SPAZI DI HILBERT

SPAZI DI HILBERT

- X sp. vettoriale su $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
- prodotto scalare : $\langle \cdot | \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$

(PS1) $\langle x | \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle = \lambda \langle x | y_1 \rangle + \mu \langle x | y_2 \rangle$, $x, y_i \in X$ $i = 1,2$ $\mu, \lambda \in \mathbb{K}$;

(PS2) $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle^*$; $x, y \in X$;

(PS3) $\langle x | x \rangle \geq 0$, $x \in X$;

(PS4) $\langle x | x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Oss. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\langle \cdot | \cdot \rangle$ bilineare e simmetrico;
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sesquilineare e hermitiano. $\blacksquare$

Proposizione: Sia $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un prodotto scalare in X. Allora,

a) $|\langle x | y \rangle| \leq \sqrt{\langle x | x \rangle \langle y | y \rangle}$ $\forall x, y \in X$;

b) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in X$ e' una norma in X;

c) $\|x + y\|^2 = \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ $\forall x, y \in X$

Oss. . (a)+(b) diviene $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ $\forall x, y \in X$
disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

. (c) identita' del parallelogramma $\blacksquare$

Def. Uno spazio vettoriale X con prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle$ che e' completo nella norma indotta dal prodotto scalare si dice <u>spazio di Hilbert</u>. $\blacksquare$

<u>Esempi</u>: a) spazi euclidei

$\mathbb{R}^N$ $\qquad \langle x|y\rangle = \sum_{1\le k\le N} x_k y_k \qquad x=(x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^N$, $y=(y_1,\dots,y_N)\in\mathbb{R}^N$

$\mathbb{C}^N$ $\qquad \langle z|w\rangle = \sum_{1\le k\le N} z_k^* w_k \qquad z=(z_1,\dots,z_N)\in\mathbb{C}^N$, $w=(w_1,\dots,w_N)\in\mathbb{C}^N$

b) $L_2(\mu)$ con $\langle f, g\rangle = \int_X f^* g \, d\mu \quad f,g\in L(\mu)$

($\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva in X)

caso particolare: l_2 e $l_2(\mathcal{I})$. $\blacksquare$

<u>Teorema</u>: Sia $(X, \|\cdot\|)$ sp. normato su $\mathbb{K}$. Allora sono equivalenti

a) $\exists \langle\cdot|\cdot\rangle$ prodotto scalare che induce $\|\cdot\|$;

b) vale l'identita' del parallelogramma

$\boxed{* \ \|u\pm v\|_u = \|u\|_u = \|v\|_u = 1}$

<u>Oss</u> A meno di casi banali <u>non</u> sono sp. di Hilbert

- $B(\Omega)$ $\quad \left(x,y\in\Omega : x\neq y \Rightarrow u(z) = \begin{cases} 1 & z=x \\ 0 & z\neq x \end{cases} \quad v(z) = \begin{cases} 1 & z=y \\ 0 & z\neq y \end{cases} \right)$;
- $C(K)$ con K compatto e $C_0(X)$ con X LCH;
- $L_p(\mu)$ con $p\neq 2$. $\blacksquare$

Oss. X sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ con prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle$

a) $L_y : X \to \mathbb{K}$ $\quad L_y x = \langle y | x \rangle$ $\quad x \in X$ $\quad (y \in X)$

$\bullet \begin{cases} L_y \text{ funzionale lineare} \\ |L_y x| \leq \|y\| \, \|x\| \quad \forall x \in X \end{cases} \Rightarrow L_y \in X^* \text{ e } \|L_y\| \leq \|y\|$

$\bullet \begin{cases} y = 0 & \Rightarrow L_0 = 0 \\ y \neq 0 & \Rightarrow |L_y(y/\|y\|)| = \|y\| \Rightarrow \|L_y\| \geq \|y\| \end{cases}$

Quindi $L_y \in X^*$ con $\|L_y\| = \|y\|$ $\forall y \in X$.

b) la funzione

$$(x,y) \in X \times X \longmapsto \langle x | y \rangle \in \mathbb{K}$$

e' continua. $\blacksquare$

Ortogonalità

- X sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ con prodotto scalare $\langle \cdot | \cdot \rangle$
- $\begin{cases} x \perp y \iff \langle x|y \rangle = 0 & \text{vettori ortogonali} \\ A^\perp = \{x : \langle a|x \rangle = 0 \ \forall a \in A\} & \text{complemento ortogonale di } A \neq \emptyset \end{cases}$

Oss.
- $\{0\}^\perp = X$ e $X^\perp = \{0\}$
- $A^\perp$ sottospazio vettoriale
- $A^\perp = (\text{span}(A))^\perp$ ▨

Proposizione: Siano X sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ con prodotto scalare $\langle \cdot | \cdot \rangle$ e $M \subset X$ sottospazio. Allora
a) $M^\perp$ chiuso;
b) $(\overline{M})^\perp = M^\perp$;
c) $\overline{M} \subset (M^\perp)^\perp$.

Oss. H sp. di Hilbert $\Rightarrow$ $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$. ▨

Dim a) $M^\perp = \bigcap \{\ker L_y : y \in M\}$

b)
- $M \subset \overline{M} \Rightarrow (\overline{M})^\perp \subset M^\perp$
- $y \in M^\perp$ e $x \in \overline{M} \Rightarrow \exists\, x_n \in M \ n \geq 1 : x_n \to x$ per $n \to +\infty$
- $\langle x | y \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle x_n | y \rangle = 0 \Rightarrow y \in (\overline{M})^\perp$

c) $M \subset (M^\perp)^\perp \Rightarrow \overline{M} \subset (M^\perp)^\perp$. ▨

Teorema (proiezione sui chiusi convessi)

Siano H sp. di Hilbert e $C \subset H$ insieme non vuoto, chiuso e convesso. Allora, $\exists ! \, x_C \in C$ t.

$$\| x_C - x \| = \min \{ \|y - x\| : y \in C \}.$$

Oss: x_C proiezione di x su C. ☒

Dim.

- $x \in C \Rightarrow$ ovvio!
- $x \notin C \Rightarrow d = \inf \{ \|y-x\| : y \in C \} > 0$
- $\exists \, y_n \in C \; n \geq 1 : \; \|y_n - x\| \to d$ per $n \to +\infty$
- identità del parallelogramma con $a = y_n - x$, $b = x - y_m$

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2 =$$
$$= 2\left(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2\right) - \|y_n + y_m - 2x\|^2 =$$
$$= 2\left(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2\right) - 4 \left\| \frac{y_n + y_m}{2} - x \right\|^2 \leq (*)$$

- $\dfrac{y_n + y_m}{2} \in C \Rightarrow \left\| \dfrac{y_n + y_m}{2} - x \right\| \geq d$

$$(*) \leq 2\left(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2\right) - 4d^2$$

- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \, n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1 : \left[m, n \geq n_0 \Rightarrow 2\left(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2\right) - 4d^2 \leq \varepsilon^2 \right.$
- $\{y_n\}_n$ di Cauchy $\Rightarrow \exists \, y \in H : \; y_n \to y$ per $n \to +\infty$
- C chiuso $+ \; y_n \in C \; \forall n \Rightarrow y \in C$ e $\|y - x\| = d$
- $x_C = y \Rightarrow x_C \in C$ e $\|x_C - x\| = d$

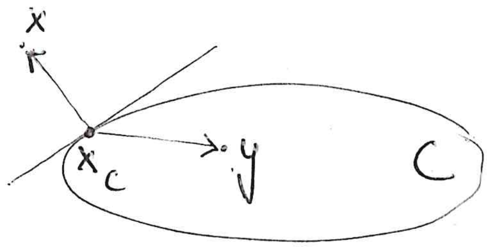
- unicità: $x'_C, x''_C \in C$: $\|x'_C - x\| = \|x''_C - x\| = d$
- come prima

$$\|x'_C - x''_C\|^2 = \|(x'_C - x) + (x - x''_C)\|^2 =$$
$$= 2\left(\|x'_C - x\|^2 + \|x''_C - x\|^2\right) - \|x'_C + x''_C - 2x\|^2 =$$
$$= 4d^2 - 4\left\| \frac{x'_C + x''_C}{2} - x \right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0$$

$\blacksquare$

Oss.
- H sp. di Hilbert reale
- $C \subset H$ non vuoto, chiuso e convesso
- $x \notin C$ e x_C proiezione di x su C

$y \in C \Rightarrow \langle x - x_C | y - x_C \rangle \leq 0$



l'angolo tra i vettori $x - x_C$ e $y - x_C$ è sempre ottuso!

$\blacksquare$

Teorema: Siano H sp. di Hilbert e $M \subset H$ sottospazio chiuso. Allora, per ogni $x \in H$ si ha

$$x = x_M + x_{M^\perp}$$

con x_M e $x_{M^\perp}$ proiezioni di x su M e $M^\perp$ e tale decomposizione e' unica.

Dim.
- $M, M^\perp$ insiemi non vuoti, chiusi e convessi
- $x \in H \Rightarrow \exists\, x_M \in M,\ x_{M^\perp} \in M^\perp$ proiezioni di x su M e $M^\perp$
- $y \in M$ e $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow x_M + \lambda y \in M$
- $\| x - x_M \|^2 \leq \| x - (x_M + \lambda y) \|^2 =$

$$= \| (x - x_M) - \lambda y \|^2 =$$

$$= \| x - x_M \|^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda \langle x - x_M | y \rangle) + |\lambda|^2 \|y\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$2\mathrm{Re}(\lambda \langle x - x_M | y \rangle) \leq |\lambda|^2 \|y\|^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall y \in M$$

- $\begin{cases} \lambda = \varepsilon > 0 & \Rightarrow \quad 2\mathrm{Re}(\langle x - x_M | y \rangle) \leq \varepsilon \|y\|^2 \quad \forall y \in M \\ \varepsilon \to 0^+ & \Rightarrow \quad 2\mathrm{Re}(\langle x - x_M | y \rangle) \leq 0 \quad \forall y \in M \end{cases}$
- $\mathrm{Re}(\langle x - x_M | y \rangle) \leq 0 \ \forall y \in M \Rightarrow \mathrm{Re}(\langle x - x_M | y \rangle) = 0 \ \forall y \in M$
- $\begin{cases} \lambda = -i\varepsilon \text{ e } \varepsilon > 0 & \Rightarrow \quad 2\mathrm{Im}(\langle x - x_M | y \rangle) \leq \varepsilon \|y\|^2 \quad \forall y \in M \\ \varepsilon \to 0^+ & \Rightarrow \quad 2\mathrm{Im}(\langle x - x_M | y \rangle) \leq 0 \quad \forall y \in M \end{cases}$
- $\mathrm{Im}(\langle x - x_M | y \rangle) = 0 \ \forall y \in M \Rightarrow \mathrm{Im}(\langle x - x_M | y \rangle) = 0 \ \forall y \in M$

- $\langle x - x_M | y \rangle = 0 \quad \forall y \in M \Rightarrow x - x_M \in M^\perp$
- $x = x_M + (x - x_M)$ con $x_M \in M$ e $x - x_M \in M^\perp$

Resta da provare che $x - x_M = x_{M^\perp}$

- come prima con $M^\perp$ al posto di M:

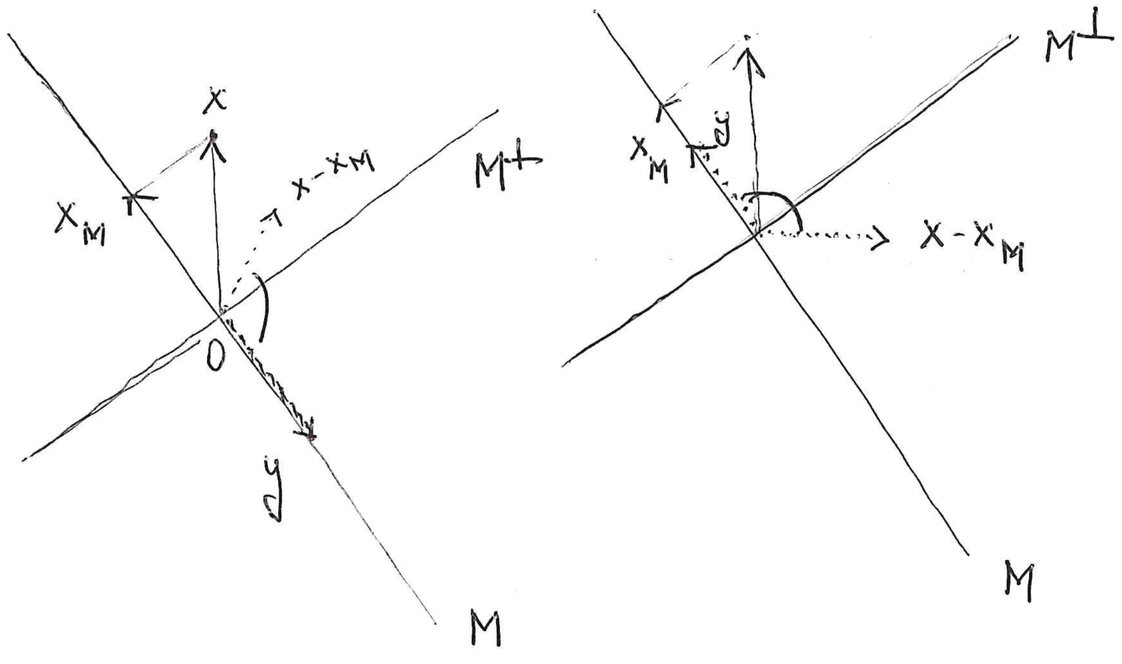
$$x = x_{M^\perp} + (x - x_{M^\perp}) \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_{M^\perp} \in M^\perp \\ x - x_{M^\perp} \in (M^\perp)^\perp \end{cases}$$

- $M \subset (M^\perp)^\perp \Rightarrow$

$$x = x_M + (x - x_M) \in M + M^\perp \subset (M^\perp)^\perp + M^\perp$$
$$x = (x - x_{M^\perp}) + x_{M^\perp} \in (M^\perp)^\perp + M^\perp$$

- $M^\perp \cap (M^\perp)^\perp = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} x_M = x - x_{M^\perp} \\ x_{M^\perp} = x - x_M \end{cases}$
- $M \cap M^\perp = \{0\} \Rightarrow$ unicità. $\blacksquare$

Oss.



$\blacksquare$

Corollario: Siano H sp. di Hilbert e $M \subset H$ sottospaz. chiuso. Allora,

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

Corollario: Siano H sp. di Hilbert e $M \subset H$ sottospaz. Allora,

$$\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}.$$

Dim. . $\overline{M} \subset (M^{\perp})^{\perp}$ (Proposizione....)

