv}(E)$ $E \in \mathcal{S}$ ($c = 2$ o $c = 4$)

b) $|\mu|_{tv} : \mathcal{S} \to [0,+\infty)$ misura positiva finita su $\mathcal{S}$

Dim $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\mu = \mu_1 + i\mu_2$

$E_n \in \mathcal{S}$ $n \geq 1$ e $E \in \mathcal{S}$: $E_m \cap E_n = \phi$ $m \neq n$ e $E = \bigcup_n E_n$

a)
- $\sum_n |\mu_j(E_n)| = \sum_n^{+} \mu_j(E_n) - \sum_n^{-} \mu_j(E_n) \leq 2|\mu_j|_{sv}(E) \leq 2|\mu|_{sv}(E)$
- $\sum_n |\mu(E_n)| \leq \sum_n |\mu_1(E_n)| + \sum_n |\mu_2(E_n)| \leq 4|\mu|_{sv}(E)$

- $|\mu|_{sv}(E) \leq |\mu|_{tv}(E) \leq 4\,|\mu|_{sv}(E)$

b) $\{F_h\}_h$ partizione $\mathcal{S}$-misurabile di E

- $\sum_h{}' |\mu(F_h)| \leq \sum_h{}' \left(\sum_k{}' |\mu(F_h \cap E_k)| \right) =$

Fubini $\to$ $= \sum_k{}' \left(\sum_h{}' |\mu(F_h \cap E_k)| \right) \leq \sum_k{}' |\mu|_{tv}(E_k)$

- $|\mu|_{tv}(E) \leq \sum_k{}' |\mu|_{tv}(E_k)$
- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \forall k \; \exists \{F_{k,h}\}_{h \geq 1}$ partizione $\mathcal{S}$-mis. di E_k t.c.

$$\sum_h{}' |\mu(F_{k,h})| \geq |\mu|_{tv}(E_k) - \varepsilon/2^k$$

- $\{F_{k,h}\}_{k,h}$ partizione $\mathcal{S}$-mis. di E t.c.

$$|\mu|_{tv}(E) \geq \sum_{k,h}{}' |\mu(F_{k,h})| =$$

$$= \sum_k{}' \left(\sum_h{}' |\mu(F_{k,h})| \right) \geq \sum_k{}' |\mu|_{tv}(E_k) - \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Oss. $\|\mu\|_{tv} = |\mu|_{tv}(X)$ $\mu \in M(\mathcal{S})$ norma

$\|\cdot\|_{sv}$ e $\|\cdot\|_{tv}$ norme equivalenti su $M(\mathcal{S})$ $\blacksquare$

Misure reali: decomposizioni di Jordan e Hahn

$\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ misura reale

$$\mu^+ = \frac{1}{2}\left(|\mu|_{tv} + \mu\right) \quad \text{variazione positiva di } \mu$$

$$\mu^- = \frac{1}{2}\left(|\mu|_{tv} - \mu\right) \quad \text{variazione negativa di } \mu$$

Oss.

- $\mu^\pm : \mathcal{S} \to [0,+\infty)$ misure positive finite
- (μ^+, μ^-) decomposizione di Jordan di μ
- $\mu = \mu^+ - \mu^-$ e $|\mu|_{tv} = \mu^+ + \mu^-$
- $\mathcal{M}_b^+ = \{\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty) \text{ misure positive finite}\}$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \operatorname{span} \mathcal{M}_b^+$$

- minimalità della decomposizione di Jordan di μ

$\mu_j \in \mathcal{M}_b^+(\mathcal{S})$ $j=1,2$: $\mu = \mu_1 - \mu_2 \Rightarrow \mu_1 \geq \mu^+$ e $\mu_2 \geq \mu^-$

$E \in \mathcal{S}$

$\mu(F) \geq 0 \quad \forall F \in \mathcal{S},\ F \subset E \qquad E$ μ-positivo

$\mu(F) \leq 0 \quad \forall F \in \mathcal{S},\ F \subset E \qquad E$ μ-negativo

Lemma: Sia $\mu \in M(\mathcal{S})$ reale. Allora,

$E \in \mathcal{S}$ con $\mu(E) > 0 \Rightarrow \exists E^+ \in \mathcal{S}$: . E^+ μ-positivo
. $E^+ \subset E$.

Dim

P.A. E non contiene insiemi μ-positivi non banali

$\Downarrow$

$\forall F \in \mathcal{S}$ con $\mu(F) > 0$ $\exists G \in \mathcal{S}$ t.c. $G \subset F$ e $\mu(G) < 0$

- $F_0 = \phi$
- $m_1 = \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{S} \text{ e } G \subset E \setminus F_0\} < 0$
- $\exists F_1 \in \mathcal{S}$: $F_1 \subset E \setminus F_0$ e $\mu(F_1) \leq m_1/2 < 0$
- $\mu(E \setminus (F_0 \cup F_1)) > 0$
- $m_2 = \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{S} \text{ e } G \subset E \setminus (F_0 \cup F_1)\} < 0$
- $\exists F_2 \in \mathcal{S}$: $F_2 \subset E \setminus (F_0 \cup F_1)$ e $\mu(F_2) \leq m_2/2 < 0$
- $\mu(E \setminus (F_0 \cup \ldots \cup F_2)) > 0$

Iterando si determinano $F_k \in \mathcal{S}$ $k \geq 0$ t.c.

- $F_0 = \phi$, $F_k \subset E$ $\forall k$ e $F_h \cap F_k = \phi$ per $h \neq k$;
- $m_k = \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{S} \text{ e } G \subset E \setminus (F_0 \cup \ldots \cup F_{k-1})\} < 0$ $k \geq 1$
- $\mu(F_k) \leq m_k/2 < 0$ $\forall k \geq 1$.

- $\mu(F_k) \to 0$ per $k \to +\infty \Rightarrow m_k \to 0$ per $k \to +\infty$

- $F := \bigcup_k F_k \in \mathcal{S} \Rightarrow \mu(F) = \sum_k{}' \mu(F_k) \leq \sum_k{}' m_k/2 < 0$
- $G \in \mathcal{S}$ e $G \subset E \setminus F \Rightarrow G \subset E \setminus (F_0 \cup \dots \cup F_{k-1})\ \forall k \Rightarrow \mu(G) \geq m_k$
- $E \setminus F$ μ-positivo e $0 < \mu(E) = \mu(F) + \mu(E \setminus F) <$

$< \mu(E \setminus F)$

assurdo! ▨

<u>Teorema</u>: Sia $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ reale. Allora, $\exists X^{\pm} \in \mathcal{S}$ t.c.

- $X^+ \cap X^- = \phi$ e $X = X^+ \cup X^-$
- X^+ μ-positivo e X^- μ-negativo

<u>Oss.</u>
- (X^+, X^-) decomposizione di Hahn di X rispetto a μ
- $\mu^{\pm}(E) = \pm \mu(E \cap X^{\pm})\ \forall E \in \mathcal{S}$. ▨

<u>Dim</u>. Supponiamo esistano $E, F \in \mathcal{S}$ con $\mu(E) >$
$\mu(F) <$

- $\mathcal{S}^+ = \{E \in \mathcal{S} : E\ \mu\text{-positivo}\}$ e $M = \sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{S}^+\} < +\infty$
- $\forall n\ \exists X_n^+ \in \mathcal{S}^+ : X_n^+ \subset X_{n+1}^+$ e $\mu(X_n^+) \geq M - 1/n\ \forall n$
- $X^+ = \bigcup_n X_n^+ \Rightarrow X^+ \in \mathcal{S}^+$ e $\mu(X^+) = M$
- $X^- = X \setminus X^+$ μ-negativo altrimenti si violerebbe la definizione di M. ▨

Misure assolutamente continue e teorema di Radon-Nikodym

X insieme (non vuoto)

$\lambda : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva su $\mathcal{S}$

Def. Una misura positiva $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ o reale/complessa $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ con la seguente proprietà: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c.

$$E \in \mathcal{S} \text{ e } \lambda(E) \leq \delta \Rightarrow \begin{array}{l} \mu(E) \leq \varepsilon \\ |\mu(E)| \leq \varepsilon \end{array}$$

si dice assolutamente λ-continua. ▨

Notazione: $\mu \ll \lambda$: μ assolutamente λ-continua ▨

Teorema:

a) Sia $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva. Allora,

- $\mu \ll \lambda \Rightarrow \mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$;
- $\mu(X) < +\infty$ e $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu) \Rightarrow \lambda \ll \mu$.

b) Sia $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ reale/complessa. Allora,

$$\mu \ll \lambda \iff |\mu|_{tv} \ll \lambda \iff \mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu).$$

Dim a) $\mu \ll \lambda \Rightarrow \mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$ ovvio!

- P.A. $\exists \varepsilon > 0$ e $E_n \in \mathcal{S}$ $n \geq 1$: $\lambda(E_n) < 1/2^n$ e $\mu(E_n) \geq \varepsilon$

- $E_\infty = \limsup_{n \to +\infty} E_n = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} E_n \in \mathcal{Y}$
- $\lambda(E_\infty) = 0$ e $\mu\left(\bigcup_{n \geq m} E_n\right) \geq \varepsilon \quad \forall m$
- $\mu(X) < +\infty \Rightarrow \mu(E_\infty) = \lim_{m \to +\infty} \mu\left(\bigcup_{n \geq m} E_n\right) \geq \varepsilon$

assurdo!

b) . . . . .

$\blacksquare$

<u>Esempio</u>:

$$\mu(E) = \#(E)$$
$$\lambda(E) = \sum_{n \in E}{}' \frac{1}{2^n} \qquad E \subset \mathbb{N}_+$$

- $\mathcal{N}(\lambda) = \mathcal{N}(\mu) = \{\phi\}$
- $\mu(\{n\}) = 1$ e $\lambda(\{n\}) = 1/2^n \quad \forall n$.