. P.A. $\overline{M} \neq (M^{\perp})^{\perp} \Rightarrow \exists\, x \in (M^{\perp})^{\perp}$ e $x \notin \overline{M}$

. $\overline{M}$ chiuso in $(M^{\perp})^{\perp}$ e $\overline{M} \subset (M^{\perp})^{\perp} \Rightarrow x = x' + x''$ con $\begin{array}{l} x' \in \overline{M} \\ x'' \in (\overline{M})^{\perp} \end{array}$

. $x'' \in (\overline{M})^{\perp} = M^{\perp}$ e $x'' \in (M^{\perp})^{\perp} \Rightarrow x'' = 0 \Rightarrow x = x' \in \overline{M}$

assurdo! ▨

Teorema (F. Riesz): Siano H sp. di Hilbert e $L \in H^*$. Allora, $\exists!\, y_L \in H$ t.c.

$$Lx = \langle y_L | x \rangle, \quad x \in H.$$

Inoltre si ha $\|y_L\| = \|L\|$.

Oss. Ogni $L \in H^*$ e' della forma $L = L_y$ per qualche $y \in H$. ▨

Dim. • $L=0 \Rightarrow y=0$

• $L\neq 0$ e $M=\ker L \Rightarrow M$ sottospazio chiuso e $M\neq H$

• $\exists\, z\in M^\perp$ e $\|z\|=1$

• $x\in H$ e $u=u(x)=(Lx)z-(Lz)x$

• $Lu=0 \Rightarrow u\in\ker L=M$

• $u\in M$ e $z\in M^\perp \Rightarrow 0=\langle z|u\rangle = Lx-(Lz)\langle z|x\rangle$

• $Lx=\langle (Lz)^*z|x\rangle,\quad x\in H$

• $y_L=(Lz)^*z\in M^\perp$ e $Lx=\langle y_L|x\rangle,\ x\in H$

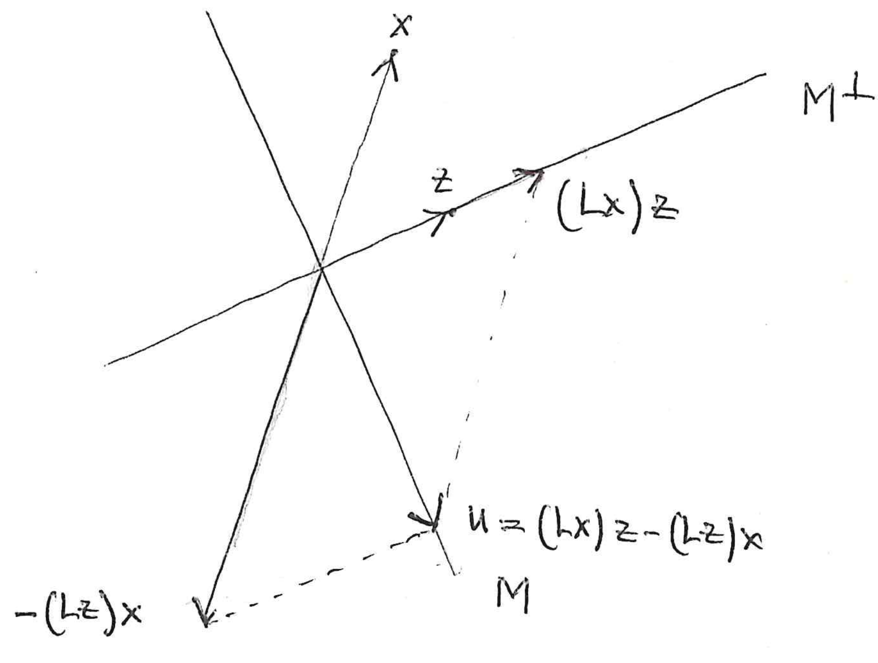
• unicità: se $y_1,y_2\in H$ sono t.c.

$$Lx=\langle y_i|x\rangle,\quad x\in H \qquad (i=1,2)$$

si ha $\langle y_2-y_1|x\rangle=0\ \forall x\in H$ da cui segue $y_1=y_2$.

• $L=L_{y_L} \Rightarrow \|L\|=\|y_L\|$. ▨

Oss.



▨

<u>Oss</u>: Sia H sp. di Hilbert e per ogni $y \in H$ sia $L_y \in H^*$ il funzionale lineare limitato definito da

$$L_y x = \langle y | x \rangle, \qquad x \in H$$

(Osservazione....). La funzione

$$y \in H \longmapsto L_y \in H^*$$

e' un isomorfismo isometrico antilineare di H su H^*. In particolare si ha

$$L_{\lambda y_1 + \mu y_2} = \lambda^* L_{y_1} + \mu^* L_{y_2} \quad y_i \in H \ i=1,2 \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

<u>Corollario</u>: H sp. di Hilbert $\Rightarrow$ H riflessivo.

<u>Dim.</u> • $\phi : H \to H^*$ $\langle \phi(x), y \rangle = \langle x | y \rangle$ $y \in H$ $(x \in H)$

ϕ isomorfismo isometrico antilineare di H su H^*

• H^* sp. di Hilbert con prodotto scalare

$$\langle L | L' \rangle_* = \langle \phi^{-1}(L') | \phi^{-1}(L) \rangle, \qquad L, L' \in H^*$$

• $\langle \cdot | \cdot \rangle$ induce la norma di H^*:

$L \in H^* \Rightarrow x = \phi^{-1}(L)$ e $\langle L | L \rangle_* = \langle \phi^{-1}(L) | \phi^{-1}(L) \rangle = \langle x | x \rangle =$
$= \|x\|^2 = \|L\|^2$

• $\Psi : H^* \to H^{**}$ $\langle \Psi(L'), L \rangle = \langle L' | L \rangle_*$ $L \in H^*$ $(L' \in H^*)$

Ψ isomorfismo isometrico antilineare di H^* su H^{**}

- $\Psi \circ \phi : H \longrightarrow H^{**}$ isomorfismo isometrico <u>lineare</u> di H su H

- $\begin{cases} \langle \Psi\circ\phi(x), L \rangle = \langle \phi(x) \mid L \rangle_* = \langle \phi^{-1}(L) \mid x \rangle \\ \langle Jx, L \rangle = \langle L, x \rangle = \langle \phi^{-1}(L) \mid x \rangle \end{cases}$ $L \in H^*,\ x \in H$

$$\Downarrow$$

$$J = \Psi \circ \phi$$

- $\Psi \circ \phi$ suriettivo su $H^{**} \Rightarrow H$ riflessivo. ▨

Insiemi ortonormali

- H sp. di Hilbert
- $U \subset H$ tale che
$$x, y \in U \Rightarrow \langle x | y \rangle = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$
si dice *insieme ortonormale*.

Oss.

- U ortonormale $\Rightarrow$ U linearmente indipendente
- metodo di Gram-Schmidt: siano $\{x_n\}_n$ ins. linearmente indipendente (al più numerabile) e

$$\begin{cases} u_1 = x_1 / \|x_1\| \\ u_{n+1} = \dfrac{x_{n+1} - \sum'_{1 \le m \le n} \langle u_m | x_{n+1} \rangle u_m}{\left\| x_{n+1} - \sum'_{1 \le m \le n} \langle u_m | x_{n+1} \rangle u_m \right\|} \end{cases} \qquad n \geq 1$$

Allora,

- $\{u_n\}_n$ ortonormale;
- $\mathrm{span}\{u_n : n \geq 1\} = \mathrm{span}\{x_n : n \geq 1\}$. ∎

Def. Siano H sp. di Hilbert e $U=\{u_i : i\in I\}$ ins. ortonormale. I numeri

$$\{\hat{x}(i)\}_{i\in I} \quad \text{ove} \quad \hat{x}(i)=\langle u_i | x\rangle, \quad i\in I,$$

si dicono <u>coefficienti di Fourier di $x\in H$</u> relativi a $U=\{u_i : i\in I\}$. $\blacksquare$

<u>Lemma</u>: Sia H sp. di Hilbert e siano

- $U=\{x_1,\dots,x_n\}$ ins. ortonormale;
- $M=\operatorname{span}\{u_1,\dots,u_n\}$.

Allora, per ogni $x\in H$ la proiezione x_M di x su M e'

$$x_M = \sum_{1\le m\le n} \hat{x}(m)\, u_m .$$

<u>Dim</u>.

- $x_M=\lambda_1 u_1+\dots+\lambda_n u_n$ con $\lambda_m\in\mathbb{K}$ $m=1,\dots,n$
- $x-x_M\in M^\perp \Rightarrow 0=\langle u_m | x-x_M\rangle=\hat{x}(m)-\lambda_m$ $m=1,\dots,n$ $\blacksquare$

Teorema (disuguaglianza di Bessel)

Siano H sp. di Hilbert e $U = \{u_i : i \in I\}$ ins. ortonormale.

Allora,

$$\sum_{i \in I}' |\hat{x}(i)|^2 \leq \|x\|^2, \qquad x \in H.$$

Oss. $U = \{u_i : i \in I\}$ ins. ortonormale $\Rightarrow \{i : \hat{x}(i) \neq 0\}$ al più numerabile

Dim.

- $F \subset I$ finito e $M = \operatorname{span}\{u_i : i \in F\}$ sottosp. chiuso
- $x = x_M + x_{M^\perp}$ e $x_M = \sum_{i \in F}' \hat{x}(i) u_i$
- $\sum_{i \in F}' |\hat{x}(i)|^2 = \|x_M\|^2 \leq \|x_M\|^2 + \|x_{M^\perp}\|^2 = \|x\|^2$ ▨

Oss. H sp. di Hilbert e $U = \{u_i : i \in I\}$ ins. ortonormale

- $x \in H \longmapsto \hat{x} = \{\hat{x}(i)\}_{i \in I} \in \ell_2(I)$ op. lineare;
- $\|\hat{x}\|_2 \leq \|x\| \quad \forall x \in H.$ ▨

Teorema (F. Riesz - E. Fischer)

Siano H sp. di Hilbert, $U=\{u_i : i\in I\}$ ins. ortonormale e $c: I \to \mathbb{K}$ $c=\{c_i\}_{i\in I}$ una funzione. Allora,

$$\exists\, x\in H : \hat{x}(i)=c_i \ \forall i\in I \iff \sum_{i\in I}{}' |c_i|^2 < +\infty$$

e in tal caso si ha

$$x = \sum_{i\in I}{}' c_i u_i \longleftarrow \boxed{\begin{array}{l}\forall \varepsilon>0\ \exists F_\varepsilon \subset I \text{ finito t.c.}\\ F\subset I \text{ finito e } F_\varepsilon\subset F \Rightarrow \left\|\sum_{i\in F}{}' c_i u_i - x\right\| \le \varepsilon\end{array}}$$

con convergenza in H.

Oss. L' op. lineare $x\in H \to \hat{x}\in \ell_2(I)$ e' suriettivo! ▨

Dim. $(\Rightarrow)$ disug. di Bessel!

$(\Leftarrow)$

- $I_n = \{i : |c_i| \ge 1/n\}$ $n\ge 1$ $\Rightarrow$ I_n finito $\forall n$
- $x_n = \sum_{i\in I_n}{}' c_i u_i$ $n\ge 1$ $\Rightarrow$
  - $\hat{x}_n \to c$ puntualm. in I per $n\to+\infty$
  - $|\hat{x}_n(i) - c_i|^2 \le |c_i|^2$ $\forall i\in I$, $\forall n\ge 1$
- (CD) $\Rightarrow$ $\hat{x}_n \to c$ in $\ell_2(I)$ per $n\to+\infty$
- $\|x_n - x_m\|^2 = \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|_2^2 \to 0$ per $(m,n)\to+\infty$
- H completo $\Rightarrow$ $\exists\, x\in H :$ $x_n \to x$ in H per $n\to+\infty$
- $\hat{x}(i) = \langle u_i | x\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle u_i | x_n\rangle = \lim_{n\to+\infty} \hat{x}_n(i) = c_i$ $\forall i\in I$

Resta da provare che si ha

$$x = \sum_{i \in I}' c_i u_i$$

con convergenza in H.

- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1 : \begin{cases} n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| \leq \varepsilon/2 \\ F \subset I \text{ finito e } I_{n_0} \subset F \Rightarrow \sum'_{i \in F \setminus I_{n_0}} |c_i|^2 \leq (\varepsilon/2)^2 \end{cases}$

- $F \subset I$ finito e $I_{n_0} \subset F \Rightarrow \| \sum'_{i \in F} c_i u_i - x \| \leq \| \sum'_{i \in F} c_i u_i - x_{n_0} \| + \| x_{n_0} - x \| =$

$$= (I) + (II)$$

- $(I)^2 = \| \sum'_{x \in F} c_i u_i - x_{n_0} \|^2 = \sum'_{i \in F \setminus I_{n_0}} |c_i|^2 \leq (\varepsilon/2)^2$

- $(II) = \| x_{n_0} - x \| \leq \varepsilon/2$. ▨

Teorema: Siano H sp. di Hilbert e U_0 ins. ortonormale

Allora, $\exists\, U_{max}$ ins. ortonormale t.c.

- $U_0 \subset U_{max}$;
- U_{max} massimale (rispetto all'inclusione).

Dim. teorema di massimalità di Hausdorff. ▨

Teorema: Siano H sp. di Hilbert e $U = \{u_i : i \in I\}$ ins. ortonormale. Sono equivalenti

a) U massimale ;

b) $\mathrm{span}(U)$ denso in H;

c) $\|x\|^2 = \sum'_{i \in I} |\hat{x}(i)|^2 \quad \forall x \in H$;

d) $\langle x | y \rangle = \sum'_{i \in I} [\hat{x}(i)]^* \hat{y}(i) \quad \forall x, y \in H$.

Oss.

- U ins. ortonormale massimale $\equiv$ U sistema ortonormale completo (SONC)
- $\begin{cases} \text{(c)} & \text{identità di Bessel} \\ \text{(d)} & \text{identità di Parseval} \end{cases}$ ▨

Dim. (a) $\Rightarrow$ (b)

- $M = cl(span(U))$ sottosp. chiuso
- P.A. $M \neq H \Rightarrow \exists\, u \in M^{\perp}$ con $\|u\| = 1$ (HB) assurdo!

(b) $\Rightarrow$ (c)

- $x \neq 0$ altrimenti e' ovvio
- $0 < \varepsilon < \|x\| \Rightarrow \exists\, u_{i_1}, \dots, u_{i_n} \in U$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ t.c. $\|x - (\lambda_1 u_{i_1} + \dots + \lambda_n u_{i_n})\| \leq \varepsilon$
- $\begin{cases} M = span\{u_{i_1}, \dots, u_{i_n}\} \text{ sottosp. chiuso} \\ x_M = \hat{x}(i_1) u_{i_1} + \dots + \hat{x}(i_n) u_{i_n} \in M \end{cases}$
- $\|x - x_M\| \leq \|x - (\lambda_1 u_{i_1} + \dots + \lambda_n u_{i_n})\| \leq \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \geq \|x - x_M\| \geq \|x\| - \|x_M\|$
- $0 < \|x\| - \varepsilon \leq \|x_M\| \Rightarrow (\|x\| - \varepsilon)^2 \leq \|x_M\|^2 = \sum'_{1 \leq m \leq n} |\hat{x}(i_m)|^2 \leq$

$$\leq \sum'_{i \in I} |\hat{x}(i)|^2 \leq \|x\|^2$$

(c) $\Rightarrow$ (d)

- formula di polarizzazione!

(d) $\Rightarrow$ (a)

- P.A. $U = \{u_i : i \in I\}$ non massimale
- $\exists\, u \in H : \|u\| = 1$ e $\langle u_i | u \rangle = 0 \;\; \forall i$
- $1 = \|u\|^2 = \langle u | u \rangle = \sum'_{i \in I} |\hat{u}(i)|^2 = 0$ assurdo! ▨

Oss. formula di polarizzazione:

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ $\qquad \langle x|y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ $\qquad \langle x|y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|y+ix\|^2 - \|y-ix\|^2\right)$ $\blacksquare$

Corollario: Siano H sp. di Hilbert e $U=\{u_i : i\in I\}$ s.o.n.c. di H. Allora,

$$x = \sum_{i\in I}{}' \hat{x}(i)u_i, \qquad x\in H.$$

Dim. $x\in H$

- Bessel $\Rightarrow$ $\hat{x}\in \ell_2(I)$
- Riesz-Fischer $\Rightarrow$ $y=\sum_{i\in I}{}' \hat{x}(i)u_i \in H$ e $\hat{y}=\hat{x}$
- $\langle x-y|u_i\rangle = 0 \ \forall i \Rightarrow \langle x-y|z\rangle = 0 \ \forall z\in H \Rightarrow x=y$ $\blacksquare$

Dimensione ortogonale e isomorfismi

Teorema: Siano H sp. di Hilbert e U, V s.o.n.c. di H. Allora,

$$\mathrm{card}(U) = \mathrm{card}(V).$$

Oss. Il numero cardinale comune a tutti i s.o.n.c. di H sp. di Hilbert si dice dimensione ortogonale di H e si denota con

$$\dim_H(H).$$ ▨

Dim. Appunti ▨

Teorema: Siano H, H' sp. di Hilbert e U, U' s.o.n.c. di H e H' rispettivamente. Sono equivalenti

a) $\exists\, T \in L(H, H')$ t.c.

(*)
- T isomorfismo di H su H';
- $\langle Tx | Ty \rangle = \langle x | y \rangle \quad \forall x, y \in H$;

b) $\dim_H(H) = \dim_H(H')$.

Oss. $T \in L(H, H')$ con le proprietà $(*)$ si dice isomorfismo di sp. di Hilbert (operatore unitario e suriettivo se $H = H'$) ▨

Corollario: Siano H sp. di Hilbert e $U = \{u_i : i \in J\}$ s.o.n.c. di H. Allora, l'operatore lineare

$(**)$ $\quad \hat{} : x \in H \longmapsto \hat{x} \in \ell_2(J)$

e' un isomorfismo di sp. di Hilbert di H su $\ell_2(J)$

▨

Oss. L'operatore lineare $(**)$ si dice trasformata di Fourier (associata a $U = \{u_i : i \in J\}$)

Teorema: Siano H sp. di Hilbert e U s.o.n.c. di H. Allora,

$$H \text{ separabile} \Leftrightarrow \dim_H(H) \text{ al più numerabile}$$

Dim

$(\Rightarrow)$. $u, u' \in U$ e $u \neq u'$ $\Rightarrow$ $\|u - u'\| = \sqrt{2}$

. $\dim_H(H) > \aleph_0$ $\Rightarrow$ $\exists$ famiglia non numerabile di aperti disgiunti

$(\Leftarrow)$ $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(U)$ o $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}(U)$ numerabile e denso ▨

Esempio: funzioni di Haar in $[0,1)$

- $I_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right) \quad k = 1, \dots, 2^n$ e $n \geq 0$

- $\begin{cases} u_0(t) = 1 \\ u_{n,k}(t) = c_n \left(\mathbb{1}_{I_{n+1,2k-1}}(t) - \mathbb{1}_{I_{n+1,2k}}(t) \right) \end{cases} \quad t \in [0,1]$

- $c_n \ (n \geq 1)$: $\quad \| u_{n,k} \|_2^2 = \int_0^1 (u_{n,k})^2 = 1 \Rightarrow c_n = 2^{n/2}$

- $\{ u_0$ e $u_{n,k} : k = 1, \dots, 2^n$ e $n \geq 0 \}$ s.o.n.c. di $L_2([0,1))$ ▨

SERIE DI FOURIER

Toro e funzioni periodiche

Si può rappresentare una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-periodica come somma di una serie trigonometrica

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}, \qquad t \in \mathbb{R} \; ?$$

<u>Toro</u> (<u>unidimensionale</u>)

- X insieme (non vuoto) e $\sim$ relazione d'equivalenza in X
- $X/_\sim$ insieme quoziente
- $\pi_X : X \to X/_\sim$ proiezione canonica di X su $X/_\sim$
- $f : X \to Y \; : \; \left[x_1 \sim x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \right] \quad (*)$
- $(*) \Rightarrow \exists !\; f_\# : X/_\sim \to Y : f(x) = f_\# \circ \pi_X(x), \; x \in X$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_X"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \\
& X/_\sim \arrow[ur, "f_\#"'] &
\end{tikzcd}$$

- (X, τ_X) sp. topologico

$$\tau_{X/_{\mathcal{R}}} = \{ V \subset X/_{\mathcal{R}} : \pi_X^{-1}(V) \in \tau_X \}$$ topologia quoziente

Oss.

- $\tau_{X/_{\mathcal{R}}}$ e' la più forte topologia su $X/_{\mathcal{R}}$ t.c. π_X sia continua

- $\begin{cases} V \text{ aperto di } X/_{\mathcal{R}} \iff \pi_X^{-1}(V) \text{ aperto di } X \\ F \text{ chiuso di } X/_{\mathcal{R}} \iff \pi_X^{-1}(F) \text{ chiuso di } X \end{cases}$ ▨

- $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ sp. topologici e $f : X \to Y$ con (*)

$$f : X \to Y \text{ continua} \iff f_\# : X/_{\mathcal{R}} \to Y \text{ continua}$$

Def. L'insieme quoziente

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/_{\text{mod } 2\pi}$$

si dice toro (unidimensionale). ▨

Poniamo

$$\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T} \qquad \text{proiezione di } \mathbb{R} \text{ su } \mathbb{T}$$

$$\tau = \tau_{\mathbb{T}} \qquad \text{topologia quoziente}$$

- $\begin{cases} V \text{ aperto di } \mathbb{T} \iff \pi^{-1}(V) \text{ aperto di } \mathbb{R} \\ F \text{ chiuso di } \mathbb{T} \iff \pi^{-1}(F) \text{ chiuso di } \mathbb{R} \end{cases}$

- $\left.\begin{array}{l} x' \sim x'' \\ y' \sim y'' \end{array}\right\}$ mod 2π $\Rightarrow$ $x'+y' \sim x''+y''$ e $-x' \sim -x''$ mod 2π

Quindi le operazioni

$$(s,t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T} \longmapsto s+t \in \mathbb{T} \qquad s \in \mathbb{T} \longmapsto -s \in \mathbb{T}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \arrow[r, "+"] \arrow[d, "\pi\otimes\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{T}\times\mathbb{T} \arrow[r, "+_{\mathrm{mod}\,2\pi}"'] & \mathbb{T} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "-"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{T} \arrow[r, "-_{\mathrm{mod}\,2\pi}"'] & \mathbb{T} \end{tikzcd}$$

sono ben definite e $\mathbb{T}$ e' un gruppo (abeliano)
Inoltre, esse sono continue e quindi $\mathbb{T}$ e' un gruppo topologico (abeliano).

- $(\mathbb{T}, \tau)$ metrizzabile e compatto con

$$d_{\mathbb{T}}(s,t) = \min\{|x-y| : x \in \pi^{-1}(s), y \in \pi^{-1}(t)\}, \quad s,t \in \mathbb{T}.$$

<u>Oss</u>. $\mathbb{T}$ e' omeomorfo a

a) lo spazio topologico quoziente $[0,2\pi]/_\sim$ ove

$$x \sim y \iff \begin{cases} x = y & \text{se } \{x,y\} \cap (0,2\pi) = \phi \\ x = 0 \text{ e } y = 2\pi & \text{o viceversa} \end{cases}$$

b) il gruppo topologico (abeliano moltiplicativo)

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$$

mediante l'omeomorfismo (e omomorfismo!)

$\phi : \mathbb{T} \to S^1$ definito da

$$\phi(\pi(x)) = e^{ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "e^{i\cdot}"] \arrow[dr, "\pi"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & & S^1 \\ & \mathbb{T} \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

- identifichiamo funzioni 2π-periodiche e funzioni in $\mathbb{T}$:

  $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ 2π-periodica

  $f : \mathbb{T} \to \mathbb{K}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\pi"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & & \mathbb{K} \\ & \mathbb{T} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

usiamo la stessa notazione f per $\tilde{f}$ e f!

- $f : \mathbb{T} \to \mathbb{K}$
  - f continua $\iff$ $\tilde{f}$ uniform. continua (teor. di Heine-Cant
  - $f \in C^k(\mathbb{T}) \iff \tilde{f} \in C^k_{2\pi}(\mathbb{R})$ $(k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\})$.

Misura di Haar

- $\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{T}) = \{ E \subset \mathbb{T} : \pi^{-1}(E) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \} & \sigma\text{-algebra di } \mathbb{T} \\ E \in \mathcal{S}(\mathbb{T}) & \text{misurabile} \end{cases}$

- $\mathcal{S}(\mathbb{T})$ invariante per traslazioni:

$$E \in \mathcal{S}(\mathbb{T}) \iff E + t \in \mathcal{S}(\mathbb{T})$$

- $\begin{cases} \mu : \mathcal{S}(\mathbb{T}) \to [0, +\infty) \\ \mu(E) = \frac{1}{2\pi} | \pi^{-1}(E) \cap [0, 2\pi) |, \quad E \in \mathcal{S}(\mathbb{T}) \end{cases}$

μ <u>misura di Haar in $\mathbb{T}$</u>

- μ misura positiva su $\mathcal{S}(\mathbb{T})$ t.c.
  - μ completa e finita ($\mu(\mathbb{T}) = 1$);
  - μ misura di Radon regolare in $\mathbb{T}$;
  - μ invariante per traslazioni:

$$\mu(E + t) = \mu(E), \qquad E \in \mathcal{S}(\mathbb{T}),\ t \in \mathbb{T}$$

- $f : \mathbb{T} \to \mathbb{K}$ 　 f misurabile in $\mathbb{T} \equiv \mathcal{S}(\mathbb{T})$-misurabile

  f integrabile in $\mathbb{T} \equiv \mu$-integrabile

- $f : \mathbb{T} \to \mathbb{K}$ e $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ 2π-periodica t.c. $\tilde{f} = f \circ \pi$

  f misurabile in $\mathbb{T} \iff \tilde{f}$ misurabile in $\mathbb{R}$

  f integrabile in $\mathbb{T} \iff \tilde{f}$ localmente integrabile in $\mathbb{R}$

- $f: \mathbb{T} \to \mathbb{K}$ integrabile in $\mathbb{T}$

$$E \in \mathcal{S}(\mathbb{T}) \quad \Rightarrow \quad \int_E f\,d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_E f(t)\,dt$$

$$E = \mathbb{T} \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{T}} f\,d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$$

- $f: \mathbb{T} \to \mathbb{K}$ integrabile in $\mathbb{T}$ e $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ 2π-periodica t.c. $\tilde{f} = f \circ$

$$\frac{1}{2\pi}\int_E f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi^{-1}(E)\cap[0,2\pi)} \tilde{f}(t)\,dt, \qquad E \in \mathcal{S}(\mathbb{T})$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(t)\,dt.$$

Convenzione: Identificando $f: \mathbb{T} \to \mathbb{K}$ integrabile in $\mathbb{T}$ e $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ 2π-periodica e integrabile in $[0,2\pi]$ scriveremo

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt.$$

Spazi di funzioni su $\mathbb{T}$ e convoluzioni

- $e_n : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, $e_n(\pi(x)) = e^{inx}$, $x \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{Z})$

- $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ caratteri del toro
- identifichiamo e_n con $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{inx}$ e scriviamo brevemente

$$e^{int} = e_n(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- ortonormalità dei caratteri del toro

$$\int_{\mathbb{T}} e_m^* e_n \, d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

- $p : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, $p(t) = \sum_{|m| \le n} a_m e_m(t)$, $t \in \mathbb{T}$ $(a_m \in \mathbb{C}, |m| \le n$ e $n \ge 0)$

  - p polinomio trigonometrico
  - $P(\mathbb{T}) = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ algebra di funzioni

Teorema: $P(\mathbb{T})$ è denso in $C(\mathbb{T})$.

Dim. $P(\mathbb{T})$ algebra di $C(\mathbb{T})$ t.c.

- $P(\mathbb{T})$ separa i punti di $\mathbb{T}$:
  - $p(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \cos t$ e $q(t) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \operatorname{sen} t$
  - $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \cos t_1 \neq \cos t_2$ o $\operatorname{sen} t_1 \neq \operatorname{sen} t_2 \Rightarrow p(t_1) \neq p(t_2)$ o $q(t_1) \neq q(t_2)$

- $P(\mathbb{T})$ contiene le costanti e $[p \in P(\mathbb{T}) \Leftrightarrow p^* \in P(\mathbb{T})]$
- SW $\Rightarrow$ $P(\mathbb{T})$ denso in $C(\mathbb{T})$. ▨

- spazi L_p sul toro: $L_p(\mathbb{T}) = L_p(\mu)$ $1 \le p \le +\infty$

$$\mu(\mathbb{T}) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \|f\|_p \le \|f\|_q \quad \forall f \in L_q(\mathbb{T}) \\ L_p(\mathbb{T}) \hookrightarrow L_q(\mathbb{T}) \end{cases} \quad 1 \le p \le q \le +\infty$$

Teorema: $P(\mathbb{T})$ e $C(\mathbb{T})$ sono densi in $L_p(\mathbb{T})$ per $1 \le p < +\infty$

Dim.

- μ misura positiva di Radon in $\mathbb{T}$ $\Rightarrow$ $C(\mathbb{T})$ denso in $L_p(\mathbb{T})$ $1 \le p < +\infty$
- $\begin{cases} P(\mathbb{T}) \text{ denso in } C(\mathbb{T}) \\ \|f\|_p \le \|f\|_u \quad \forall f \in C(\mathbb{T}) \quad (C(\mathbb{T}) \hookrightarrow L_p(\mathbb{T})) \end{cases} \Rightarrow P(\mathbb{T})$ denso in $L_p(\mathbb{T})$ $1 \le p < +\infty$

▨

- $f : \mathbb{T} \to \mathbb{K} \Rightarrow \tau_s f(t) = f(t+s)$ $t \in \mathbb{T}$ s-traslata di f ($s \in \mathbb{T}$)

- $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{K}$ e $s \in \mathbb{T}$

$$f = g \text{ q.o. in } \mathbb{T} \Leftrightarrow \tau_s f = \tau_s g \text{ q.o. in } \mathbb{T}.$$

Teorema: Sia $f \in L_p(\mathbb{T})$ $(1 \le p < +\infty)$. Allora,

a) $\tau_{-s} f \in L_p(\mathbb{T})$ e $\|\tau_{-s} f\|_p = \|f\|_p$ $\forall s \in \mathbb{T}$

b) $s \in \mathbb{T} \mapsto \tau_{-s} f \in L_p(\mathbb{T})$ è uniformemente continua.