$\blacksquare$

Teorema (J. Radon – O. Nikodym)

Siano $\mu, \lambda : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misure positive σ-finite t.c.
$$\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu).$$

Allora,

a) $\exists\, f : X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$-misurabile t.c.
$$\mu(E) = \int_E f \, d\lambda, \quad E \in \mathcal{S};$$

b) se $f, g : X \to [0,+\infty]$ sono funzioni $\mathcal{S}$-misurabi t.c.
$$\int_E f \, d\lambda = \mu(E) = \int_E g \, d\lambda, \quad E \in \mathcal{S},$$
si ha $f = g$ λ-quasi ovunque in X.

Oss. $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$ derivata di Radon-Nikodym

Dim a) 1 $\mu(X), \lambda(X) < +\infty$

- $\tilde{\mathcal{F}} = \{ f : X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$-misur. t.c. $\int_E f \, d\lambda \le \mu(E)\ \forall E \in \mathcal{S} \}$
- $\tilde{\mathcal{F}}$ non vuoto $\Rightarrow L = \sup \{ \int_X f \, d\lambda : f \in \tilde{\mathcal{F}} \} \le \mu(X) < +\infty.$
- $f_1, f_2 \in \tilde{\mathcal{F}} \Rightarrow \max\{f_1, f_2\} \in \tilde{\mathcal{F}}$
- $\exists\, f_n \in \tilde{\mathcal{F}}$ $n \ge 1$: $f_n \le f_{n+1}$ $\forall n$ e $\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\lambda = L$
- $f : X \to [0,+\infty]$ $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$, $x \in X$

- f $\mathcal{S}$-mis. e $\int_E f\,d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\,d\lambda \le \mu(E)$ $\forall E\in\mathcal{S}$
- $f\in\mathcal{F}$ e $\int_X f\,d\lambda = L$
- $\nu(E) = \mu(E) - \int_E f\,d\lambda$, $E\in\mathcal{S}$ misura positiva finita
- tesi: $\nu(E) = 0$ $\forall E\in\mathcal{S}$
- $\nu_n(E) = \nu(E) - \frac{1}{n}\lambda(E)$, $E\in\mathcal{S}$ $n\geq 1$ misura reale
- $\nu_n \in \mathcal{M}(\mathcal{S}) \Rightarrow \exists\, X_n^{\pm}$ decomposizione di Hahn di X rispe
- $X^+ = \bigcup_n X_n^+$ e $X^- = X\setminus X^+ \Rightarrow X^{\pm}\in\mathcal{S} : X^+\cap X^- = \emptyset$ e $X = X^+\cup X^-$
- $0 \le \nu(X^-) = \nu_n(X^-) + \frac{1}{n}\lambda(X^-) \le \frac{1}{n}\lambda(X) \longrightarrow 0$ $n\to+\infty$
- $g_n = f + \frac{1}{n}\mathbb{1}_{X_n^+}$ $\mathcal{S}$-mis. $\forall n$
- $$\int_E g_n\,d\lambda = \int_E f\,d\lambda + \frac{1}{n}\lambda(E\cap X_n^+) =$$
$$= \int_{E\cap X_n^+} f\,d\lambda + \frac{1}{n}\lambda(E\cap X_n^+) + \int_{E\setminus X_n^+} f\,d\lambda =$$
$$= \mu(E\cap X_n^+) \underbrace{- \nu(E\cap X_n^+) + \frac{1}{n}\lambda(E\cap X_n^+)}_{-\nu_n(E\cap X_n^+)\le 0} + \int_{E\setminus X_n^+} f\,d\lambda \le$$
$$\le \mu(E\cap X_n^+) + \int_{E\setminus X_n^+} f\,d\lambda \le \mu(E) \quad \forall E\in\mathcal{S}$$
- $g_n\in\mathcal{F} \Rightarrow L \ge \int_X g_n\,d\lambda = \int_X f\,d\lambda + \frac{1}{n}\lambda(X_n^+) = L + \frac{1}{n}\lambda(X_n^+)$
$\Rightarrow \lambda(X_n^+) = 0$ $\forall n$
- $\lambda(X^+) = 0$ e $\mathcal{N}(\lambda)\subset\mathcal{N}(\mu) \Rightarrow \nu(X^+) = 0$.

(2) μ, λ σ-finite e $\mu(X)=+\infty$ o $\lambda(X)=+\infty$

. $\exists\, X_n \in \mathcal{S}$ $n\geq 1$: $\mu(X_n), \lambda(X_n) < +\infty$ $\forall n$ e $X_m \cap X_n = \emptyset$ $m \neq n$, $X = \bigcup_n X_n$

. $\begin{cases} \mu_n = \mu \llcorner X_n \\ \lambda_n = \lambda \llcorner X_n \end{cases}$ misure positive finite su $\mathcal{S}$ $\forall n$

. $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu) \Rightarrow \mathcal{N}(\lambda_n) \subset \mathcal{N}(\mu_n)$

. $\forall n\ \exists\, f_n : X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$-misurabile: $\mu_n(E) = \int_E f_n\, d\lambda_n$ $E \in$

. μ_n concentrata in $X_n \Rightarrow f_n = 0$ in $X \setminus X_n$

. $f_n = 0$ in $X \setminus X_n \Rightarrow \mu_n(E) = \int_E f_n\, d\lambda_n = \int_E f_n\, d\lambda$, $E \in \mathcal{S}$

. $f : X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$-misurabile $f(x) = \sum_n f_n(x)$ $x \in X$

. $\mu(E) = \sum_n \mu(E \cap X_n) = \sum_n \mu_n(E) =$

$$= \sum_n \int_E f_n\, d\lambda_n = \sum_n \int_E f_n\, d\lambda = \int_E f\, d\lambda \quad E \in \mathcal{S}$$

b) . $X_n \in \mathcal{S}$ $n \geq 1$: $\mu(X_n) < +\infty$ e $X_m \cap X_n = \emptyset$ $m \neq n$, $X = \bigcup_n X_n$

. $\{f > g\} \in \mathcal{S}$ (esercizio!)

. $h = \begin{cases} 0 & \{f \leq g\} \\ f-g & \{f > g\} \end{cases}$ $h : X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$-mis.

. $f = g + h$ in $\{f > g\}$

. $\int_{\{f>g\} \cap X_n} f\, d\lambda = \mu(\{f>g\} \cap X_n) = \int_{\{f>g\} \cap X_n} g\, d\lambda < +\infty$

- $\mu(\{f>g\}\cap X_n)+\int_{\{f>g\}\cap X_n} h\,d\lambda =$

$$= \int_{\{f>g\}\cap X_n} g\,d\lambda + \int_{\{f>g\}\cap X_n} h\,d\lambda =$$

$$= \int_{\{f>g\}\cap X_n} f\,d\mu = \mu(\{f>g\}\cap X_n) \quad \forall n$$

- $\int_{\{f>g\}\cap X_n} h\,d\lambda = 0$ e $h>0$ in $\{f>g\}\cap X_n \Rightarrow \lambda(\{f>g\}\cap X_n)=0$
- $\lambda(\{f>g\}\cap X_n)=0 \ \forall n \Rightarrow \lambda(\{f>g\})=0$
- scambiare f e g. ∎

<u>Teorema</u> (RN reale/complesso)

Siano $\lambda : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva σ-finita e $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ misura reale/complessa con

$$\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu).$$

Allora,

a) $\exists\, f : X \to \mathbb{K}$ λ-integrabile t.c.

$$\mu(E) = \int_E f\,d\lambda, \quad E \in \mathcal{S};$$

b) se $f, g : X \to [0,+\infty]$ sono funzioni λ-integrabili t.c.

$$\int_E f\,d\lambda = \mu(E) = \int_E g\,d\lambda, \quad E \in \mathcal{S}$$

si ha $f=g$ λ-quasi ovunque in X;

c) $|\mu|_{tv}(E) = \int_E |f|\,d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{S}.$

Dim (a) e (b) ovvie!

c) . $\bar{\mu}(E)=\int_E |f|\,d\lambda$, $E\in\mathcal{S}$ misura positiva finita su $\mathcal{S}$

. $|\mu|_{tv}(E)\le\bar{\mu}(E)$ $\forall E\in\mathcal{S}$

. $s: X\longrightarrow\mathbb{K}$ semplice e $\mathcal{S}$-misurabile

$$s=s_1 1_{E_1}+\dots+s_k 1_{E_k}$$

con $s_h\in\mathbb{K}$, $|s_h|\le 1$ e $E_h\in\mathcal{S}$ disgiunti $h=1,\dots,k$

. $\left|\int_E sf\,d\lambda\right|=\left|\sum_h^{'} s_h\int_{E\cap E_h} f\,d\lambda\right|\le\sum_h^{'}|\mu(E\cap E_h)|\le|\mu|_{tv}(E)$

. $\mathrm{sgn}(f)$ $\mathcal{S}$-misurabile con $|\mathrm{sgn}(f)|\le 1$ in X

. $\exists\, s_n: X\longrightarrow\mathbb{K}$ $\mathcal{S}$-misurabili: $s_n\longrightarrow f$ uniform. in X, $|s_n|\le|f|$ in X

. CD $\Rightarrow$ $\bar{\mu}(E)=\int_E|f|\,d\lambda=\lim_{n\to+\infty}\int_E s_n f\,d\lambda\le$

$$\le\lim_{n\to+\infty}\left|\int_E s_n f\,d\lambda\right|\le|\mu|_{tv}(E)$$ ▨

<u>Corollario</u>: Sia $\mu\in\mathcal{M}(\mathcal{S})$ misura reale/complessa. Allora, $\exists\ \theta: X\longrightarrow\mathbb{K}$ $|\mu|_{tv}$-integrabile t.c.

. $|\theta(x)|=1$ $\forall x\in X$;

. $\mu(E)=\int_E\theta\,d|\mu|_{tv}$, $E\in\mathcal{S}$.