Dim. Come in $\mathbb{R}^N$! ▨

Teorema (W. H. Young) Siano $f \in L_1(\mathbb{T})$ e $g \in L_p(\mathbb{T})$ $(1 \le p \le +\infty)$

Allora,

a) $\exists\, T \subset \mathbb{T}$ trascurabile t.c.

$$s \in \mathbb{T} \longrightarrow f(t-s)\,g(s)$$

è integrabile in $\mathbb{T}$ per ogni $t \in \mathbb{T} \setminus T$;

b) la funzione

$$f*g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-s)\,g(s)\,ds & t \in \mathbb{T}\setminus T \\ 0 & t \in T \end{cases}$$

è in $L_p(\mathbb{T})$ e si ha $\|f*g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$.

Dim. Come in $\mathbb{R}^N$! ∎

Oss. $f*g$ convoluzione di f con g ∎

Proprietà: Siano $f, g, h \in L_1(\mathbb{T})$. Allora,

a) $f*g = g*f$

b) $(f*g)*h = f*(g*h)$

c) $(\alpha f + \beta g)*h = \alpha\, f*h + \beta\, g*h \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Dim Appunti ∎

Oss.
- $L_1(\mathbb{T})$ con $*$ è un algebra di Banach
- $f \in L_1(\mathbb{T})$ e $g \in C(\mathbb{T}) \Rightarrow f*g\ C(\mathbb{T})$. ∎

Coefficienti e serie di Fourier

Serie trigonometriche e coefficienti di Fourier

(*) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$, $t \in \mathbb{T}$ $(c_n \in \mathbb{K}\ n \in \mathbb{Z})$ serie trigonometrica

- $s_n(t) = \sum_{|m| \leq n} c_m e^{imt}$, $t \in \mathbb{T}$, $n \geq 0$ somma parziale n-esima

- (*) converge in qualche senso se $\{s_n\}_n$ converge nello stesso senso.

Def. Sia $f : \mathbb{T} \to \mathbb{K}$ integrabile in $\mathbb{T}$. I numeri

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

si dicono coefficienti di Fourier di f e la serie trigonometrica

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{int}, \qquad t \in \mathbb{T},$$

si dice serie di Fourier di f. ▨

Oss. $s_n f(t) = \sum_{|m| \leq n} \hat{f}(m) e^{imt} \in P(\mathbb{T})$ $\forall n \geq 0$. ▨

Oss. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ integrabile in $\mathbb{T} \Rightarrow [\hat{f}(n)]^* = \hat{f}(-n) \ \forall n$

- $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \hat{f}(n)e^{int} = \hat{f}(0) + \sum_{n\geq 1}{}' \left(\hat{f}(n)e^{int} + \hat{f}(-n)e^{-int}\right) =$$
$$= \hat{f}(0) + \sum_{n\geq 1}{}' 2\,\mathrm{Re}\left(\hat{f}(n)e^{int}\right)$$

- $$\hat{f}(n)e^{int} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(s)\left[\cos(ns) - i\,\mathrm{sen}(ns)\right]ds\right)\left(\cos(nt) + i\,\mathrm{sen}(nt)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Re}\left(\hat{f}(n)e^{int}\right) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(s)\cos(ns)\,ds\right)\cos(nt) + \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(s)\,\mathrm{sen}(ns)\,ds\right)\mathrm{sen}(n$$
$$= \frac{1}{2}a_n \cos(nt) + \frac{1}{2}b_n\,\mathrm{sen}(nt)$$

ove
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} f(s)\cos(ns)\,ds \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} f(s)\,\mathrm{sen}(ns)\,ds \end{cases} \qquad n \geq 0$$

Quindi si ha

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \hat{f}(n)e^{int} = a_0/2 + \sum_{n\geq 1}{}' \left[a_n\cos(nt) + b_n\,\mathrm{sen}(nt)\right]. \quad \blacksquare$$

Nucleo di Dirichlet

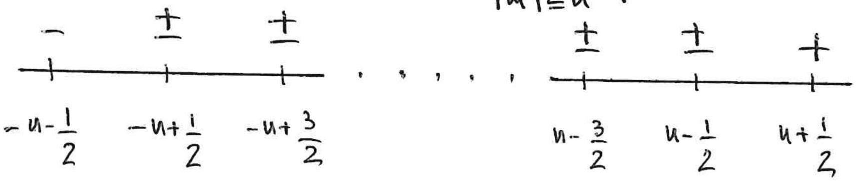
- $f : \mathbb{T} \to \mathbb{K}$ integrabile in $\mathbb{T}$
- $$s_n f(t) = \sum_{|m|\le n} \hat{f}(m) e^{imt} =$$
$$= \sum_{|m|\le n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(s) e^{-ims} ds \right) e^{imt} =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{|m|\le n} e^{im(t-s)} \right) f(s) ds =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} D_n(t-s) f(s) ds = D_n * f(t), \quad t \in \mathbb{T}$$

ove

$$D_n(t) = \sum_{|m|\le n} e^{imt}, \quad t \in \mathbb{T} \quad (n \geq 0),$$

si dice <u>nucleo di Dirichlet</u>.

- $$D_n(t) e^{it/2} - D_n(t) e^{-it/2} = \sum_{|m|\le n} \left(e^{i(m+\frac{1}{2})t} - e^{i(m-\frac{1}{2})t} \right) = (*)$$



$$(*) = e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t} =$$
$$= 2i \operatorname{sen}\left(\left(n + \tfrac{1}{2} \right) t \right) \quad t \in \mathbb{T}, \ n \geq 0$$

- $$2i \operatorname{sen}(t/2) D_n(t) = 2i \operatorname{sen}\left(\left(n + \tfrac{1}{2} \right) t \right), \quad t \in \mathbb{T}, \ n \geq 0$$

$$\cdot \quad D_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left((n+1/2)\,t\right)}{\operatorname{sen}(t/2)} & t\in\mathbb{T} \quad t\neq 0 \\[2ex] 2n+1 & t=0 \end{cases} \qquad n\geq 0$$

<u>Lemma</u>: $\|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |D_n(t)|\,dt \geq \frac{4}{\pi^2}\log n \,, \quad n\geq 1.$

<u>Dim</u>. Identifichiamo $\mathbb{T}$ con $[0,2\pi)$

- $0\leq t<\pi \;\Rightarrow\; 0\leq \operatorname{sen}(t/2)\leq t/2 \qquad (**)$
- $(**) \;\Rightarrow\; \|D_n\|_1 \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\operatorname{sen}\left((n+1/2)t\right)\right|\cdot\frac{1}{t}\,dt =$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\operatorname{sen}(s)|}{s}\,ds \geq \quad \left(s=(n+\tfrac{1}{2})t\right.!$$

$$\geq \frac{2}{\pi}\sum_{1\leq m\leq n} \frac{1}{m\pi}\int_{(m-1)\pi}^{m\pi} |\operatorname{sen} s|\,ds =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\sum_{1\leq m\leq n}\frac{1}{m} \geq \frac{4}{\pi^2}\log n \qquad \left(\sum_{1\leq m\leq n}\frac{1}{m}\geq \log n\right.$$

Convergenza delle serie di Fourier

Quando la serie di Fourier di f converge?

E in particolare

1. $f \in C(\mathbb{T}) \Rightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{int}$ puntualmente / uniformemente?

2. $f \in L_2(\mathbb{T}) \Rightarrow$ ______________ in $L_2(\mathbb{T})$?

3. C.S. affinché la sdF di f converga in un punto?

f continua $\not\Rightarrow$ convergenza puntuale

- $f \in L_1(\mathbb{T}) \Rightarrow S^* f(t) = \sup\{|S_n f(t)| : n \geq 0\} \in [0, +\infty]$, $t \in \mathbb{T}$
  ↳ funzione massimale di f.
- $D(f) = \{t \in \mathbb{T} : S^* f(t) = +\infty\}$ insieme di divergenza di f

Oss. Sia $f \in L_p(\mathbb{T})$ $(1 \leq p < +\infty)$ o $f \in C(\mathbb{T})$ e sia

$$E = \{t \in \mathbb{T} : \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{ins} \text{ non converge in } s = t\}.$$

Allora, $\exists\, g \in L_p(\mathbb{T})$ o $g \in C(\mathbb{T})$ t.c. $E = D(g)$ ▨

· $t\in\mathbb{T} \Rightarrow$ $l_n : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$, $l_n f = S_n f(t)$, $f\in C(\mathbb{T})$ funzionale lin

$$|l_n f| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} D_n(t-s) f(s)\, ds \right| \le \|D_n\|_1 \|f\|_u \quad f\in C(\mathbb{T})$$

· $l_n \in [C(\mathbb{T})]^*$ e $\|l_n\| \le \|D_n\|_1$ $\forall n\ge 0$

· Si ha $\|l_n\| = \|D_n\|_1$ $\forall n \ge 0$

(I) – $l_n \in [C(\mathbb{T})]^* = M(\mathbb{T}) \Rightarrow \exists!\, \nu\in M(\mathbb{T}) : \begin{cases} l_n f = \int_{\mathbb{T}} f\, d\nu & f\in C(\mathbb{T}) \\ \|l_n\| = \|\nu\|_{tv} \end{cases}$

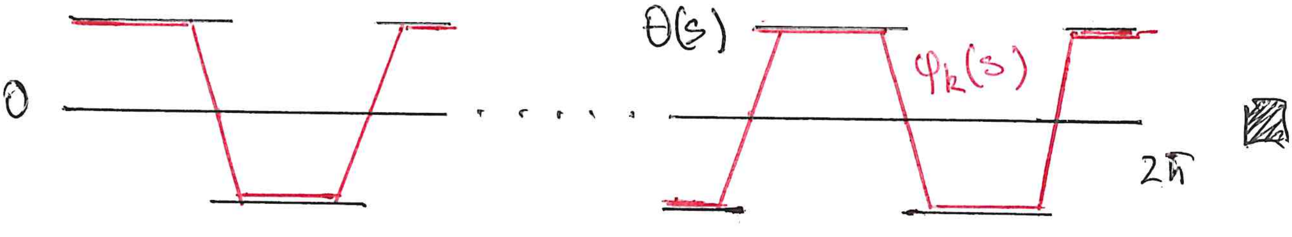
– $\nu = \frac{1}{2\pi}\int D_n(t-s)\, ds \Rightarrow \|l_n\| = \|\nu\|_{tv} = \|D_n\|_1$

(II) – $\theta(s) = \mathrm{sgn}\big(D_n(t-s)\big)$, $s\in\mathbb{T}$ misurabile con $|\theta(s)|\le 1$ $\forall s\in\mathbb{T}$

– Lusin (corollario) $\Rightarrow \exists\, \varphi_k \in C(\mathbb{T})$: $|\varphi_k(s)| \le 1$ $\forall s\in\mathbb{T}$; $\varphi_k \to \theta$ q.o. in $\mathbb{T}$ (*)

– $\|l_n\| \ge |l_n\varphi_k| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} D_n(t-s)\varphi_k(s)\, ds \right| \xrightarrow[\text{CD!}]{} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |D_n(t-s)|\, ds = \|D_n\|_1$ ∎

Oss. (*) In questo caso si può avere $\varphi_k \to \theta$ puntualmente in $\mathbb{T}$.



∎

Teorema: $\forall t\in\mathbb{T}\ \exists\, G_t \in \mathcal{G}_\delta$ denso in $C(\mathbb{T})$: $s^*f(t) = +\infty$ $\forall f\in G_t$

Dim. principio di uniforme limitatezza! ∎

Corollario: $\exists\, G \subset \mathcal{G}_\delta$ denso in $C(\mathbb{T})$ con la seguente proprietà:

$$f \in G \Rightarrow D(f) \in \mathcal{G}_\delta \text{ denso in } \mathbb{T}.$$

Oss. Baire $\Rightarrow$ $D(f)$ non numerabile $\forall f \in G$! ▨

Dim. Sia $\{t_k\}_k$ denso in $\mathbb{T}$

- Baire $\Rightarrow$ $G = \bigcap_k G_{t_k} \in \mathcal{G}_\delta$ denso in $C(\mathbb{T})$
- $f \in G \Rightarrow s^*f(t_k) = +\infty \quad \forall k$
- s^*f s.c.i. $\Rightarrow V_n = \{s^*f > n\}$ aperto $\forall n$
- $f \in G \Rightarrow \{t_k\}_k \subset V_n \ \forall n \Rightarrow V_n$ aperto denso $\forall n$
- $f \in G \Rightarrow D(f) = \bigcap_n V_n \in \mathcal{G}_\delta$ denso in $C(\mathbb{T})$. ▨

Oss. Y. Katznelson - J.P. Kahane (1966)

- $E \subset \mathbb{T}$ e $\mu(E) = 0 \Rightarrow \exists f \in C(\mathbb{T}) : D(f) = E$
- $f \in C(\mathbb{T}) \Rightarrow \mu(D(f)) = 0$ ▨

Oss. Esempi espliciti (non gli unici!)

- P. du Bois Reymond (1876)
- L. Fejér (1911)

$$f(t) = \operatorname{sgn}(t) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}\left((2^{n^3}+1)\,t/2\right),\ t \in \mathbb{T} \Rightarrow s^*f(0) = +\infty$$

Oss. A. Kolmogorov (1923): $\exists f \in L_1(\mathbb{T}) : D(f) = \mathbb{T}$. ▨

Trasformata di Fourier discreta

- $f \in L_1(\mathbb{T}) \Rightarrow$ $\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $\hat{f} = \{\hat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$
  $$|\hat{f}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(s) e^{-ins} ds \right| \leq \|f\|_1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$
- $\hat{f}$ trasformata di Fourier di f

Teorema: $f \in L_1(\mathbb{T}) \Rightarrow \lim_{n\to\pm\infty} \hat{f}(n) = 0$ $(**)$

Oss $(**)$ lemma di Riemann-Lebesgue

Dim

- $f \in L_1(\mathbb{T}), \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, p \in P(\mathbb{T}) : \|p-f\|_1 \leq \varepsilon$
- $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1 : n_0 > gr(p) \Rightarrow \hat{p}(n) = 0 \quad \forall\, |n| \geq n_0$
- $|n| \geq n_0 \Rightarrow |\hat{f}(n)| = |\hat{f}(n) - \hat{p}(n)| \leq |(f-p)^\wedge(n)| \leq \|f-p\|_1 \leq \varepsilon$

$\blacksquare$

Corollario: $f \in L_1(0,2\pi) \Rightarrow$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{sen}(nt)\,dt = 0$$

Oss. idem con $(-\pi,\pi)$ al posto di $(0,2\pi)$! $\blacksquare$

Def. L'operatore lineare
$$\mathcal{F} : f \in L_1(\mathbb{T}) \longmapsto \mathcal{F}f = \hat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$$
si dice trasformata di Fourier (discreta) $\blacksquare$

Teorema: a) $\tilde{\mathcal{F}} \in L(L_1(\mathbb{T}), c_0(\mathbb{Z}))$ con $\|\tilde{\mathcal{F}}\| = 1$;

b) $\tilde{\mathcal{F}}$ iniettiva ma non suriettiva.

Dim

a) $\begin{cases} \|\hat{f}\|_u \le \|f\|_1 \\ \|e_n\|_1 = 1 \text{ e } \|\hat{e}_n\|_u = 1 \quad \forall n \end{cases} \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}} \in L(L_1(\mathbb{T}), c_0(\mathbb{Z}))$ e $\|\tilde{\mathcal{F}}\| = 1$

b) . $f \in L_1(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) p(t)\, dt = 0 \ \forall p \in P(\mathbb{T})$

$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \varphi(t)\, dt = 0 \ \forall \varphi \in C(\mathbb{T})$

. $E \subset \mathbb{T}$ misurabile $\Rightarrow \exists \varphi_k \in C(\mathbb{T})$ $k \ge 1$: $\begin{cases} |\varphi_k(t)| \le 1 & \forall t \in \mathbb{T} \\ \varphi_k \to 1_E & \text{q.o. in } \mathbb{T} \end{cases}$

. $\frac{1}{2\pi} \int_E f(t)\, dt \overset{CD}{=} \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \varphi_k(t)\, dt = 0 \quad \forall E \subset \mathbb{T}$ misurabile

. $f = 0$ in $L_1(\mathbb{T}) \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ iniettivo

. P.A. $\tilde{\mathcal{F}}$ suriettivo su $c_0(\mathbb{Z}) \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}} \in \mathrm{Iso}(L_1(\mathbb{T}), c_0(\mathbb{Z}))$

(Banach-Schauder)

. $\exists c > 0 : \|\hat{f}\|_u \ge c \|f\|_1 \quad \forall f \in L_1(\mathbb{T})$

. $f = D_n$ nucleo di Dirichlet $\Rightarrow \begin{cases} \|\hat{D}_n\|_u = 1 \\ \|D_n\|_1 \ge \frac{4}{\pi^2} \log n \end{cases}$ $\forall n \ge 1$ assurdo!

$\blacksquare$

Serie di Fourier in L_2

- $L_2(\mathbb{T})$ sp. di Hilbert con prodotto scalare

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} [f(t)]^* g(t)\,dt, \qquad f, g \in L_2(\mathbb{T})$$

- $\begin{cases} \{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ s.o.n. in } L_2(\mathbb{T}) \\ \text{span}\{e_n : n\in\mathbb{Z}\} = P(\mathbb{T}) \text{ denso in } L_2(\mathbb{T}) \end{cases} \Rightarrow \{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ s.o.n.c. in $L_2(\mathbb{T})$

1. Riesz-Fischer:

$$\forall \{c_n\}_n \in \ell_2(\mathbb{Z}) \ \exists f \in L_2(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = c_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

2. uguaglianza di Bessel e identità di Parseval:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2\,dt \qquad \forall f \in L_2(\mathbb{T})$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' [\hat{f}(n)]^* \hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} [f(t)]^* g(t)\,dt \qquad \forall f, g \in L_2(\mathbb{T})$$

3. convergenza in L_2:

$$f \in L_2(\mathbb{T}) \Rightarrow \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \hat{f}(n) e^{int} \quad \text{con convergenza in } L_2(\mathbb{T})$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \Big| f(t) - \sum_{|m|\le n}{}' \hat{f}(m) e^{imt}\Big|^2 dt = 0$$

Oss. Congettura di N. Lusin (1915):

$$f \in L_2(\mathbb{T}) \Rightarrow \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \hat{f}(n) e^{int} \quad \text{per q.o. } t \in \mathbb{T}$$

(L. Carleson 1966)

$\blacksquare$

Convergenza puntuale delle serie di Fourier

Teorema : $f \in C^1(\mathbb{T}) \Rightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{int}$, $t \in \mathbb{T}$ convergenza totale in

Oss : $C^1(\mathbb{T}) \equiv C^1_{2\pi}(\mathbb{R})$! ■

Dim.

- per parti $\Rightarrow \hat{f}(n) = \frac{1}{in} (f')^\wedge(n) \quad \forall n \neq 0$
- $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2n^2} + |(f')^\wedge(n)|^2 \quad \forall n \neq 0$
- $f' \in C(\mathbb{T})$ + Bessel $\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{int}$, $t \in \mathbb{T}$ converge totalmente in
- $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{int}$, $t \in \mathbb{T} \Rightarrow g \in C(\mathbb{T})$
- $\hat{g}(n) = \hat{f}(n) \ \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = g$ in $L_1(\mathbb{T})$
- f, g continue $\Rightarrow f = g$ puntualmente ■

Teorema (U. Dini) : Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ t.c.

- f 2π-periodica e integrabile in $[0, 2\pi]$;
- $\exists\, t_0 \in [0, 2\pi]$ e $S \in \mathbb{K}$ t.c.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{t_0-\pi}^{t_0+\pi} \left| \frac{f(t) - S}{t - t_0} \right| dt < +\infty .$$

Allora,

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{int_0}$$

Dim. Possiamo supporre $t_0=0$ e $S=0$

- $$S_n f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(-s) f(s)\,ds =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(s) f(s)\,ds = \qquad (D_n \text{ pari!})$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left((2n+1)s/2\right)}{\operatorname{sen}(s/2)} f(s)\,ds = (*)$$

- $$\frac{\operatorname{sen}\left((2n+1)s/2\right)}{\operatorname{sen}(s/2)} = \frac{\operatorname{sen}(ns + s/2)}{\operatorname{sen}(s/2)} = \cos(ns) + \operatorname{sen}(ns)\frac{\cos(s/2)}{\operatorname{sen}(s/2)} \quad 0<|s|\leq$$

$$(*) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(ns)\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\frac{\cos(s/2)}{\operatorname{sen}(s/2)}\cdot\operatorname{sen}(ns)\,ds =$$
$$= I_1(n) + I_2(n)$$

- f e $s\in[-\pi,\pi] \longmapsto f(s)\dfrac{\cos(s/2)}{\operatorname{sen}(s/2)}$ integrabili in $[-\pi,\pi]$
- RL $\Rightarrow$ $I_j(n) \to 0$ per $n\to+\infty$ $(j=1,2)$
- $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) = 0$.

Corollario 1: Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ t.c.

- f 2π-periodica e integrabile in $[0,2\pi]$;
- f derivabile in $t_0\in[0,2\pi]$.

Allora,
$$f(t_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{int_0}.$$

Corollario 2: Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ t.c.

- f 2π-periodica e integrabile in $[0,2\pi]$;
- $\exists\ 0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_k < 2\pi$ e $M \geq 0$ t.c.
  - f e' derivabile in $[0,2\pi) \setminus \{t_1, \dots, t_k\}$
  - $|f'(t)| \le M \quad \forall t \in [0,2\pi) \setminus \{t_1, \dots, t_k\}$.

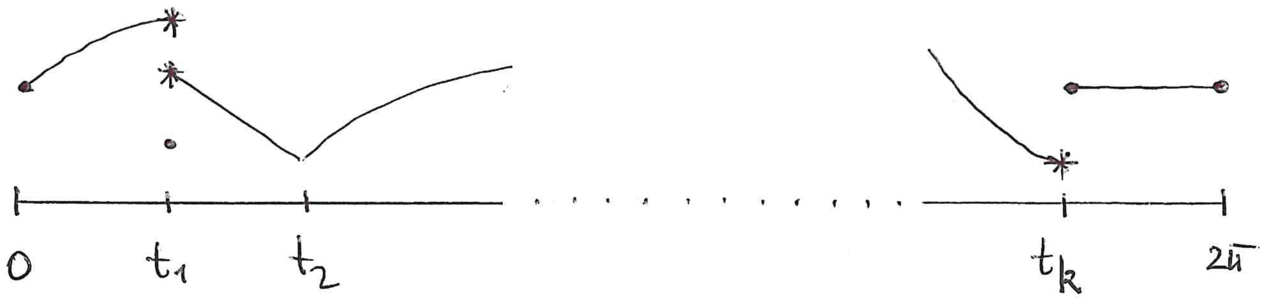
Allora,

a) $\exists\ f(t^{\pm}) = \lim_{s \to 0^{\pm}} f(t+s) \in \mathbb{K} \quad \forall t \in [0,2\pi]$;

b) $$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{int} \quad \forall t \in [0,2\pi].$$

Oss. • $\dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = f(t) \quad \forall t \in [0,2\pi) \setminus \{t_1, \dots, t_k\}$.

• esempio di f in Corollario 2



Dim

a) condizione di Cauchy!

b) i. $t \in [0,2\pi) \setminus \{t_1, \dots, t_k\}$ Corollario 1!

ii. $t \in \{t_1, \dots, t_k\}$

- $h \in \{1, \dots, k\}$ fissato
- $f_\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ 2π-periodica t.c.

$$f_\pm(t) = \begin{cases} f(t) - f(t_h^\pm) & 0 < |t - t_h| \le \pi \\ 0 & t = t_h \end{cases}$$

- $f_\pm$ 2π-periodica e integrabile in $[t_h - \pi, t_h + \pi]$ con

$$\int_{t_h - \pi}^{t_h + \pi} \left| \frac{f_\pm(t)}{t - t_h} \right| dt < +\infty$$

- Dini $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \hat{f}_\pm(n) e^{int_h} = f_\pm(0) = 0$

- $$\hat{f}_\pm(n) = \begin{cases} \hat{f}(0) - f(t_h^\pm) & n = 0 \\ \hat{f}(n) & n \neq 0 \end{cases}$$

- $$\hat{f}(n) = \begin{cases} \hat{f}_\pm(0) + f(t_h^\pm) & n = 0 \\ \hat{f}_\pm(n) & n \neq 0 \end{cases}$$

- $$\sum_{|m| \le n}{}' \hat{f}(m) e^{imt_h} = \frac{1}{2} \left(\sum_{|m| \le n}{}' \hat{f}_+(m) e^{imt_h} + \sum_{|m| \le n}{}' \hat{f}_-(m) e^{imt_h} \right) + \frac{f(t_h^+) + f(t_h^-)}{2}$$

$$\to \frac{f(t_h^+) + f(t_h^-)}{2} \qquad n \to +\infty.$$

■

TOPOLOGIE DEBOLI

TOPOLOGIA DEBOLE E DEBOLE*

X spazio normato su $\mathbb{K}$

τ topologia indotta da $\|\cdot\|$

<u>Obiettivo</u>: costruire una topologia τ_w su X t.

1. τ_w sia compatibile con la struttura algebrica di sp. vettoriale: le operazioni

$$(x,y) \in X \times X \longmapsto x+y \in X$$
$$(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X \longmapsto \lambda x \in X$$

sono continue;

2. τ_w preservi le operazioni lineari continue su X: dato $L : X \to \mathbb{K}$ lineare, risulta

$$L \ \tau_w\text{-continuo} \iff L \ \tau\text{-continuo} \quad (L \in X^*),$$

3. τ_w abbia migliori proprietà di compattezza ($\tau_w \subset \tau$).

<u>Oss.</u> 2 e 3 sono in opposizione! ■

Topologia debole

- X sp. normato su $\mathbb{K}$ con τ topologia normata di X
- X^* duale di X
- poniamo

$$W(x_1^*,\dots,x_n^*;\varepsilon)=\{x\in X: |\langle x_m^*,x\rangle|<\varepsilon \quad m=1,\dots,n\}, \quad x_m^*\in X^* (m=1,\dots,n), \varepsilon>0$$

$$\mathcal{W}_0=\{W(x_1^*,\dots,x_n^*;\varepsilon): x_m^*\in X^* \ m=1,\dots,n, \ n\geq 1 \text{ e } \varepsilon>0\};$$

(*)

$$\mathcal{W}_x = x+\mathcal{W}_0, \quad x\in X;$$

$$\tau_w=\{U\subset X: \forall x\in U \ \exists W\in\mathcal{W}_0 \text{ t.c. } x+W\subset U\}.$$

Teorema: Sia X sp. normato su $\mathbb{K}$ e siano τ_w e $\mathcal{W}_x$ ($x\in X$) definiti da (*). Allora,

a) τ_w e' una topologia di Hausdorff su X t.c. le operazioni

$$(x,y)\in X\times X \longmapsto x+y$$

$$(\lambda,x)\in \mathbb{K}\times X \longmapsto \lambda x$$

sono continue;

b) τ_w e' la topologia generata da

$$\{L^{-1}(V): L\in X^* \text{ e } V\subset\mathbb{K} \text{ aperto}\};$$

c) $\mathcal{W}_x=x+\mathcal{W}_0$ ($x\in X$) e' una base d'intorni aperti di x di τ_w.

Def. Sia X sp. normato su $\mathbb{K}$.

- La topologia τ_w definita da $(*)$ si dice topologia debole di X.
- Si pone $X_w := X$ con la topologia τ_w. ▨

Oss.

- Hahn-Banach $\Rightarrow X_w$ sp. topologico di Hausdorff.
- $\begin{cases} T_a : x \in X \longmapsto x + a \in X & (a \in X) \\ M_\lambda : x \in X \longmapsto \lambda x \in X & (\lambda \neq 0) \end{cases}$ omeomorfismi di X_w in se stesso
- τ_w e' la piu' debole topologia su X per cui tutti gli elementi di X^* sono τ_w-continui e in particolare
  - $\tau_w \subset \tau$
  - $X_w^* = \{ L : X \to \mathbb{K}$ lineare e τ_w-continua $\} \overset{\text{insiemisticamente!}}{=} X^*$. ▨

Notazioni e terminologia

Sia X sp. normato su $\mathbb{K}$. Se P e' una proprietà topologica, w-P e la locuzione debolmente-P denotano la corrispondente proprietà P in X_w.

Ad esempio

- U w-aperto (debolmente aperto) $\equiv$ U aperto in X_w
- F w-chiuso (debolmente chiuso) $\equiv$ F chiuso in X_w
- K w-compatto (debolmente compatto) $\equiv$ K compatto in X_w
- $\{x_k\}_k$ w-convergente (debolmente convergente) $\equiv$ $\{x_k\}_k$ convergente in X_w
- $f : X \to \mathbb{K}$ w-continua (debolmente continua) $\equiv$ $f : X_w \to \mathbb{K}$ continua

e così via. Analogamente si pone

- $cl_w(A) \equiv$ chiusura di A in X_w
- $int_w(A) \equiv$ interno di A in X_w. ▨

Teorema: Sia X sp. normato su $\mathbb{K}$ con $\dim X = +\infty$.

Allora,

a) ogni intorno di 0 in X_w contiene un sottospazio di dimensione infinita

b) X_w non e' metrizzabile

Oss. X sp. normato su $\mathbb{K}$

$$\begin{cases} \dim X = +\infty \\ U \text{ intorno di } 0 \text{ in } X_w \end{cases} \Rightarrow U \text{ illimitato!}$$ ▨

Lemma: Siano X sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ e $L_m \in \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ $m=1,\dots,n$ e $L \in \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ funzionali lineari. Allora

$$L \in \operatorname{span}\{L_1,\dots,L_n\} \iff \ker(L_1)\cap\dots\cap\ker(L_n)\subset\ker(L)$$

Dim.