<u>Oss</u> $d\mu=\theta\,d|\mu|_{tv}$ decomposizione polare di μ ▨

SPAZI FUNZIONALI

SPAZI DI FUNZIONI CONTINUE

- X sp. topologico di Hausdorff

$$\begin{cases} B(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ limitata}\} \\ \|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in X\}, \ f \in B(X) \end{cases}$$ algebra di Banach

- spazi di funzioni continue:

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ continua}\}$$

$$C_b(X) = C(X) \cap B(X)$$

$$C_0(X) = \{f \in C(X) : \forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon \text{ compatto t.c. } |f(x)| \le \varepsilon \ \forall x \in X \setminus K_\varepsilon\}$$

$$C_c(X) = \{f \in C(X) : \operatorname{supp}(f) \text{ compatto}\}$$

Oss. $C_c(X) \subset C_0(X) \subset C_b(X) \subset C(X)$

X compatto $\Rightarrow$ $C_c(X) = \dots = C(X)$

X LCH $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{tutti diversi (in genere)} \\ \text{si può avere però } C_0(X) = C_c(X) \text{ e } C(X) = C_b(\end{cases}$

(HS 7.11 pg. 86) ▨

Esercizio: (X, d) sp. metrico non compatto $\Rightarrow \exists f \in C(X)$ illimitata ▨

Oss X LCH $\Rightarrow X_\infty = X \cup \{\infty\}$ compattificazione di Alexandr

- $V \subset X_\infty$ aperto in $X_\infty \Leftrightarrow \begin{cases} V \subset X \text{ aperto in } X \\ \infty \in V \text{ e } V^c \text{ compatto in } X \end{cases}$

- X_∞ sp. topol. di Hausdorff compatto

- X LCH non compatto $\Rightarrow X$ denso in X_∞ e $\infty \in X'$

- X compatto $\Leftrightarrow X$ chiuso in X_∞ e ∞ punto isolato di X

- $f \in C_0(X) \Leftrightarrow f \in C(X)$ e $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ in X_∞ ■

Esempio:

- I insieme infinito $\Rightarrow I$ LCH non compatto con topologia discreta

- $c_0(I) = \{x : I \to \mathbb{K} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists F \subset I \text{ finito t.c. } |x(i)| \leq \varepsilon \ \forall i \in I \setminus F\}$

- $I = \mathbb{N}_+ \Rightarrow c_0 = c_0(\mathbb{N}_+)$ ■

Completezza

Teorema: X CH $\Rightarrow$ $C(X)$ algebra di Banach

Dim Analisi 2B! $\blacksquare$

Teorema: Sia X LCH. Allora,

a) $C_0(X)$ algebra di Banach;

b) $C_c(X)$ denso in $C_0(X)$.

Dim a) $C_0(X)$ chiuso in $B(X)$.

b) · $f \in C_0(X)$ e $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, K_\varepsilon$ compatto : $|f(x)| \leq \varepsilon \ \forall x \in X \setminus$

· $\varphi_\varepsilon \in C_c(X)$: $K_\varepsilon \prec \varphi_\varepsilon$

· $\varphi_\varepsilon f \in C_0(X)$ e $|\varphi_\varepsilon(x) f(x) - f(x)| = (1 - \varphi_\varepsilon(x))|f(x)|$ $x \in$

$$\cdot \begin{cases} x \in K_\varepsilon & \Rightarrow \ |\varphi_\varepsilon(x) f(x) - f(x)| = 0 \\ x \notin K_\varepsilon & \Rightarrow \ |\varphi_\varepsilon(x) f(x) - f(x)| = (1 - \varphi_\varepsilon(x))|f(x)| \leq |f(x)| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Quindi $\|\varphi_\varepsilon f - f\|_u \leq \varepsilon$. $\blacksquare$

Separabilità (teorema di Stone-Weierstraß)

Teorema (M.H. Stone) Siano X CH e $\mathcal{L}$ sottospazio di $C(X,\mathbb{R})$ t.c.

a) $u,v \in \mathcal{L} \Rightarrow \min\{u,v\}, \max\{u,v\}$;

b) $\forall x,y \in X, x \neq y \; \exists\, u \in \mathcal{L} : u(x) = u(y)$;

c) $u_c(x) = c,\ x \in X\ (c \in \mathbb{R}) \Rightarrow u_c \in \mathcal{L}$.

Allora $\mathcal{L}$ e' denso in $C(X)$.

Oss. $\mathcal{L}$ sottospazio di $C(X,\mathbb{R}) + (a) \equiv$ reticolo

Dim ① $\forall x,y \in X$ e $a,b,c \in \mathbb{R}$ vale $(*)$

$$(*)\begin{cases} x \neq y \Rightarrow \exists\, v \in \mathcal{L} : v(x) = a \text{ e } v(y) = b \\ x = y \Rightarrow \exists\, v \in \mathcal{L} : v(x) = v(y) = c \end{cases}$$

- $(c) \Rightarrow$ vale $(*)$ con $\begin{cases} x \neq y & \text{e } a = b \\ x = y & \text{e } c \in \mathbb{R} \end{cases}$
- $x \neq y$ e $a \neq b$
- $(b) \Rightarrow \exists\, u \in \mathcal{L} : u(x) = \alpha,\ u(y) = \beta$ e $\alpha \neq \beta$
- $(**)\begin{cases} \alpha s + t = a \\ \beta s + t = b \end{cases}$ $\det\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = \alpha - \beta \neq 0 \Rightarrow \exists!\, (s,t)$ sol. di $(**)$

- $v(z) = su(z)+t, \ z\in X \Rightarrow v\in \mathcal{L}$ e $v(x)=a, v(x)=b$

(2) $u\in C(X)$ e $\varepsilon>0$ fissati

- $(*) \Rightarrow \forall x,y\in X \ \exists \ v_{xy}\in \mathcal{L}: v_{xy}=u(x)$ e $v_{xy}(y)=u(y)$
- $y\in X \Rightarrow \exists \ V_{xy}$ intorno aperto di y: $v_{xy}(z)\leq u(z)+\varepsilon \ z\in V_{xy}$
- X compatto $\Rightarrow \exists \ y_1,\dots,y_n : X = V_{xy_1}\cup\dots\cup V_{xy_n}$
- $v_x = \min\{v_{xy_1},\dots,v_{xy_n}\}\in \mathcal{L}$ e $\begin{cases} v_x(x)=u(x) \\ v_x(z)\leq u(z)+\varepsilon \ \forall z\in X \end{cases}$
- $x\in X \Rightarrow V_x$ intorno aperto di x: $v_x(z)\geq u(z)-\varepsilon \ \forall z\in V_x$
- X compatto $\Rightarrow \exists \ x_1,\dots,x_k : X = V_{x_1}\cup\dots\cup V_{x_k}$
- $v = \max\{v_{x_1},\dots,v_{x_k}\}\in\mathcal{L}$ e $\begin{cases} v(z)\leq u(z)+\varepsilon \\ v(z)\geq u(z)-\varepsilon \end{cases} \forall z\in X$

∎

<u>Oss</u>.

Teorema di approssimazione di Weierstrass:

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ continua. Per ogni $\varepsilon>0$ esiste $p_\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ polinomio t.c.

$$\sup\{|p_\varepsilon(t)-f(t)| : t\in[a,b]\}\leq\varepsilon$$

∎

Teorema (M.H. Stone - K. Weierstraß)

Siano X CH e $\mathcal{A}$ algebra di $C(X)$ t.c.

a) $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$ $\exists f \in \mathcal{A}$: $f(x) \neq f(y)$;

b) $f_c(x) = c$, $x \in X$ $(c \in \mathbb{K}) \Rightarrow f_c \in \mathcal{A}$;

c) $f \in \mathcal{A} \Rightarrow f^* \in \mathcal{A}$.

Allora, $\mathcal{A}$ e' densa in $C(X)$

Oss. (c) ha senso solo se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. $\blacksquare$

Dim ① $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ + (a) e (b)

. $cl(\mathcal{A})$ algebra di $C(X, \mathbb{R})$ con (b) e (c) di (S)

. $u \in cl(\mathcal{A}) \Rightarrow |u| \in cl(\mathcal{A})$

- $\varepsilon > 0$ e $a, b \in \mathbb{R}$ con $u(X) \subset [a,b]$

- $(W) \Rightarrow \exists\, p_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $|p_\varepsilon(t) - |t|| \leq \varepsilon$ $\forall t \in [a,b]$

- $p_\varepsilon \circ u \in cl(\mathcal{A})$ e $|p_\varepsilon(u(x)) - |u(x)|| \leq \varepsilon$ $\forall x \in X$

. $$\begin{cases} \min\{a,b\} = b - (a-b)^- = b - \dfrac{|a-b| - (a-b)}{2} \\ \max\{a,b\} = b + (a-b)^+ = b + \dfrac{|a-b| + (a-b)}{2} \end{cases}$$

. $u, v \in cl(\mathcal{A}) \Rightarrow \min\{u,v\}, \max\{u,v\} \in cl(\mathcal{A})$

. $(S) \Rightarrow cl(\mathcal{A}) = C(X, \mathbb{R})$.

(2) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ + (a), (b) e (c)

- $\begin{cases} u=\mathrm{Re}(f) \text{ e } f\in\mathcal{A} \Rightarrow u=\mathrm{Im}(if) \text{ e } if\in\mathcal{A} \\ v=\mathrm{Im}(f) \text{ e } f\in\mathcal{A} \Rightarrow v=\mathrm{Re}(-if) \text{ e } -if\in\mathcal{A} \end{cases}$

- $\mathcal{A}'=\{\mathrm{Re}(f): f\in\mathcal{A}\}=\{\mathrm{Im}(f): f\in\mathcal{A}\}$

- $\mathcal{A}'$ algebra di $C(X,\mathbb{R})$
  - $u_j\in\mathcal{A}'$ $j=1,2 \Rightarrow \exists f_j,g_j\in\mathcal{A}: u_j=\mathrm{Re}(f_j)$ e $v_j=\mathrm{Im}(g_j)$ $j=1$
  - $\begin{cases} su_1+tu_2=\mathrm{Re}(sf_1+tf_2) \text{ e } sf_1+tf_2\in\mathcal{A} \\ u_1\cdot u_2=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left((f_1+f_1^*)g_2\right) \text{ e } (f_1+f_1^*)g_2\in\mathcal{A} \end{cases}$

- $\mathcal{A}'$ algebra di $C(X,\mathbb{R})$ con (a) e (b) $\Rightarrow \mathcal{A}'$ denso in $C(X,\mathbb{R})$

- $f\in C(X)$ $f=u+iv \Rightarrow \exists u_n,v_n\in\mathcal{A}'$ $n\geq 1$: $\begin{cases} u_n\to u \\ v_n\to v \end{cases}$ unif. in X

- $\exists g_n,h_n\in\mathcal{A}$ $n\geq 1$: $u_n=\mathrm{Re}(g_n)$ e $v_n=\mathrm{Im}(h_n)$ $\forall n$

- $f_n=u_n+iv_n=\dfrac{g_n+g_n^*}{2}+\dfrac{h_n-h_n^*}{2}\in\mathcal{A}$ $\forall n$ e $f_n\to f$ unif. in X.