($\Rightarrow$) Ovvio!

($\Leftarrow$) Supponiamo $L_1,\dots,L_n$ linearmente indipendenti

- $T \in \mathcal{L}(X,\mathbb{K}^{n+1})$ $\quad Tx = (L_1x,\dots,L_nx,Lx)$, $\quad x \in X$
- $(0,\dots,0,1) \notin \operatorname{im}(T) \Rightarrow \operatorname{im}(T) \neq \mathbb{K}^{n+1}$
- $\exists \Lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{n+1},\mathbb{K})$: $\quad \Lambda z = 0 \quad \forall z \in \operatorname{im}(T)$, $\quad \Lambda(0,\dots,0,1) \neq 0$
- $\exists\ \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ non tutti nulli t.c.

$$\Lambda(Tx) = \lambda_1(L_1x)+\dots+\lambda_n(L_nx) - \lambda(Lx) = 0 \quad \forall x \in X$$

- $L_1,\dots,L_n$ linearmente indipendenti $\Rightarrow \lambda \neq 0$
- $Lx = \lambda_1/\lambda\, L_1x + \dots + \lambda_n/\lambda\, L_nx$, $\quad x \in X$

Quindi $L \in \operatorname{span}\{L_1,\dots,L_n\}$. ∎

Dim. a) Sia U intorno di 0 in X_w

- $\exists\, x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ e $\varepsilon > 0$: $W(x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) \subset U$
- $T \in L(X, \mathbb{K}^n)$ $Tx = (\langle x_1^*, x\rangle, \dots, \langle x_n^*, x\rangle)$, $x \in X$
- $\dim X = +\infty \Rightarrow \forall k \geq 1\ \exists\, X_k \subset X$ sottospazio : $\dim(X_k) = k$
- $T_k \in L(X_k, \mathbb{K}^n)$ $T_k = T_{|X_k}$ $\forall k \geq 1$
- $N = \ker(T) \Rightarrow$
  - $\ker(T_k) \subset N$ $\forall k \geq 1$
  - $N \subset W(x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon)$
- $k = \dim(X_k) = \dim(\ker(T_k)) + \dim(\mathrm{im}(T_k)) \leq \dim(N) + n$ $\forall k$
- $\dim(N) \geq k - n$ $\forall k \geq 1 \Rightarrow \dim(N) = +\infty$ e $N \subset W(x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon)$.

b) P.A. sia d metrica su X che induce la topologia τ_w di X_w

- $B_{1/k}(0) = \{x \in X : d(x, 0) < 1/k\}$ $(k \geq 1)$ base di intorni di 0 in X_w
- $k \geq 1 \Rightarrow \exists\, L_k^* \subset X^*$ finito e $\varepsilon > 0$:

$$W_k = \{x \in X : |\langle x^*, x\rangle| < \varepsilon\ \forall x^* \in L_k^*\} \subset B_{1/k}(0)$$

- $L^* = \bigcup_{k \geq 1} L_k^*$ insieme (al più) numerabile

Proviamo che risulta $\mathrm{span}(L^*) = X^*$.

- $x_0^* \in X^* \Rightarrow W = W(x_0^*; 1) = \{x \in X : |\langle x_0^*, x\rangle| < 1\} \in \mathcal{W}_0$
- $\exists\, k \geq 1$: $W_k \subset B_{1/k}(0) \subset W$
- $x \in \bigcap\{\ker(x^*) : x^* \in L_k^*\} \Rightarrow \lambda x \in \bigcap\{\ker(x^*) : x^* \in L_k^*\}$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

- $\lambda x \in \bigcap\{\ker(x^*) : x^* \in L_k^*\}\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \langle x^*, \lambda x\rangle = 0\ \forall x^* \in L_k^*,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$
- $\lambda x \in W_k \subset W\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow |\langle x_0^*, \lambda x\rangle| < 1\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow x \in \ker(x_0^*)$
- $\bigcap\{\ker(x^*) : x^* \in L_k^*\} \subset \ker(x_0^*)$
- lemma $\Rightarrow x_0^* \in \mathrm{span}(L_k^*) \Rightarrow x_0^* \in \mathrm{span}(L^*)$

Essendo $x_0^* \in X^*$ arbitrario, risulta $\mathrm{span}(L^*) = X^*$.

- X^* sp. di Banach + $\begin{cases} \mathrm{span}(L^*) = X^* \\ L^* \text{ (al più) numerabile} \end{cases} \Rightarrow L^*$ finito
- L^* finito $\Rightarrow \dim(X^*) < +\infty \Rightarrow \dim(X^{**}) < +\infty \Rightarrow \dim X < +\infty$ assurdo! ▨

<u>Teorema</u>: Sia X sp. normato su $\mathbb{K}$. Allora,

$$X = X_w \iff \dim X < +\infty.$$

<u>Dim</u>.

($\Rightarrow$) $B_1(0) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ intorno di 0 in X_w limitato $\Rightarrow \dim X < +\infty$

($\Leftarrow$) Siano τ e τ_w le topologie di X (normata) e X_w (debole).

- $\begin{cases} \{e_1, \dots, e_n\} \text{ base di } X \text{ con } \|e_m\| = 1 \quad m = 1, \dots, n \\ \{e^1, \dots, e^n\} \text{ base duale} \end{cases}$
- $W(e^1, \dots, e^n; \varepsilon/n) = \{x \in X : |\langle e^m, x\rangle| < \varepsilon/n \quad m = 1, \dots, n\} =$
$$= \{x = \lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^n e_n \in X : |\lambda^m| < \varepsilon/n \quad m = 1, \dots, n\}$$
- $x \in W(e^1, \dots, e^n; \varepsilon/n)$ e $x = \lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^n e_n \Rightarrow \|x\| \le |\lambda^1| + \dots + |\lambda^n| < \varepsilon$
- $W(e^1, \dots, e^n; \varepsilon/n) \subset B_\varepsilon(0) = \{x \in X : \|x\| < \varepsilon\}\ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \tau \subset \tau_w$ ▨

Oss. X sp. normato su $\mathbb{K}$ con $\dim X = +\infty$

$$\Downarrow$$

τ_w strettamente più debole di τ. ▨

Esempio: X sp. normato su $\mathbb{K}$ con $\dim X = +\infty$

$$S = \{x \in X : \|x\| = 1\} \Rightarrow cl_w(S) = B = \{x \in X : \|x\| \le 1\}.$$

- Si ha $B = \bigcap_{\|x^*\|=1} \{x \in X : |\langle x^*, x\rangle| \le 1\}$
  - $B \subset \bigcap_{\|x^*\|=1} \{x \in X : |\langle x^*, x\rangle| \le 1\}$
  - $x_0 \in X$ con $\|x_0\| > 1 \overset{HB}{\Rightarrow} \exists x_0^* \in X^* : \|x_0^*\| = 1$ e $\langle x_0^*, x_0\rangle = \|x_0\|$
  - $B^c \subset \bigcup_{\|x^*\|=1} \{x \in X : |\langle x^*, x\rangle| > 1\} \Rightarrow \bigcap_{\|x^*\|=1} \{x \in X : |\langle x^*, x\rangle| \le 1\} \subset B$
- $\{x \in X : |\langle x^*, x\rangle| \le 1\}$ w-chiuso $\forall x^* \Rightarrow B$ w-chiuso
- $S \subset B$ e B w-chiuso $\Rightarrow cl_w(S) \subset B$

Proviamo che

$$\begin{cases} x_0 \in X \text{ con } \|x_0\| < 1 \\ W = W(x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) \in \mathcal{W}_0 \end{cases} \Rightarrow (x_0 + W) \cap S \neq \emptyset$$

- $N = \ker(x_1^*) \cap \dots \cap \ker(x_n^*)$ sottosp. (chiuso) : $N \subset W$
- teorema $\Rightarrow \dim(N) = +\infty \Rightarrow \exists\, y_0 \in N$ con $y_0 \neq 0$
- $\varphi(t) = \|x_0 + t y_0\|$, $t \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi$ continua e $\varphi(0) = \|x_0\| < 1$, $\varphi(t) \ge t\|y_0\| - \|x_0\|$, $t \ge 0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$
- $\exists\, t_0 > 0 : \varphi(t_0) = 1 \Rightarrow x_0 + t_0 y_0 \in S$
- $x_0 + t_0 y_0 \in x_0 + N \subset x_0 + W \Rightarrow x_0 + t_0 y_0 \in (x_0 + W) \cap S$. ▨

Successioni debolmente convergenti

Siano X sp. normato su $\mathbb{K}$ e $x_k \in X$ $(k \geq 1)$, $x \in X$.
Scriviamo

$$x_k \rightharpoonup x \quad \text{in } X_w \text{ per } k \to +\infty$$

per denotare la convergenza debole in X.

Proprietà: $x_k \in X$ $(k \geq 1)$ e $x \in X$

a) $x_k \rightharpoonup x$ in X_w per $k \to +\infty \iff \lim_{k\to+\infty} \langle x^*, x_k \rangle = \langle x^*, x \rangle \quad \forall x^* \in X'$

b) $x_k \to x$ in X per $k \to +\infty \Rightarrow x_k \rightharpoonup x$ in X_w per $k \to +\infty$.

Oss. In (b) $\Leftarrow$ FALSO (in genere) se $\dim X = +\infty$

a) H sp. di Hilbert separabile ($\dim H = +\infty$) e $\{u_n\}_n$ s.o.n.c. di

- $u_n \rightharpoonup 0$ debolmente in H per $n \to +\infty$
- $\|u_n\| = 1 \quad \forall n$

b) $e_k \in c_0 \qquad e_k(h) = \begin{cases} 1 & h = k \\ 0 & h \neq k \end{cases} \quad (k \geq 1)$

- $c_0^* \equiv \ell_1 \Rightarrow \langle y^*, e_k \rangle = y^*(k) \to 0$ per $k \to +\infty \quad \forall y^* \in \ell_1$
- $e_k \rightharpoonup 0$ debolmente in c_0 per $k \to +\infty$
- $\|e_k\| = 1 \quad \forall k \geq 1$

■

Oss. La norma

$$x \in X_w \longmapsto \|x\| \in [0, +\infty)$$

non è sequenzialmente debolmente continua (in genere)

■

Teorema: Siano X sp. normato su $\mathbb{K}$ e $x_k \in X$ $(k \geq 1)$
Allora

$\{x_k\}_k$ debolm. convergente $\Rightarrow \exists M \geq 0 : \|x_k\| \leq M \ \forall k \geq 1$.

Dim. Banach-Steinhaus in X^{**} ! ▨

Teorema (B. Mazur): Siano X sp. normato su $\mathbb{K}$ e $E \subset X$ convesso. Allora,

$$cl_w(E) = cl(E).$$

Oss.

- E convesso $\Rightarrow$ [E debolm. chiuso $\Leftrightarrow$ E chiuso]
- se E non e' convesso si ha solo

$$cl(E) \subset cl_w(E)$$

e le due chiusure possono essere diverse $(cl_w(S) = B\,!)$ ▨

Dim. Appunti ! ▨

Corollario: Sia X sp. normato su $\mathbb{K}$ e siano $x_k \in X$ $(k \geq 1)$ e $x \in X$ t.c.

$$x_k \to x \text{ in } X_w \text{ per } k \to +\infty.$$

Allora, $\exists\, y_j \in X$ $(j \geq 1)$ t.c.

- $y_j \in co\{x_k : k \geq 1\} \quad \forall j$
- $y_j \longrightarrow x$ in X per $j \longrightarrow +\infty$.

<u>Esempio</u>: Siano K sp. topol. di Hausdorff compatto (CH) e $f_k \in C(K)$ $(k \geq 1)$, $f \in C(K)$ funzioni continue t.c.

- $f_k \to f$ puntualmente in K per $k \to +\infty$;
- $\sup_{k \geq 1} \|f_k\|_u < +\infty$.

Allora, $\exists$ $k_{j,m} \in \mathbb{N}_+$ e $\lambda_{j,m} \in [0,1]$ $m = 1, \dots, n_j$ t.c.

$$\lambda_{j,1} + \dots + \lambda_{j,n_j} = 1 \quad \forall j$$

$$\lim_{j \to +\infty} \left(\lambda_{j,1} f_{k_{j,1}} + \dots + \lambda_{j,n_j} f_{k_{j,n_j}} \right) = f \text{ uniform. in } K$$

In particolare, posto

$$f_k(x) = x^k(1 - x^k), \quad x \in [0,1] \qquad (k \geq 1),$$

esiste una successione di combinazioni convesse delle funzioni f_k che converge a zero uniformemente in $[0,1]$!

- $f_k \to f$ debolmente in $C(K)$ per $k \to +\infty$ (vedere + avanti)
- $E = co\{f_k : k \geq 1\}$ e $f \in cl_w(E)$ ∎

Topologia debole*

- X sp. normato su $\mathbb{K}$
- X^* duale di X con τ^* topologia normata di X^*
- poniamo

$W(x_1,\dots,x_n;\varepsilon)=\{x^*\in X^*: |\langle x^*,x_m\rangle|<\varepsilon \ m=1,\dots,n\}$, $x_m\in X$ $(m=1,\dots,n)$, ε

$\mathcal{W}_0=\{W(x_1,\dots,x_n;\varepsilon): x_m\in X \ m=1,\dots,n, \ n\geq 1 \text{ e } \varepsilon>0\}$;

(**) $\mathcal{W}_{x^*}=x^*+\mathcal{W}_0, \quad x^*\in X^*$;

$\tau^*_{w^*}=\{U\subset X^*: \forall x^*\in U \ \exists W\in\mathcal{W}_0 : x^*+W\subset U\}$.

<u>Teorema</u>: Sia X sp. normato su $\mathbb{K}$ con duale X^* e siano $\tau^*_{w^*}$ e $\mathcal{W}_{x^*}$ $(x^*\in X^*)$ definiti da (**). Allora,

a) $\tau^*_{w^*}$ e' una topologia di Hausdorff su X^* t.c. le operazioni algebriche

$$(x^*,y^*)\in X^*\times X^*\longmapsto x^*+y^*$$
$$(\lambda,x^*)\in \mathbb{K}\times X^*\longmapsto \lambda x^*$$

sono continue;

b) $\tau^*_{w^*}$ e' la topologia generata da

$$\{(Jx)^{-1}(V): x\in X \text{ e } V\subset\mathbb{K} \text{ aperto}\};$$

c) $\mathcal{W}_{x^*}=x^*+\mathcal{W}_0$ $(x^*\in X^*)$ e' una base d'intorni aperti di x^* di $\tau^*_{w^*}$.

Def. Sia X sp. normato su $\mathbb{K}$ con duale X^*.

- La topologia $\tau^*_{w^*}$ definita da $(**)$ si dice topologia debole* di X^*.
- Si pone $X^*_{w^*} := X^*$ con la topologia $\tau^*_{w^*}$. ■

Oss.

- $\begin{cases} T_{a^*} : x^* \in X^* \longmapsto x^* + a^* \in X^* \quad (a^* \in X^*) \\ M_\lambda : x^* \in X^* \longmapsto \lambda x^* \in X^* \quad (\lambda \neq 0) \end{cases}$ omeomorfismi di $X^*_{w^*}$ su se stesso
- $\tau^*_{w^*}$ e' la piu' debole topologia su X^* per cui tutti gli elementi di $J(X) \subset X^{**}$ sono $\tau^*_{w^*}$ continui e in particolare
  - $\tau^*_{w^*} \subset \tau^*$
  - $(X^*_{w^*})^* = \{L : X^*_{w^*} \to \mathbb{K} \text{ lineare e } \tau^*_{w^*}\text{-continuo}\} \overset{\text{insiemisticamente}}{=} J(X)$ ■

Notazioni e terminologia

Come per la topologia debole, se P e' una proprieta' topologica, w^*-P e la locuzione debolmente* P denotano la corrispondente proprieta' P in $X^*_{w^*}$. ■

Teorema: Sia X sp. normato su $\mathbb{K}$ con $\dim X = +\infty$.

Allora,

a) ogni intorno di 0 in $X^*_{w^*}$ contiene un sottospazio di dimensione infinita;

b) X sp. di Banach $\Rightarrow$ $X^*_{w^*}$ non metrizzabile

Dim. a) Si ha

$$\dim X = +\infty \Rightarrow \dim X^* = +\infty$$

e poi si procede come per la topologia debole.

b) Si ripete la dimostrazione fatta per la topologia debole (serve X sp. di Banach per usare il teorema di Baire). $\blacksquare$

Oss. $X^*_{w^*}$ può essere metrizzabile con $\dim X = +\infty$ se X non è sp. di Banach.

- $X = \{ x \in l_2 : x(n) = 0 \text{ definitivamente} \}$ $\quad (X = c_c)$
- $X^* = l_2$ (si usa la densità di X in l_2)
- si ha $\tau^*_{w^*} = X^* \cap \tau_p$ ove τ_p è la topologia prodotto di

$$\prod_{n \in \mathbb{N}_+} \mathbb{K}_n \qquad (\mathbb{K}_n = \mathbb{K})$$

che è metrizzabile $\blacksquare$

Successioni debolmente* convergenti

Sia X sp. normato su $\mathbb{K}$ con duale X^* e siano $x_k^* \in X^*$ $(k \geq 1)$ e $x^* \in X^*$. Scriviamo

$$x_k^* \xrightarrow{*} x^* \text{ in } X^*_{w*} \text{ per } k \to +\infty$$

per denotare la convergenza debole* in X^*.

Proprietà: $x_k^* \in X^*$ $(k \geq 1)$ e $x^* \in X^*$

a) $x_k^* \xrightarrow{*} x^*$ in X^*_{w*} per $k \to +\infty \iff \lim_{k \to +\infty} \langle x_k^*, x \rangle = \langle x^*, x \rangle \ \forall x \in X$

b) $x_k^* \to x^*$ in X^* per $k \to +\infty \Rightarrow x_k^* \xrightarrow{*} x^*$ in X^*_{w*} per $k \to +\infty$

Oss.

- Siano $x_k^* \in X^*$ $(k \geq 1)$ e $x^* \in X^*$

  $x_k^* \xrightarrow{*} x^*$ debolmente* per $k \to +\infty \iff x_k^* \to x^*$ puntualmente in X per $k \to +\infty$

- In (b) $\Leftarrow$ FALSO (in genere) se $\dim X = +\infty$. ▨

Esempio: Siano $e_n(t) = e^{int}$, $t \in \mathbb{T}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

- $e_n \in L_\infty(\mathbb{T})$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ e $[L_1(\mathbb{T})]^* \equiv L_\infty(\mathbb{T})$.
- RL $\Rightarrow \hat{f}(-n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{int} dt \to 0$ per $|n| \to +\infty$ $\forall f \in L_1(\mathbb{T})$

Quindi $e_n \xrightarrow{*} 0$ debolmente* in $L_\infty(\mathbb{T})$ per $|n| \to +\infty$

Analogamente,

$e_n \to 0$ debolmente in $L_p(\mathbb{T})$ $(1 \leq p < +\infty)$ per $|n| \to +\infty$. ▨

<u>Teorema</u>: Siano X sp. di Banach su $\mathbb{K}$ con duale X^* e $x_k^* \in X^*$ $(k \geq 1)$. Allora

$\{x_k^*\}_k$ debolmente* convergente $\Rightarrow \exists M \geq 0 : \|x_k^*\| \leq M \ \forall k \geq 1$.

<u>Dim.</u> Banach-Steinhaus in X^*! ▨

<u>Oss.</u> FALSO se X e' sp. normato non completo!

- H sp. di Hilbert separabile con $\dim H = +\infty$
- $\{u_n\}_{n \geq 1}$ s.o.n.c. di H
- $X = \operatorname{span}\{u_n : n \geq 1\}$ sottospazio denso (non chiuso)
- $L_n x = \langle n u_n | x \rangle$, $x \in X$ $(n \geq 1)$ $\Rightarrow$ $L_n \in X^*$ e $\|L_n\| = n \ \forall n$
- $x \in X \Rightarrow L_n x = \langle n u_n | x \rangle = 0$ definitiv. $\hookrightarrow$ X denso in H!
- $L_n \xrightarrow{*} 0$ debolmente* in X^* per $n \to +\infty$. ▨

<u>Oss.</u> Se X non e' riflessivo, in X^*_{w*} non vale il teorema di Mazur: $\exists H \subset X^*$ chiuso in X^* e convesso che non e' debolmente* chiuso.

- X sp. normato non riflessivo $\Rightarrow \exists x^{**} \in X^{**} \setminus J(X)$
- $H = \ker(x^{**}) = \{x^* \in X^* : \langle x^{**}, x^* \rangle = 0\}$ chiuso in X^* e convesso
- P.A. H debolmente* chiuso $\Rightarrow x^{**}$ continuo in X^*_{w*}

$\Rightarrow x^{**} \in (X^*_{w*})^* = J(X)$

assurdo! ▨

Spazi di Banach riflessivi e topologie deboli

X sp. normato su $\mathbb{K}$ con duale X^* e biduale X^{**}

- τ_w topologia debole di X $\qquad X_w = (X, \tau_w)$
- $\tau^*_{w^*}$ topologia debole* di X^* $\qquad X^*_{w^*} := (X^*, \tau^*_{w^*})$
- τ^*_w topologia debole di X^* $\qquad X^*_w := (X^*, \tau^*_w)$
- $\tau^{**}_{w^*}$ topologia debole* di X^{**} $\qquad X^{**}_{w^*} := (X^{**}, \tau^{**}_{w^*})$

X	X^*	X^{**}
τ	τ^*	τ^{**}
τ_w	$\tau^*_{w^*}$ e τ^*_w	$\tau^{**}_{w^*}$
X_w	$X^*_{w^*}$ e X^*_w	$X^{**}_{w^*}$

<u>Teorema</u>: Sia X sp. normato su $\mathbb{K}$ con duale X^* e biduale X^{**} e siano

$$B = \{x \in X : \|x\| \le 1\} \quad e \quad B^{**} = \{x^{**} \in X^{**} : \|x^{**}\| \le 1\}.$$

Allora,

a) $\tau^*_{w^*} \subset \tau^*_w$ e risulta $[\tau^*_{w^*} = \tau^*_w \iff X \text{ riflessivo}]$;

b) $J : X \to X^{**}$ omeomorfismo di X_w su $J(X)$ con la topologia indotta da $X^{**}_{w^*}$;

c) $J(B)$ denso in $X^{**}_{w^*}$.

Oss.

- (b) $\Rightarrow \begin{cases} X^*_w \hookrightarrow X^*_{w^*} \\ X^*_w = X^*_{w^*} \iff X \text{ riflessivo} \end{cases}$

- (c) teorema di Goldstine. ■

Dim

a) - $J(X) \subset X^{**} \Rightarrow \tau^*_{w^*} \subset \tau^*_w$

- X riflessivo $\Rightarrow J(X) = X^{**} \Rightarrow \tau^*_{w^*} = \tau^*_w$

- X non riflessivo $\Rightarrow J(X) \neq X^{**} \Rightarrow \exists H$ come in ....

  - H chiuso in X^* e convesso $\xRightarrow{\text{Mazur}}$ H chiuso in X^*_w

  - H non chiuso in $X^*_{w^*}$

Quindi, se X non è riflessivo si ha $\tau^*_{w^*} \neq \tau^*_w$.

b) - Le basi d'intorni di 0 in X_w e $X^{**}_{w^*}$ sono date d

$$\left.\begin{array}{l} W = \{x \in X : |\langle x^*_m, x\rangle| < \varepsilon \quad m = 1, \dots, n\} \\ W^{**} = \{x^{**} \in X^{**} : |\langle x^{**}, x^*_m\rangle| < \varepsilon \quad m = 1, \dots, n\} \end{array}\right\} \quad x^*_1, \dots, x^*_n \in X^*, \ \varepsilon > 0$$

- W e W^{**} come sopra $\Rightarrow J(x + W) = (Jx + W^{**}) \cap J(X)$

c) Appunti! ■

Convergenza debole in $C(K)$.

Teorema: Sia K CH e siano $f_n \in C(K)$ $(n \geq 1)$ e $f \in C(K)$

Sono equivalenti

a) $f_n \to f$ debolmente in $C(K)$ per $n \to +\infty$;

b) $\begin{cases} f_n \to f \text{ puntualmente in } K \text{ per } n \to +\infty \\ \exists M \geq 0 : \|f_n\|_u \leq M \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$

Dim. (a) $\Rightarrow$ (b)

- $[C(K)]^* \equiv \mathcal{M}(K)$ (misure reali/complesse di Radon in K)
- $\delta_x \in \mathcal{M}(K)$ $\forall x \in K$
- $f_n(x) = \int_K f_n \, d\delta_x \longrightarrow \int_K f \, d\delta_x = f(x)$ per $n \to +\infty$ $\forall x \in K$
- $\{f_n\}_n$ debolm. convergente in $C(K) \Rightarrow \{f_n\}_n$ limitata in $C(K)$.

(b) $\Rightarrow$ (a)

- CD ! ∎

Oss. In (b) $\Rightarrow$ (a) $f \in C(K)$ e' un'ipotesi! ∎

<u>Problema</u>: che relazione c'è tra convergenza debole e convergenza puntuale in $C(K)$?

- K CH e $\begin{cases} X = C(K) \\ X^* = [C(K)]^* \equiv \mathcal{M}(K) \end{cases}$

- τ_p topologia della convergenza puntuale in K ristretta a $C($

$V(f_0; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) = \{f \in C(K) : |f(x_m) - f_0(x_m)| < \varepsilon \ m = 1, \dots, n\}$, $x_1, \dots, x_n \in K$ ε

$\mathcal{V}_{f_0} = \{ (f_0; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) : x_1, \dots, x_n \in K, n \geq 1 \ e \ \varepsilon > 0\}$ base d'intorni di $f_0 \in C($

- τ_w topologia debole di $C(K)$

$W(\mu_1, \dots, \mu_n; \varepsilon > 0) = \{f \in C(K) : |\int_K f d\mu_m| < \varepsilon \ m = 1, \dots, n\}$, $\mu_m \in \mathcal{M}(K)$ $m = 1, \dots, n$, $\varepsilon >$

$W_{f_0} = \{f_0 + W(\mu_1, \dots, \mu_n) : \mu_m \in \mathcal{M}(K) \ m = 1, \dots, n, \ n \geq 1 \ e \ \varepsilon > 0\}$

base d'intorni di $f_0 \in C(K)$

- $\mu_m = \delta_{x_m}$ con $x_m \in K$ $(m = 1, \dots, n)$ e $\varepsilon > 0$

$$V(f_0; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) = f_0 + W(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}; \varepsilon)$$

Quindi si ha

$$\mathcal{V}(f_0) \subset W_{f_0}, \quad \forall f_0 \in C(K).$$

<u>Teorema</u>: Sia K CH e siano

- τ_p topologia della convergenza puntuale in K ristretta a $C(K)$
- τ_w topologia debole di $C(K)$.

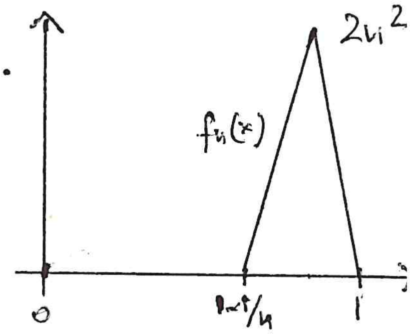
Allora, $\tau_p \subset \tau_w$.

Oss.

- Alternativamente: per ogni successione generalizzata $f_i \in C(K)$ $i \in I$ e $f \in C(K)$ tali che
$$f_i \rightharpoonup f \text{ debolmente in } C(K) \text{ per } i \in I$$
si ha
$$\lim_{i \in I} f_i(x) = \lim_{i \in I} \int_K f_i \, d\delta_x = \int_K f \, d\delta_x = f(x), \quad \forall x \in X.$$

- $\tau_w \neq \tau_p$ in genere! ■

Esempio: $\tau_w \neq \tau_p$ in $C([0,1])$.



- $K = [0,1]$ e $f_n \in C([0,1])$ $n \geq 1$
- $L \in [C([0,1])]^*$ $Lf = \int_0^1 f$, $f \in C(K)$ $\Rightarrow$ $\|L\| = 1$
- $f_n \longrightarrow 0$ puntualmente in $[0,1]$ per $n \to +\infty$ e $Lf_n = n$ $\forall n \geq$

■

Convergenza debole in L_p

$(X, \mathcal{S}, \mu)$ sp. con misura positiva

Teorema: Siano $1 < p < +\infty$ e $f_n \in L_p(\mu)$ $(n \geq 1)$ e $f \in L(\mu)$ t.c.

- $f_n \to f$ μ-q.o. in X per $n \to +\infty$;
- $\exists\ C \geq 0$: $\|f_n\|_p \leq C$ $\forall n \geq 1$.

Allora, $f \in L_p(\mu)$ e $f_n \to f$ in w-$L_p(\mu)$ per $n \to +\infty$.

Dim.