<u>Oss</u> In (SW) le ipotesi (a) e (b) sono indispensabili

$\mathcal{A}=\{f\in C(X): f(x)=f(y)\}$ $(x\neq y)$

$\mathcal{A}=\{f\in C(X): f(x_0)=0\}$ $(x_0\in X$ fix$)$

Corollario (K. Weierstraß): Siano $K \subset \mathbb{R}^N$ compatt e $f \in C(K)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ $\exists$ $p_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ polinomio t.c.

$$\sup\{ |p_\varepsilon(x) - f(x)| : x \in K \} \leq \varepsilon .$$

Dim (SW) con $\mathcal{A} = P(\mathbb{R}^N) = \{\text{polinomi in } \mathbb{R}^N \text{ a coef. in } \mathbb{K}\}$ $\blacksquare$

Oss (W) non vale per i polinomi di una variabile complessa

$$p(z) = a_0 z^n + \dots + a_n , \qquad z \in \mathbb{C},$$

con $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $(n \geq 0)$ $\blacksquare$

Teorema: Siano $K \subset \mathbb{R}^N$ compatto e $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto.
Allora,

a) $C(K)$ algebra di Banach separabile;

b) $C_0(U)$ ———————

Dim. a) (W) con $P_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^N)$ o $P_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^N)$.

b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ analogo)

- K_n $n \geq 1$ compatto: $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$ $\forall n$ e $U = \bigcup_n K_n$
- $\varphi_n \in C_c(\mathbb{R}^N)$: $K_n \prec \varphi_n \prec \text{int}(K_{n+1})$ $\forall n$
- $\mathcal{D} = \{\varphi_n p : p \in P_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^N) \text{ e } n \geq 1\}$ numerabile
- $f \in C_0(U)$ e $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n \geq 1 : |f(x)| \leq \varepsilon/2$ $\forall x \in U \setminus K_n$
- $\exists p \in P_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^N) : \|p - f\|_{u, K_{n+1}} \leq \varepsilon/2$
- $\varphi_n p \in \mathcal{D}$ e $\|\varphi_n p - f\|_{u,U} = \max\{\|\varphi_n p - f\|_{u, K_{n+1}} ; \|\varphi_n p - f\|_{u, U \setminus K_{n+1}}$

$$\|\varphi_n p - f\|_{u,K_{n+1}} \leq \|\varphi_n p - \varphi_n f\|_{u,K_{n+1}} + \|\varphi_n f - f\|_{u,K_{n+1}} \leq$$

$$\leq \|p - f\|_{u,K_{n+1}} + \|f\|_{u, U \setminus K_n} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$$\|\varphi_n p - f\|_{u, U \setminus K_{n+1}} = \|f\|_{u, U \setminus K_{n+1}} \leq \varepsilon/2$$

∎

Polinomi di Bernstein e teorema di Weierstrass

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad x \in [0,1] \qquad k = 0, \dots, n \qquad (n \geq 0)$$

$\{B_{n,k}\}_{k=0,\dots,n}$ polinomi di Bernstein di ordine n

$B_{0,0}(x) = 1$ $\qquad n = 0$

$B_{1,0}(x) = (1-x) \qquad B_{1,1}(x) = x$ $\qquad n = 1$

$B_{2,0}(x) = (1-x)^2 \qquad B_{2,1}(x) = 2x(1-x) \qquad B_{2,2}(x) = x^2$ $\qquad n = 2$

Proprietà:

a) $B_{n,k}(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$ e $k = 0, \dots, n \quad (n \geq 0)$;

b) $\sum_{0 \leq k \leq n}' B_{n,k}(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1] \quad (n \geq 0)$;

c) $\sum_{0 \leq k \leq n}' k B_{n,k}(x) = nx \quad \forall x \in [0,1] \quad (n \geq 0)$;

d) $\sum_{0 \leq k \leq n}' k^2 B_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 + nx \quad \forall x \in [0,1] \quad (n \geq 0)$.

Dim (a) e (b) ovvi!

(c) $$x \frac{d}{dx} \left[(x+y)^n \right] \Big|_{y=1-x} = nx(x+y)^{n-1} \Big|_{y=1-x} = nx$$

$$x \frac{d}{dx} \left[(x+y)^n \right] \Big|_{y=1-x} = x \frac{d}{dx} \left[\sum_{0 \leq k \leq n}' \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right] \Big|_{y=1-x} =$$

$$= \sum_{0 \leq k \leq n}' k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \Big|_{y=1-x} = \sum_{0 \leq k \leq n}' k B_{n,k}(x$$

(d) idem con $x^2 \frac{d^2}{dx^2}\left[(x+y)^n\right]\Big|_{y=1-x}$ ▨

<u>Teorema</u> (K. Weierstrass): Sia $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ continua e siano

$$p_n(x) = \sum_{0 \le k \le n}' f(k/n) B_{n,k}(x), \quad x \in [0,1] \quad n \ge 0.$$

Allora, $p_n \to f$ uniformemente in $[0,1]$ per $n \to +\infty$.

<u>Dim</u>. . $M > 0$: $|f(x)| \le M \quad \forall x \in [0,1]$

. $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \left[x, y \in [0,1] \text{ e } |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon/2 \right]$

. $|p_n(x) - f(x)| \le \sum_{0 \le k \le n}' |f(x) - f(k/n)| B_{n,k}(x) \quad x \in [0,1]$

. $\begin{cases} K_1(x) = \{ k \in \{0, \dots, n\} : |x - k/n| \le \delta \} \\ K_2(x) = \{ k \in \{0, \dots, n\} : |x - k/n| > \delta \} \end{cases}$

. $$|p_n(x) - f(x)| \le \sum_{0 \le k \le n}' |f(x) - f(k/n)| B_{n,k}(x) =$$

$$= \sum_{k \in K_1(x)}' |f(x) - f(k/n)| B_{n,k}(x) + \sum_{k \in K_2(x)}' |f(x) - f(k/n)| B_{n,k}(x) \le$$

$$\le \varepsilon/2 + 2M \sum_{k \in K_2(x)}' B_{n,k}(x)$$

. $k \in K_2(x) \Rightarrow |x - k/n| > \delta \Rightarrow \left| \frac{nx - k}{n\delta} \right| > 1$

. $$\sum_{k \in K_2(x)}' B_{n,k}(x) \le \sum_{k \in K_2(x)}' \left(\frac{nx-k}{n\delta} \right)^2 B_{n,k}(x) =$$

$$= \frac{1}{(n\delta)^2} \sum_{k \in K_2(x)}' (nx-k)^2 B_{n,k}(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n\delta)^2} \left\{ (nx)^2 - 2nx \sum_{0 \leq k \leq n}' k B_{n,k}(x) + \sum_{0 \leq k \leq n}' k^2 B_{n,k}(x) \right\} =$$

$$= \frac{1}{(n\delta)^2} \left[n(n-1)x^2 + nx - n^2x^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{(n\delta)^2} n(x-x^2) = \frac{x-x^2}{n\delta^2} \leq \frac{1}{n\delta^2}$$

$$|p_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \frac{2M}{n\delta^2} \quad \forall x \in [0,1].$$

$\blacksquare$

Compattezza

X sp. topologico di Hausdorff

Def Un insieme $\mathcal{F} \subset C(X)$ con la seguente proprietà: $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall x \in X$ $\exists V_x$ intorno di x t.c.

$$y \in V_x \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

si dice *equicontinuo*. ■

Proposizione: Siano X CH e $\mathcal{F} \subset C(X)$ insieme equicontinuo. Sono equivalenti

a) $\forall x \in X \ \exists M_x \geq 0 : \ |f(x)| \leq M_x \ \forall f \in \mathcal{F}$;

b) $\exists M \geq 0 : \ |f(x)| \leq M \ \forall x \in X$ e $\forall f \in \mathcal{F}$.

Oss.

(a) $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ puntualmente limitato in X

(b) $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ uniformemente limitato in X ■

Dim Ovvio! ■

Teorema (G. Ascoli - C. Arzelà)

Siano X CH e $\mathcal{F} \subset C(X)$. Sono equivalenti

a) $\mathcal{F}$ è chiuso, puntualmente limitato e equicontinuo;

b) $\mathcal{F}$ è compatto.

Dim (a) $\Rightarrow$ (b)

- $\mathcal{F}$ chiuso e limitato (Propos. precedente!)
- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \forall x \in X \; \exists V_x$ int. aperto di x: $[y \in V_x \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \; \forall f \in \mathcal{F}]$
- X compatto $\Rightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \in X$: $X = V_1 \cup \ldots \cup V_n$ $(V_m = V_{x_m})$
- partizione dell'unità: $\varphi_m \in C_c(X)$: $\varphi_m \prec V_m$ e $\varphi_1 + \cdots + \varphi_n = 1$ in X
- $M_\varepsilon = \operatorname{span}\{\varphi_m : m = 1, \ldots, n\}$
- $f \in \mathcal{F} \Rightarrow f_\varepsilon = \sum'_{1 \leq m \leq n} f(x_m)\varphi_m \in M_\varepsilon$
- $x \in X \Rightarrow I_x = \{m : x \in V_m\}$
- $|f(x) - f_\varepsilon(x)| \leq \sum'_{m \in I_x} |f(x) - f(x_m)| \varphi_m(x) \leq \varepsilon$.

(b) $\Rightarrow$ (a)

Ovvio! $\blacksquare$

SPAZI L_p

X insieme (non vuoto)

$\mathcal{S}$ σ-algebra di X e $\mu: \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva

$\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \{ f: X \to \mathbb{K} \text{ } \mathcal{S}\text{-misurabili} \}$

$$f \in \mathcal{L}(\mathcal{S}) \Rightarrow \|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} & 1 \le p < +\infty \\ \inf\{ t \ge 0 : \mu(\{|f| > t\}) = 0 \} & p = +\infty \end{cases}$$

<u>Proposizione</u>: Siano $1 \le p \le +\infty$ e $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$. Allora

a) $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-quasi ovunque in X;

b) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $(0 \cdot \infty = 0!)$;

c) $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

<u>Dim</u> . (a), (b), (c) ovvie per $1 \le p < +\infty$

. solo (c) per $p = +\infty$

. $s, t \ge 0 \Rightarrow \{ |f+g| > s+t \} \subset \{ |f| > s \} \cup \{ |g| > t \}$

. $\{ |f| > 0 \} = \bigcup_{n \ge 1} \{ |f| > 1/n \} \Rightarrow [\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0 \ \mu\text{-q.o}]$ ▨

<u>Oss</u> $\|f\|_\infty < +\infty \Rightarrow |f(x)| \le \|f\|_\infty$ per μ-q.o. $x \in X$. ▨

- $\mathcal{L}_p(\mu) = \{ f \in \mathcal{L}(\mathcal{S}) : \|f\|_p < +\infty \} \qquad 1 \le p \le +\infty$

- $\begin{cases} \mathcal{L}_p(\mu) & \text{sp. vettoriale su } \mathbb{K} \\ \|\cdot\|_p & \text{seminorma su } \mathcal{L}_p(\mu) \end{cases}$

- $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ $\quad f \sim g$ se $f = g$ μ-quasi ovunque in X

- $\begin{cases} L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/_\sim & \text{sp. vettoriale quoziente} \\ \| \ \|_p \text{ passa al quoziente} \Rightarrow L_p(\mu) & \text{sp. normato} \end{cases}$

$\boxed{\text{inserire } ✱}$

<u>Oss</u>: $f \in L_p(\mu)$ classe di equivalenza di funzioni

$f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ funzione definita puntualmente $\blacksquare$

<u>Teorema</u>: Siano $1 \le p, q \le +\infty$ t.c. $1/p + 1/q = 1$. Allora,

$f \in L_p(\mu), \ g \in L_q(\mu) \Rightarrow fg \in L_1(\mu)$ e $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$

<u>Dim</u> $1 < p, q < +\infty$: dis. di Hölder

$p = 1, q = +\infty$: ovvio! $\blacksquare$

<u>Teorema</u>: Sia $\mu(X) < +\infty$ e siano $1 \le p \le q \le +\infty$.

Allora

$$\|f\|_p \le [\mu(X)]^{1/p - 1/q} \|f\|_q , \quad f \in L_q(\mu)$$

Esempio: $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha} 1_{(0,1]}(x)$ $\quad x>0 \quad (\alpha>0)$

$g_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha} 1_{[1,+\infty)}(x)$

In $(0,+\infty)$ con la misura di Lebesgue si ha

$$p < 1/\alpha \leq q \quad \Rightarrow \quad f_\alpha \in L_p(0,+\infty) \text{ e } f_\alpha \notin L_q(0,+\infty)$$

$$p \leq 1/\alpha < q \quad \Rightarrow \quad g_\alpha \notin L_p(0,+\infty) \text{ e } g_\alpha \in L_q(0,+\infty)$$

(*) Esempi:

a) I insieme (non vuoto), $\#$ misura del conteggio

$L_p(\#) = \ell_p(I)$ $\qquad \int_I |x(i)|^p d\#(i) = \sum_{i\in I} |x(i)|^p$ $\qquad 1\leq p<$

$L_\infty(\#) = \ell_\infty(I) = B(I)$ $\qquad \|x\|_\infty = \|x\|_u$ $\qquad p=+$

b) $E \subset \mathbb{R}^N$ Lebesgue misurabile + mis. di Lebesgue

$L_p(E)$: (classi di equivalenza di) funzioni misurabili da E in $\mathbb{K}$ con

$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\right)^{1/p} < +\infty$ $\qquad 1\leq p<+\infty$

$\|f\|_\infty < +\infty$ $\qquad p=+\infty$

<u>Oss</u>. $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ mis. positiva

$f : X \to \mathbb{K}$ $\mathcal{S}$-misur. e $1 \leq p \leq q < +\infty$

$$\int_X |f|^r d\mu = \int_{\{|f|<1\}} |f|^r d\mu + \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^r d\mu \quad r \in \{p, q\}$$

$$\int_{\{|f|<1\}} |f|^q d\mu \leq \int_{\{|f|<1\}} |f|^p d\mu$$

$$\int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^q d\mu \geq \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^p d\mu \qquad \blacksquare$$

Completezza

Teorema: $(L_p(\mu), \|\cdot\|_p)$ sp. di Banach $(1 \le p \le +\infty)$

Dim $\{f_n\}_n$ successione di Cauchy in $L_p(\mu)$

$f_n : X \to \mathbb{K}$ $n \ge 1$ rappresentativo di $f_n \in L_p(\mu)$

① $1 \le p < +\infty$

- $\exists \{f_{n_k}\}_{k\ge1}$: $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \le 1/2^k$ $k \ge 1$

- $\begin{cases} g_k : X \to [0,+\infty) & g_k(x) = \sum'_{1\le h\le k} |f_{n_{h+1}}(x) - f_{n_h}(x)|, \ x \in X \quad (k\ge1) \\ g : X \to [0,+\infty] & g(x) = \sum'_{k\ge1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|, \ x \in X \end{cases}$

- $g_k (k\ge1)$, g $\mathcal{S}$-misur. e $g_k \to g$ puntualm. in X

- $\int_X g^p \, d\mu = \int_X \lim_{k\to+\infty} g_k^p \, d\mu \le \liminf_{k\to+\infty} \int_X g_k^p \, d\mu \le 1$

- $\exists T \subset X$ μ-trascurabile : $\sum'_{k\ge1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < +\infty$ $\forall x \in X \setminus T$

- $f : X \to \mathbb{K}$ $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in T \\ f_1(x) + \sum'_{k\ge1} [f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)] & x \in X \setminus T \end{cases}$

- f $\mathcal{S}$-misurabile e $f_{n_k} \to f$ μ-quasi ovunque in X

- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \ge 1$: $[n, m \ge n_0 \Rightarrow \|f_m - f_n\|_p \le \varepsilon]$

- $\exists k_0 = k_0(\varepsilon) \ge 1$: $[k \ge k_0 \Rightarrow n_k \ge n_0]$

- $k \geq k_0 \Rightarrow \int_X |f_n - f_{n_k}|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p \quad \forall n \geq n_0$
- Fatou per $k \to +\infty \Rightarrow \int_X |f_n - f|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p \quad \forall n \geq n_0$
- $f_n - f \in L_p(\mu) \Rightarrow f \in L_p(\mu)$ e $\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.

(2) $p = +\infty$

- $\exists\, T_n \ (n \geq 1)$ μ-trascurabile: $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \quad \forall x \in X \setminus T_n$

  $\exists\, T_{m,n} \ (m,n \geq 1)$ μ-trascurabile: $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \ \forall x \in X \setminus T_{m,n}$

- $T = \left(\bigcup_{m,n} T_{m,n} \right) \cup \left(\bigcup_n T_n \right)$ μ-trascurabile
- $\{f_n\}_n$ uniformemente di Cauchy, uniformemente limitata in $X \setminus T$
- $f : X \to \mathbb{K} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in T \\ \lim_{n \to +\infty} f_n(x) & x \in X \setminus T \end{cases}$
- f $\mathcal{S}$-misurabile e limitata μ-quasi ovunque in
- $f \in L_\infty(\mu)$ e $f_n \to f$ in $L_\infty(\mu)$ per $n \to +\infty$ ▨

<u>Oss.</u> La convergenza in $L_\infty(\mu)$ e' la convergenza uniforme al di fuori di un insieme μ-trascurabile. ▨

<u>Corollario</u>: Siano $1 \leq p \leq +\infty$ e $f_n \in L_p(\mu)$ $(n \geq 1)$ e $f \in L_p(\mu)$ t.c. $f_n \to f$ in $L_p(\mu)$ per $n \to +\infty$. Allora $\exists$ $\{f_{n_k}\}_{k \geq 1}$ sottosuccessione t.c.

$$f_{n_k} \to f \quad \mu\text{-quasi ovunque in } X.$$

<u>Oss</u>. $p = +\infty \Rightarrow f_{n_k} = f_k \quad \forall k \geq 1$. ■

- $1 \leq p < +\infty \Rightarrow$ in genere $f_n \to f$ in L_p $\not\Rightarrow$ $f_n \to f$ μ-q.o.

esempio degli intervalli mobili ■

Densità e separabilità

1) densità delle funzioni semplici

X insieme (non vuoto)

$\mathcal{S}$ σ-algebra di X e $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva

Teorema: Lo sp. vettoriale

$$\Sigma_+^1(\mu) = \{ s \in L(\mu) : s \text{ semplice e } \mu(\{s \neq 0\}) < +\infty \}$$

è denso in $L_p(\mu)$ per $1 \le p < +\infty$.

Oss. Vale anche per $p = +\infty$ togliendo la condizione $\mu(\{s \neq 0\}) < +\infty$. ▨

Dim.: $\exists$ s_n $(n \ge 1)$ semplici e $\mathcal{S}$-mis. t.c.

- $|s_n| \le |f|$ μ-q.o. $\forall n$
- $s_n \to f$ μ-q.o. per $n \to +\infty$.

- $s_n \in \Sigma_+^1(\mu)$ e $\Sigma_+^1(\mu) \subset L_p(\mu)$
- $|s_n - f| \le 2^p |f|$ μ-q.o. in X + CD ▨

2) densità delle funzioni continue

X LCH

$\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva di Radon in X

Oss. . $\varphi \in C_c(X) \Rightarrow \varphi$ Borel-mis. e $\int_X |\varphi|^p d\mu < +\infty$

. $supp(\mu) = X \Rightarrow C_c(X)$ isomorfo a sottosp. di $L_p(\mu)$

■

Teorema: Siano X LCH e $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva di Radon in X t.c.

$$supp(\mu) = X.$$

Allora, $C_c(X)$ è denso in $L_p(\mu)$ per $1 \leq p < +\infty$.

Dim. Basta approssimare se $\mathcal{L}^1_+(\mu)$ con Lusin ■

Corollario: Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto. Allora, $C_c(U)$ è denso in $L_p(U)$ per $1 \leq p < +\infty$.

Oss. Vale anche con $C_c^\infty(U)$! ■

3) separabilità

<u>Teorema</u>: Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ (Lebesgue) misurabile. Allora, $L_p(E)$ e' separabile per $1 \le p < +\infty$.

<u>Dim</u>: Basta considerare $L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p < +\infty)$ poiché $L_p(E)$ e' isometricamente isomorfo a

$$\{ f \in L_p(\mathbb{R}^N) : f = 0 \ \mu\text{-quasi ovunque in } E^c \}.$$

Proviamo che, a seconda che sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$D = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} \{ 1_Q : Q \text{ cubo diadico semiaperto} \}$$

$$D = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}} \{ \text{———————} \}$$

sono densi in $L_p(\mathbb{R}^N)$.

- $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ e $\varepsilon > 0$ fix
- $\exists \ s \in L_p(\mathbb{R}^N)$ semplice con $|\{s \neq 0\}| < +\infty$ e $\|s-f\|_p \le \varepsilon/4$
- $s = \sum'_{1 \le h \le k} s_h 1_{E_h}$ rappresentativo
- $s' = \sum'_{1 \le h \le k} r_h 1_{E_h}$ con $r_h \in \mathbb{Q}$ o $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$: $\|s'-s\|_p \le \varepsilon/4$
- $|E_h| < +\infty \Rightarrow s'' = \sum'_{1 \le h \le k} r_h 1_{V_h}$ con V_h aperto e $E_h \subset V_h$ t.c. $\|s''-s'\|_p \le \varepsilon$

- $\forall\, V$ aperto e $\forall\, \eta > 0$ $\exists\, Q_1, \dots, Q_J$ cubi diadici semiaperti disgiunti t.c. $Q_1 \cup \dots \cup Q_J \subset V$ e $|V \setminus (Q_1 \cup \dots \cup Q_J)| \le \eta$
- $\exists\, d \in D$: $\| d - s'' \|_p \le \varepsilon/4$ $\blacksquare$

Duale di L_p

$(X, \mathcal{S}, \mu)$ sp. con misura positiva

$p, q \in [1, +\infty]$: $1/p + 1/q = 1$ esponenti coniugati

$g \in L_q(\mu)$ + Hölder $\Rightarrow$ $L_g f = \int_X fg\, d\mu$ $f \in L_p(\mu)$ ben definit
$L_g \in (L_p(\mu))^*$ con $\|L_g\| \leq \|g\|_q$

Proposizione: Si ha

- $1 < p \leq +\infty$ e $1 \leq q < +\infty$ $\Rightarrow$ $\|L_g\| = \|g\|_q$
- $p = 1$, $q = +\infty$ e μ semifinita $\Rightarrow$ $\|L_g\| = \|g\|_\infty$

Oss Per $p = 1$ e $q = +\infty$ si può avere $L_g = 0$ e $\|g\|_\infty > 0$ se μ non è semifinita. ▨

Dim $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e $g \neq 0$ (altrimenti è ovvio)

(1) $q = 1$ e $p = +\infty$

- $f = \text{sgn}(g)$ $\Rightarrow$ $f \in L_\infty(\mu)$ e $\|f\|_\infty = 1$
- $\|L_g\| \geq |L_g f| = \int_X |g|\, d\mu = \|g\|_1$

(2) $1 < p, q < +\infty$

- $f = |g|^{q-1} \text{sgn}(g)$ $\Rightarrow$ f $\mathcal{S}$-misur. e $|f|^p = |g|^{p(q-1)} = |g|^q$

- $\|f\|_p = \|g\|_q^{q/p} > 0$
- $\|f\|_p \|L_g\| \geq |L_g f| = \int_X |g|^q d\mu = \|g\|_q^q \Rightarrow \|L_g\| \geq \|g\|_q^{q-q/p} = \|g\|$

(3) $q = +\infty$ e $p = 1$

- P.A. $\mu(\{|g| > \|L_g\|\}) > 0$
- μ semifinita $\Rightarrow \exists\, E \in \mathcal{S}: E \subset \{|g| > \|L_g\|\}$ e $0 < \mu(E) < +\infty$
- $f = \frac{\operatorname{sgn}(g)}{\mu(E)} 1_E \Rightarrow f \in L_1(\mu)$ e $\|f\|_1 = 1$ ($g \neq 0$ μ-q.o. su E!)
- $\|L_g\| \geq |L_g f| = \frac{1}{\mu(E)} \int_E |g| d\mu > \|L_g\|$ assurdo! ■

Teorema (F. Riesz)

Siano $\mu: \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ misura positiva σ-finita e $p \in [1, +\infty)$, $q \in (1, +\infty]$ esponenti coniugati e sia $L \in (L_p(\mu))^*$. Allora,

a) $\exists!\, g \in L_q(\mu): \quad Lf = \int_X fg\, d\mu \quad \forall f \in L_p(\mu)$;

b) $\|L\| = \|g\|_q$.

Oss.

- $1 < p, q < +\infty$ non serve μ σ-finita!
- per la misura del conteggio su I non numerabile vale lo stesso!

- falso (in generale) per $p=+\infty$: $\exists\, L \in (L_\infty(\mu))^*$ che non sono della forma

$$Lf = \int_X fg\,d\mu, \quad f \in L_\infty(\mu)$$

per qualche $g \in L_1(\mu)$. ■

<u>Corollario</u>: Siano $\mu: \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva σ-finita e $p \in [1,+\infty)$, $q \in (1,+\infty]$ esponenti coniugati. Allora,

a) la funzione

$$g \in L_q(\mu) \longmapsto L_g \in [L_p(\mu)]^*$$

è un isomorfismo isometrico di $L_q(\mu)$ su $[L_p(\mu)]^*$;

b) $L_p(\mu)$ è riflessivo per $1 < p < +\infty$.

<u>Dim</u>. (b) vedere più avanti! ■

Dim. Osserviamo che

- (b) e' la proposizione precedente
- l' unicita' in (a) segue da (b)

$g_i \in L_q(\mu)$ $i=1,2$: $Lf = \int_X f g_i \, d\mu$ $\forall f \in L_p(\mu)$ $i=1,2$

$\int_X f(g_2-g_1)\,d\mu = 0$ $\forall f \in L_p(\mu)$ $\Rightarrow$ $g_2-g_1=0$ in $L_q(\mu)$.

① $\mu(X) < +\infty$

- $\lambda(E) = L(1_E)$ $E \in \mathcal{S}$ misura reale/complessa
  - $\lambda(\phi) = L(1_\phi) = L0 = 0$
  - $E, F \in \mathcal{S}$ $E \cap F = \phi$ $\Rightarrow$ $\lambda(E\cup F) = L(1_{E\cup F}) = L1_E + L1_F =$
  $= \lambda(E) + \lambda(F)$
  - $E_n \in \mathcal{S}$ $n \geq 1$: $E_m \cap E_n = \phi$ $m \neq n$ e $E = \bigcup_n E_n$

$$\left|\lambda(E) - \sum_{1\leq m\leq n} \lambda(E_m)\right| = \left|\lambda\left(\bigcup_{m\geq n+1} E_m\right)\right| =$$

$$= \left|L\left(1_{\bigcup_{m\geq n+1} E_m}\right)\right| \leq \|L\| \left(\mu\left(\bigcup_{m\geq n+1} E_m\right)\right)^{1/p} \to$$

- $E \in \mathcal{N}(\mu) \Rightarrow 1_E = 0$ in $L_p(\mu) \Rightarrow \lambda(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{N}(\lambda$
- RN $\Rightarrow$ $\exists g : X \to \mathbb{K}$ μ-integrabile: $\lambda(E) = \int_E g\,d\mu$ $E \in \mathcal{S}$
- $s = s_1 1_{E_1} + \cdots + s_k 1_{E_k}$ semplice e $\mathcal{S}$-misurabile

$s \in L_\infty(\mu) \subset L_p(\mu)$ e $L(s) = \cdots = \int_X s g \, d\mu$

- $f \in L_\infty(\mu) \Rightarrow \exists s_k \in L_\infty(\mu)$ $k \geq 1$ semplici : $|s_k| \leq |f|$ μ-q.o. in X
$s_k \to f$ in $L_\infty(\mu)$

- $s_k \to f$ in $L_\infty(\mu) \Rightarrow s_k \to f$ in $L_p(\mu)$
- $Lf = \lim_{k\to+\infty} L s_k = \lim_{k\to+\infty} \int_X s_k g \, d\mu = \int_X fg \, d\mu$.

Quindi si ha $L = L_g$ su $L_\infty(\mu)$ e, essendo $L_\infty(\mu)$ denso in $L_p(\mu)$, basta provare che risulta $g \in L_q(\mu)$.

- $p = 1$ e $q = +\infty$

  come in Propos. ____

- $1 < p, q < +\infty$

  $E_n = \{|g| \leq n\} \in \mathcal{S}$ $n \geq 1$ e $f_n = |g|^{q-1} \operatorname{sgn}(g) 1_{E_n}$ $n \geq 1$

  $f_n \in L_\infty(\mu)$ e $|f_n|^p = |g|^q 1_{E_n}$ $\forall n$

  $$0 \leq \int_{E_n} |g|^q d\mu = \int_X f_n g \, d\mu = L f_n \leq \|L\| \, \|f_n\|_p = \|L\| \left(\int_{E_n} |g|^q \right)^{1/p}$$

  $\int_{E_n} |g|^q d\mu \leq \|L\|^q$ $\forall n$ $\Rightarrow g \in L_q(\mu)$

(2) μ σ-finita e $\mu(X) = +\infty$

- μ σ-finita $\Rightarrow \exists\, w: X \to [0, +\infty)$ $\mathcal{S}$-mis.
  - $0 < w(x) < 1$ $\forall x$
  - $\int_X w \, d\mu < +\infty$

  (esercizio!)

- $\mu'(E) = \int_E w \, d\mu$ $E \in \mathcal{S}$ integrale indefinito di w

- $w(x) > 0 \ \forall x \in X \Rightarrow \mathcal{N}(\mu) = \mathcal{N}(\mu') \Rightarrow L(\mu) = L(\mu')$
- $f \in L_p(\mu') \longmapsto w^{1/p} f \in L_p(\mu)$ isomorfismo isometrico di $L_p(\mu')$ su $L_p(\mu)$

$$\int_X |f|^p d\mu' = \int_X |f|^p w \, d\mu = \int_X |f w^{1/p}|^p d\mu$$

- $L'f = L(w^{-1/p} f) \quad f \in L_p(\mu') \Rightarrow L' \in [L_p(\mu')]^*$ e $\|L'\| = \|L\|$
- $① \Rightarrow \exists \, g' \in L_q(\mu')$:
  - $L'f = \int_X f g' d\mu' \quad f \in L_p(\mu')$
  - $\|L'\| = \|g\|_{L_q(\mu')}$
- $g = \begin{cases} g' & p = 1 \text{ e } q = +\infty \\ w^{1/q} g' & 1 < p, q < +\infty \end{cases}$ $\mathcal{S}$-misurabile
- $\begin{cases} \mathcal{N}(\mu) = \mathcal{N}(\mu') \Rightarrow \|g\|_{L_\infty(\mu)} = \|g'\|_{L_\infty(\mu')} \Rightarrow g \in L_\infty(\mu) \\ \int_X |g|^q d\mu = \int_X |g'|^q w \, d\mu = \int_X |g'|^q d\mu' \Rightarrow g \in L_q(\mu) \text{ e } \|g\|_{L_q(\mu)} = \|g'\|_{L_q(\mu')} \end{cases}$

$p = 1$ e $q = +\infty$

$$\int_X f g \, d\mu = \int_X (f/w) g' w \, d\mu = \int_X (f/w) g' d\mu' = L'(f/w) = Lf \quad f \in L_1(\mu)$$

$1 < p, q < +\infty$

$$\int_X f g \, d\mu = \int_X (f/w^{1/p}) g' w \, d\mu = \int_X (f/w^{1/p}) g' d\mu' =$$

$$= L'(f/w^{1/p}) = Lf \qquad f \in L_p(\mu)$$

$\blacksquare$

Corollario: Siano $\mu: \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva σ-finita e $1 < p < +\infty$. Allora, $L_p(\mu)$ e' riflessivo.

Dim. $1 < q < +\infty$: $1/p + 1/q = 1$

- $\begin{cases} \Phi: L_q(\mu) \to [L_p(\mu)]^* & \langle \Phi(g), f \rangle = \int_X fg\,d\mu \quad \forall f \in L_p(\mu) \ (g \in L_q(\mu)) \\ \Psi: L_p(\mu) \to [L_q(\mu)]^* & \langle \Psi(f), g \rangle = \int_X gf\,d\mu \quad \forall g \in L_q(\mu) \ (f \in L_p(\mu)) \end{cases}$
- Φ, Ψ isomorfismi isometrici
- $L^{**} \in [L_p(\mu)]^{**}$ e $\ell^*: g \in L_q(\mu) \longmapsto \langle L^{**}, \Phi(g) \rangle$
- $\ell^* \in [L_q(\mu)]^* \Rightarrow \exists!\, f \in L_p(\mu) : \Psi(f) = \ell^*$
- $\langle L^{**}, \Phi(g) \rangle = \langle \ell^*, g \rangle = \langle \Psi(f), g \rangle = \int_X gf\,d\mu =$

$$= \int_X fg\,d\mu = \langle \Phi(g), f \rangle$$

per ogni $g \in L_q(\mu)$.

- ogni $L^* \in [L_p(\mu)]^*$ e dalla forma $L^* = \Phi(g)$ con $g \in L_q(\mu)$

$$\Downarrow$$

$$\langle L^{**}, L^* \rangle = \langle L^*, f \rangle \quad \forall L^* \in [L_p(\mu)]^*$$

Quindi $L^{**} = Jf$ con $f \in L_p(\mu)$

$$\langle L^{**}, L^* \rangle = \langle L^*, f \rangle = \langle Jf, L^* \rangle \quad \forall L^* \in [L_p(\mu)]^* \quad \blacksquare$$

Integrazione rispetto a misure reali/complesse

- $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ misura reale/complessa in X

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow \mu = \mu^+ - \mu^-$ $\qquad$ $\mu^\pm$ misure positive fin

$\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow \mu = \mu_1 + i\mu_2 = (\mu_1^+ - \mu_1^-) + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$ $\qquad$ $\mu_j^\pm \ (j=1,2)$ ———

- $f : X \to \mathbb{K}$ $\mathcal{S}$-misurabile

$$f \ \mu\text{-integrabile se } \begin{cases} f \ \mu^\pm\text{-integrabile} \\ f \ \mu_j^\pm\text{-integrabile} \ (j=1,2) \end{cases}$$

$$f \ \mu\text{-integrabile} \Leftrightarrow f \ |\mu|_{tv}\text{-integrabile}$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow \int_E f\,d\mu = \int_E f\,d\mu^+ - \int_E f\,d\mu^-$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow \int_E f\,d\mu = \left(\int_E f\,d\mu_1^+ - \int_E f\,d\mu_1^-\right) + i\left(\int_E f\,d\mu_2^+ - \int_E f\,d\mu_2^-\right) \qquad E \in \mathcal{S}$$

Proposizione: Sia $f : X \to \mathbb{K}$ $\mathcal{S}$-misurabile. Allora,

$$f \ \mu\text{-integrabile} \Rightarrow \left|\int_E f\,d\mu\right| \le \int_E |f|\,d|\mu|_{tv} \qquad E \in \mathcal{S}$$

- X LCH e $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ di Borel reale/complessa

$$\mu \text{ misura di Radon in } X \text{ se } \begin{cases} \mu^\pm \text{ misura di Radon positive in} \\ \mu_j^\pm \ (j=1,2) \text{ ———} \end{cases}$$

μ misura di Radon in $X \Leftrightarrow |\mu|_{tv}$ misura di Radon in X

Duale di $C_0(X)$

- X LCH e $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ misura di Borel reale/complessa
- $f \in C_0(X) \Rightarrow f$ μ-integrabile e $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \|\mu\|_{tv} \|f\|_u$
- $L_\mu : C_0(X) \to \mathbb{K}$ $\quad L_\mu f = \int_X f d\mu, \; f \in C_0(X)$ $\quad (*)$

L_μ funzionale lineare: $L_\mu \in [C_0(X)]^*$ e $\|L_\mu\| \leq \|\mu\|_{tv}$

Teorema: Siano $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ misura di Radon reale/complessa in X e $L_\mu \in [C_0(X)]^*$ definito da $(*)$. Allora,

$$\|L_\mu\| = \|\mu\|_{tv}.$$

Dim. appunti! ∎

Teorema (F. Riesz): Sia $L \in [C_0(X)]^*$. Allora,

a) $\exists ! \, \mu \in \mathcal{M}(X)$ misura di Radon reale/complessa t.c.

$$Lf = \int_X f d\mu, \quad f \in C_0(X);$$

b) $\|L\| = \|\mu\|_{tv}$.

Oss. $\mathcal{M}(X) = \{\mu : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{K}$ misura di Radon in $X\}$ ∎

Corollario: La funzione

$$\mu \in \mathcal{M}(X) \longmapsto L_\mu \in [C_0(X)]^*$$

e' un isomorfismo isometrico di $\mathcal{M}(X)$ su $[C_0(X)]^*$.

CONVOLUZIONI E APPROSSIMAZIONI

Convoluzioni

Tutti i riferimenti sono alla misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$

$f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ $\quad \tau_y f(x) = f(x+y) \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (y \in \mathbb{R}^N)$

Oss.: $f, g: \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ e $y \in \mathbb{R}^N$

- f misurabile $\Rightarrow$ $\tau_y f$ misurabile
- $f = g$ q.o. in $\mathbb{R}^N$ $\Rightarrow$ $\tau_y f = \tau_y g$ q.o. in $\mathbb{R}^N$
- $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p \le +\infty)$ $\Rightarrow$ $\tau_y f$ ben definita q.o. in $\mathbb{R}^N$ ▨

Proposizione. Sia $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p < +\infty)$.

a) $\tau_y f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ e $\|\tau_y f\|_p = \|f\|_p$ $\forall y \in \mathbb{R}^N$;

b) $y \in \mathbb{R}^N \mapsto \tau_y f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ uniformemente continua

Oss (a) vale anche per $p = +\infty$! ▨

Dim (a) Ovvio!

b) . $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \varphi_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^N) : \|\varphi_\varepsilon - f\|_p \le \varepsilon/3$

- $K \subset \mathbb{R}^N$ compatto: $\operatorname{supp}(\varphi) + B_1[0] \subset K$
- φ_ε uniform. continua in $\mathbb{R}^N$:

$$\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) \in (0,1) : \left[\|y\| \le \delta \Rightarrow |\varphi_\varepsilon(x+y) - \varphi_\varepsilon(x)| \le \frac{\varepsilon}{3|K|^{1/p}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \right]$$

- per $y_i \in \mathbb{R}^N$ $(i=1,2)$ con $\|y_2 - y_1\| \le \delta$ si ha

$$\|\tau_{y_2} f - \tau_{y_1} f\|_p \le \|\tau_{y_2} f - \tau_{y_2}\varphi_\varepsilon\|_p + \|\tau_{y_2}\varphi_\varepsilon - \tau_{y_1}\varphi_\varepsilon\|_p + \|\tau_{y_1}\varphi_\varepsilon - \tau_{y_1} f\|_p =$$

$$= 2\|\varphi_\varepsilon - f\|_p + \|\tau_{y_2} f - \tau_{y_1} f\|_p$$

- $$\|\tau_{y_2}\varphi_\varepsilon - \tau_{y_1}\varphi_\varepsilon\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_\varepsilon(x+y_2) - \varphi_\varepsilon(x+y_1)|^p dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_\varepsilon(x + (y_2 - y_1)) - \varphi(x)|^p dx \le (*)$$

- $x \notin [\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) \cup (\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) - (y_2 - y_1))] \Rightarrow |\varphi_\varepsilon(x + (y_2 - y_1)) - \varphi_\varepsilon(x)| = 0$

- $\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) \cup (\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) - (y_2 - y_1)) \subset \mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) + B_1[0] \subset K$

$$(*) \le \frac{\varepsilon^p}{3^p |K|} \,|\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) + B_1[0]| \le \left(\varepsilon/3\right)^p \quad ▨$$

Lemma: Siano $f, g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{K}$ e

$$F(x,y) = f(x+y) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$
$$G(x,y) = g(x+y)$$

Allora,

a) $f = g$ q.o. in $\mathbb{R}^N \Rightarrow F = G$ q.o. in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$;

b) f misurabile in $\mathbb{R}^N \Rightarrow F$ misurabile in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

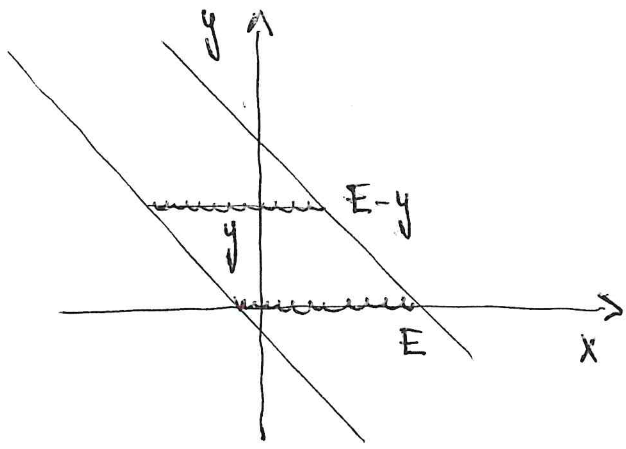
Dim Proviamo (b), (a) e' analoga

- $s(x,y) = x+y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$
- $V \subset \mathbb{K}$ aperto $\Rightarrow F^{-1}(V) = s^{-1}(f^{-1}(V))$ con $f^{-1}(V)$ misurabile in $\mathbb{R}^N$
- $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile $\Rightarrow s^{-1}(E)$ misurabile in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

$$s^{-1}(E) = \bigcup_{z \in E} \{(x,y) : x+y = z\} =$$

$$= \bigcup_{y \in \mathbb{R}^N} \{(z-y, y) : z \in E\} =$$

$$= \bigcup_{y \in \mathbb{R}^N} \{(x-y, y) : x \in E\} =$$



$$L = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_N & -\mathbb{1}_N \\ \hline 0 & \mathbb{1}_N \end{array}\right) \in \mathbb{M}^{2N \times 2N}$$

$$= \bigcup_{y \in \mathbb{R}^N} L(E \times \{y\}) = L(E \times \mathbb{R}^N)$$

∎

Teorema (W. H. Young): Siano $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p \le +\infty)$. Allora,

a) $\exists\, T \subset \mathbb{R}^N$ trascurabile t.c.

$$y \in \mathbb{R}^N \longmapsto f(x-y)\,g(y)$$

e' integrabile per ogni $x \in \mathbb{R}^N \setminus T$;

b) la funzione

$$f*g(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\,g(y)\,dy & x \in \mathbb{R}^N \setminus T \\ 0 & x \in T \end{cases}$$

e' in $L_p(\mathbb{R}^N)$ e si ha $\|f*g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$.

Oss.

- $f*g$ dipende solo dalla classe d'equivalenza di f e g
- $f*g$ si chiama convoluzione di f e g e con abuso di notazione si scrive

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\,g(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

$\blacksquare$

Dim. Sia $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (il caso $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, segue da esso)

- $\begin{cases} y\in\mathbb{R}^N \longmapsto f(x-y)g(y) & \text{misurabile in } \mathbb{R}^N \\ (x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \longmapsto f(x-y)g(y) & \text{misurabile in } \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \end{cases}$

- FT-1 $\Rightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R}^N \longmapsto \int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)g(y)|\,dy \\ x\in\mathbb{R}^N \longmapsto \int_{\mathbb{R}^N}[f(x-y)g(y)]^{\pm}\,dy \end{cases}$ misurabili in $\mathbb{R}^N$

$\Downarrow$

(**)

① Caso $p=1$

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}|f(x-y)g(y)|\,d(x,y) \overset{\text{FT-1}}{=} \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)|\,dx\right)|g(y)|\,dy = \|f\|_1\|g\|_1 < +\infty$

- FT-2 implica che

  $\exists\, T\subset\mathbb{R}^N$ trascurabile : $y\in\mathbb{R}^N \longmapsto f(x-y)g(y)$ integr. in $\mathbb{R}^N$ $\forall x\in\mathbb{R}^N\setminus T$

  $f*g$ integrabile in $\mathbb{R}^N$

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|f*g(x)|\,dx \le \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)g(y)|\,dy\right)dx \overset{\text{FT-1}}{=} \cdots = \|f\|_1\|g\|_1 .$

② Caso $1<p<+\infty$

- $q\in(1,+\infty)$: $1/p+1/q=1$

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)g(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)|^{1/q}\,|f(x-y)|^{1/p}|g(y)|\,dy \le$

$$\le \|f\|_1^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \quad \forall x\in\mathbb{R}^N$$

- $\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)g(y)|\,dy\right)^p dx \leq \ldots \leq \|f\|_1^{1+p/q}\,\|g\|_p^p$
- $\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)g(y)|\,dy < +\infty$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$
- $\exists\, T \subset \mathbb{R}^N$ trascurabile: $y \in \mathbb{R}^N \longmapsto f(x-y)g(y)$ integr. in $\mathbb{R}^N$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$
- $(**) \Rightarrow f*g$ misurabile
- $\int_{\mathbb{R}^N}|f*g(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)g(y)|\,dy\right)^p dx \leq \|f\|_1^{1+p/q}\|g\|_p^p$
- $f*g \in L_p(\mu)$ e $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\,\|g\|_p$.

③ Caso $p=+\infty$.

- $y \in \mathbb{R}^N \longmapsto f(x-y)g(y)$ integrabile in $\mathbb{R}^N$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$
- $(**) \Rightarrow f*g$ misurabile
- $|f*g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)g(y)|\,dy \leq \|f\|_1\,\|g\|_\infty$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$. ▨

<u>Teorema</u>: Siano $f, g \in L_1(\mathbb{R}^N)$ e $h \in L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$. Allora,

a) $g*h = h*g$;

b) $(f*g)*h = f*(g*h)$;

c) $(\lambda f + \mu g)*h = \lambda f*h + \mu g*h$.

Mollificatori

$K \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$:
- $K(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^N$ e $\mathrm{supp}(K) \subset B_1(0)$
- $\int_{\mathbb{R}^N} K(x)\,dx = 1$

$K_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} K(x/\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}^N$ $\Rightarrow$
- $K_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$
- $K_\varepsilon(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^N$ e $\mathrm{supp}(K_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0)$
- $\int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x)\,dx = 1$

Oss.

- $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ $\Rightarrow$ $y \in \mathbb{R}^N \longmapsto K_\varepsilon(x-y) f(y)$ integr. in $\mathbb{R}^N$ $\forall x$
- $f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x-y) f(y)\,dy$ ben definita $\forall x \in \mathbb{R}^N$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} K(y) f(x - \varepsilon y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^N \quad (\varepsilon > 0) \ \blacksquare$$

Teorema: Sia $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p < +\infty)$. Allora,

a) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ $\forall \varepsilon > 0$;

b) $f_\varepsilon \longrightarrow f$ in $L_p(\mathbb{R}^N)$ per $\varepsilon \to 0^+$.

Dim.

- $f_\varepsilon(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K(y) [f(x-\varepsilon y) - f(x)]\,dy$, $x \in \mathbb{R}^N$ $(\varepsilon > 0)$
- $|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(y) |f(x-\varepsilon y) - f(x)|^p\,dy \right)^{1/p}$, $x \in \mathbb{R}^N$ $(\varepsilon > 0)$

- $\int_{\mathbb{R}^N} |f_\varepsilon(x)-f(x)|^p dx \le$

$$\le \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(y)|f(x-\varepsilon y)-f(x)|^p dy \right) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} K(y) \| \tau_{-\varepsilon y} f - f \|_p^p \, dy =$$

$$= \int_{B_1(0)} K(y) \| \tau_{-\varepsilon y} f - f \|_p^p \, dy$$

- CD $\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B_1(0)} K(y) \| \tau_{-\varepsilon y} f - f \|_p^p \, dy = 0 \qquad (*)$

- $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \| f_\varepsilon - f \|_p = 0$. ▨

Oss. Il limite in $(*)$ va fatto con le successioni ▨

Corollario: Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto. Allora, $C_c^\infty(U)$ e' denso in $L_p(U)$ $(1 \le p < +\infty)$.

Dim.

- $f \in L_p(U)$, $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \, K \subset U$ compatto: $\| f - f 1_K \|_p \le \varepsilon/2$
- estendiamo $f 1_K$ a tutto $\mathbb{R}^N$ ponendola uguale a zero in $\mathbb{R}^N \setminus U$
- $f_\eta = K_\eta * (f 1_K) \quad \eta > 0 \Rightarrow f_\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

- $\exists\, \eta = \eta(\varepsilon) > 0$: $\mathrm{supp}(f_\eta) \subset K + B_\eta[0] \subset U$ e $\| f_\eta - f 1_K \|_p \leq \varepsilon/2$
- $f_\eta \in C_c^\infty(U)$ e $\| f_\eta - f \|_p \leq \| f_\eta - f 1_K \|_p + \| f 1_K - f \|_p \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ $\blacksquare$