- Fatou $\Rightarrow \int_X |f|^p d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X |f_n|^p d\mu \leq C \Rightarrow f \in L_p(\mu)$ e $\|f\|_p \leq C$
- $g \in L_q(\mu)$, $g \neq 0$ e $\varepsilon > 0$ fissati ($1 < q < +\infty$ esponente coniugato di p)
- $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\left[E \in \mathcal{S}, \mu(E) \leq \delta \Rightarrow 2C\left(\int_E |g|^q d\mu\right)^{1/q} \leq \varepsilon/3\right]$
- $\exists\ F \in \mathcal{S}$: $\mu(F) < +\infty$ e $2C\left(\int_{X\setminus F} |g|^q d\mu\right)^{1/q} \leq \varepsilon/3$
- SE $\Rightarrow \exists\ E_\varepsilon \in \mathcal{S}$: $\begin{cases} E_\varepsilon \subset F \text{ e } \mu(F \setminus E_\varepsilon) \leq \delta \\ f_n \to f \ \mu\text{-quasi uniformemente in } E_\varepsilon \text{ per } n \to +\infty \end{cases}$ (***)
- $\exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$: $\left[n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \left(\mu(E_\varepsilon)\right)^{1/p} \|g\|_q \leq \varepsilon/3 \text{ per } \mu\text{-q.o. } x \in E_\varepsilon\right]$
- $n \geq n_0 \Rightarrow \int_{E_\varepsilon} |f_n - f|^p d\mu \leq \left(\frac{\varepsilon}{3\|g\|_q}\right)^p$
- per $n \geq n_0$ si ha allora

$$\left|\int_X f_n g\, d\mu - \int_X f g\, d\mu\right| \leq \left|\int_{E_\varepsilon} (f_n - f) g\, d\mu\right| + \left|\int_{F\setminus E_\varepsilon} (f_n - f) g\, d\mu\right| + \left|\int_{X\setminus F} (f_n - f) g\, d\mu\right| \leq$$

$$\leq \left(\int_{E_\varepsilon}|f_n-f|^p d\mu\right)^{1/p}\|g\|_q + \left(\|f_n\|_p+\|f\|_p\right)\left(\int_{F\setminus E_\varepsilon}|g|^q d\mu\right)^{1/q} + \left(\|f_n\|_p+\|f\|_p\right)\left(\int_{X\setminus F}|g|^q d\mu\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3\|g\|_q}\cdot\|g\|_q + 2C\left(\int_{F\setminus E}|g|^q d\mu\right)^{1/q} + 2C\left(\int_{X\setminus F}|g|^q d\mu\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$ ▨

Oss. (***) significa che

$\inf\{t>0 : \mu(\{|f_n-f|>t\}\cap E_\varepsilon)=0\} \longrightarrow 0 \quad n\to+\infty.$ ▨

Oss. (1) FALSO per $p=1$!

- $f_n \in L_1([0,1]) \quad f_n(x) = \begin{cases} n & 0\leq x<1/n \\ 0 & 1/n\leq x\leq 1 \end{cases} \quad (n\geq 1)$
- $f_n \to 0$ q.o. in $[0,1]$ e $\|f_n\|_1 = 1 \ \forall n\geq 1$
- $g=1$ in $L_\infty([0,1]) \Rightarrow \int_0^1 f_n g = \int_0^1 f_n = 1 \quad \forall n\geq 1$

NB $f_n \in L_p([0,1]) \ \forall n\geq 1 \ (1<p<+\infty)$ ma $\sup_{n\geq 1}\|f_n\|_p = +\infty$!

(2) Siano $f_n\in L_p(\mu)$ $(n\geq 1)$ e $f\in L_p(\mu)$ $1\leq p<+\infty$. In generale,

$f_n \to f$ in w-$L_p(\mu) \not\Rightarrow f_n\to f$ μ-q.o. in X.

- $e_n \in L_p(\mathbb{T}) \quad n\in\mathbb{Z} \quad (1\leq p<+\infty)$
- RL $\Rightarrow e_n \to 0$ in w-$L_p(\mathbb{T})$ per $|n|\to+\infty \quad (1\leq p<+\infty)$
- $\|e_n\|_p = 1 \quad \forall n\in\mathbb{Z} \quad (1\leq p<+\infty)$
- P.A. $e_n\to 0$ q.o. in $\mathbb{T}$ per $|n|\to+\infty \overset{CD}{\Rightarrow} e_n\to 0$ in $L_p(\mathbb{T})$ per $|n|\to+\infty$ $(1\leq p<+\infty)$ ▨

Nel teorema precedente, se si sostituisce l'ipotesi che la successione $\{f_n\}_n$ sia limitata in $L_p(\mu)$ con l'ipotesi che sia $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ per $n \to +\infty$, si ottiene convergenza in norma.

<u>Teorema</u>: Siano $1 \leq p < +\infty$ e $f_n \in L_p(\mu)$ $(n \geq 1)$ e $f \in L_p(\mu)$ t.c.

- $f_n \to f$ μ-quasi ovunque in X per $n \to +\infty$;
- $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ per $n \to +\infty$.

Allora, $f_n \to f$ in $L_p(\mu)$ per $n \to +\infty$.

<u>Dim</u>. Fatou con

$$g_n = 2^{p-1}(|f_n| + |f|) - |f_n - f|^p, \qquad n \geq 1$$

come in CD! ▨

COMPATTEZZA DEBOLE E DEBOLE*

Compattezza debole*

Teorema (S. Banach - L. Alaoglu): Sia X sp. normato su $\mathbb{K}$. Allora,

$$B^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$$

e' debolmente* compatto in X^*.

Dim.

- $P = \prod_{x \in X} \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|x\|\}$ $\quad$ $P = \prod_{x \in X} [-\|x\|, \|x\|]$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad$ $P = \prod_{x \in X} B_{\|x\|}[0]$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
- τ_p topologia prodotto di P
- Tikhonov $\Rightarrow$ P CH
- $[f \in P \Leftrightarrow f : X \to \mathbb{K}$ e $|f(x)| \leq \|x\| \ \forall x] \Rightarrow B^* = P \cap X^*$
- $B^* = P \cap X^*$ eredita due topologie
  - τ^*_{w*} da X^*_{w*}
  - τ_p da P

Proviamo che

1. B^* chiuso in τ_p
2. $B^* \cap \tau^*_{w*} = B^* \cap \tau_p$

① $\Rightarrow$ B^* compatto in τ_p e ② $\Rightarrow$ B^* compatto in τ^*_{w*}

① Proviamo che

$$f_0 \in P \text{ e } f_0 \in cl_{\tau_p}(B^*) \Rightarrow f_0 \in B^*.$$

- $\varepsilon > 0$ e $x_i \in X$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $i = 1, 2$
- $W_\varepsilon = \{ f \in P : |f(y) - f_0(y)| < \varepsilon \quad y \in \{x_1, x_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\} \}$
- W_ε intorno di f_0 in τ_p $\Rightarrow \exists x_\varepsilon^* \in B^* : x_\varepsilon^* \in W_\varepsilon$
- $x_\varepsilon^* \in B^* \cap W_\varepsilon \Rightarrow |\langle x_\varepsilon^*, y\rangle - f_0(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in \{x_1, x_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\}$
- $f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - [\lambda_1 f_0(x_1) + \lambda_2 f_0(x_2)] =$

$$= [f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \langle x_\varepsilon^*, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\rangle| +$$

$$+ \lambda_1 [\langle x_\varepsilon^*, x_1\rangle - f_0(x_1)] + \lambda_2 [\langle x_\varepsilon^*, x_2\rangle - f_0(x_2)]$$

- $|f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - [\lambda_1 f_0(x_1) + \lambda_2 f_0(x_2)]| \le (1 + |\lambda_1| + |\lambda_2|)\varepsilon$
- $\varepsilon > 0$ arbitrario $\Rightarrow$ f_0 lineare
- f_0 lineare e $f_0 \in P \Rightarrow f_0 \in B^*$

② Proviamo che $B^* \cap \tau^*_{w^*} = B^* \cap \tau_p$

- $x_0^* \in B^*$
- $\mathcal{W}_{x_0^*} = \{ W(x_0^*; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) : x_1, \dots, x_n \in X \text{ e } \varepsilon > 0 \}$ ove

$$W(x_0^*; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) = \{ x^* \in X^* : |\langle x^*, x_m\rangle - \langle x_0^*, x_m\rangle| < \varepsilon \quad m = 1, \dots, n \}$$

- $\mathcal{V}_{x_0^*} = \{ V(x_0^*; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) : x_1, \dots, x_n \in X \text{ e } \varepsilon > 0 \}$ ove

$$V(x_0^*; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) = \{ f \in P : |f(x_m) - \langle x_0^*, x_m\rangle| < \varepsilon \quad m = 1, \dots, n \}$$

- $B^* \cap W(x_0^*; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) = B^* \cap V(x_0^*; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) \quad \forall x_1, \dots, x_n \in X \text{ e } \varepsilon > 0.$ ▨

<u>Problema</u>: $\begin{cases} X \text{ sp. di Banach} \\ \dim X = +\infty \end{cases} \Rightarrow X^*_{w^*}$ <u>non</u> metrizzabile

Quindi non e' detto che una successione di B^* abbia una sottosuccessione convergente!

<u>Esempio</u>: Sia I ins. infinito e non numerabile. Allora

- $l_\infty(I) \equiv [l_1(I)]^*$ (anche se # non e' σ-finita)
- la palla

$$B^* = \{ y \in l_\infty : \|y\|_\infty \leq 1 \}$$

e' debolmente* compatta (BA!) ma non e' debolmente* sequenzialmente compatta.

Appunti! ▨

<u>Teorema</u>: Sia X sp. normato su $\mathbb{K}$ separabile. Allora, la topologia debole* di

$$B^* = \{ x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1 \}$$

e' metrizzabile.

<u>Oss.</u> Il teorema <u>non</u> dice che $X^*_{w^*}$ e' metrizzabile ma solo che lo e' B^* con la topologia indotta da $X^*_{w^*}$. ▨

Oss. Siano $X_1 = (X, \tau_1)$ e $X_2 = (X, \tau_2)$ sp. topologici t.c.

- X_1 di Hausdorff e X_2 compatto;
- $\tau_1 \subset \tau_2$.

Allora, $X_1 = X_2$.

$\left\{ \begin{array}{l} id_X : X_2 \longrightarrow X_1 \text{ continua e biettiva} \\ X_2 \text{ compatto e } X_1 \text{ di Hausdorff} \end{array} \right. \Rightarrow id_X$ omeomorfismo di X_2 su X_1

■

Lemma di metrizzabilità: Siano

- X sp. topologico compatto;
- $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ continue;
- $\{f_n\}_n$ separante per i punti di X.

Allora, X è metrizzabile.

Dim. Possiamo supporre $|f_n(x)| \leq 1$ $\forall x \in X$ e $n \geq 1$.

- $d(x,y) = \sum_{n \geq 1}' \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)|$, $x, y \in X$ metrica
- $X_d := (X, d)$ sp. metrico
- convergenza totale $\Rightarrow$ $(x,y) \in X \times X \longmapsto d(x,y) \in \mathbb{R}$ continua
- $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ $\exists\, U, V$ intorni aperti di x_0 t.c. $[x \in U, y \in V \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon$
- $x \in V \Rightarrow d(x_0, x) < \varepsilon \Rightarrow V \subset B_\varepsilon(x_0)$
- $\forall x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ $\exists\, V$ intorno aperto di x_0 t.c. $V \subset B_\varepsilon(x_0)$
- $id_X : X \longrightarrow X_d$ continua $\overset{\text{Lemma}}{\overset{*}{\Longrightarrow}}$ $X = X_d$. ■

Dim. (Teorema)

- X separabile $\Rightarrow \exists \{x_n\}_n$ denso in X
- $f_n : B^* \to \mathbb{K}$ $\quad f_n(x^*) = \langle x^*, x_n \rangle$, $x^* \in B^*$ $\quad n \geq 1$
- $f_n : B^* \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ debolmente* continue per definizion
- $x_1^*, x_2^* \in B^*$ e $x_1^* \neq x_2^* \Rightarrow x^* = x_1^* - x_2^* \neq 0$
- $x^* \neq 0 \Rightarrow \exists\, x \in X : \langle x^*, x \rangle \neq 0$
- $\{x_n\}_n$ denso in $X \Rightarrow \exists\, n \geq 1 : \langle x^*, x_n \rangle \neq 0 \Rightarrow f_n(x_1^*) \neq f_n(x_2^*)$
- lemma $\Rightarrow \tau^*_{w^*} \cap B^*$ metrizzabile. ▨

Corollario: Sia X sp. normato su $\mathbb{K}$ separabile. Allora, ogni successione limitata in X^* ha una sottosuccessione debolmente* convergente.

Oss. FALSO (in genere) se X non e' separabile (esempio: B^* di $l_\infty(I)$ con I non numerabile). ▨

Esempi:

a) $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto e $\begin{cases} C_0(U) & \text{sp. di Banach separabile} \\ \mathcal{M}(U) & \text{duale di } C_0(U) \end{cases}$ (misure di Radon reali/compl. in U)

- $\mu_n \in \mathcal{M}(U)$ $n \geq 1$: $\sup_{n \geq 1} \|\mu_n\|_{tv} < +\infty$
- $\exists\, \mu_{n_k}$ $(k \geq 1)$ sottosuccessione e $\mu \in \mathcal{M}(U)$ t.c.

$$\int_U g\, d\mu_{n_k} \to \int_U g\, d\mu \quad \forall g \in C_0(U)$$

- caso particolare: $f_n \in L_1(U)$ $n \geq 1$ con $\sup_{n\geq 1} \|f_n\|_1 < +\infty$

$$\int_U f_{n_k} g \longrightarrow \int_U fg \qquad \forall g \in C_0(U).$$

b) $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile e $\begin{cases} L_1(E) \text{ sp. di Banach separabile} \\ L_\infty(E) \text{ duale di } L_1(E) \end{cases}$

- $f_n \in L_\infty(E)$ $(n \geq 1)$: $\sup_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty < +\infty$
- $\exists$ f_{n_k} $(k \geq 1)$ sottosuccessione e $f \in L_\infty(E)$ t.c.

$$\int_E f_{n_k} g \longrightarrow \int_E fg \quad \forall g \in L_1(E).$$

■

Compattezza debole

La topologia debole non ha le stesse buone proprieta' di compattezza della topologia debole*.

Esempio:

$B = \{x \in c_0 : |x(m)| \leq 1 \ \forall m\}$ non e' debolmente compatta in c_0.

- $HB \Rightarrow B = \bigcap_{\|x^*\|=1} \{x \in c_0 : |\langle x^*, x\rangle| \leq 1\}$ (esempio....)
- B debolmente chiuso in c_0
- $e_n(m) = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$ e $s_n = e_1 + \dots + e_n \quad n \geq 1 \Rightarrow s_n \in c_0 \ \forall n \geq 1$

P.A. sia B debolmente compatta in c_0. Allora, $\exists\, s \in B$ con la seguente proprieta':

$\forall\, W$ intorno debole di 0 in c_0 e $\forall m \geq 1 \ \exists\, n \geq m : s_n \in s + W$

- $W = W(e_j; \varepsilon) \ (\varepsilon > 0, j \geq 1) \Rightarrow \operatorname{card}\{n : |\langle e_j, s_n - s\rangle| < \varepsilon\} = +\infty$
- $\forall j \geq 1 \ \exists \{s_{n_k}\}_k$ sottosuccessione (dipendente da j!) t.c.

$$\lim_{k \to +\infty} s_{n_k}(j) = \lim_{k \to +\infty} \langle e_j, s_{n_k}\rangle = \langle e_j, s\rangle = s(j)$$

- $\forall j \geq 1 \ \exists\, k_0 = k_0(j) \geq 1 : [k \geq k_0 \Rightarrow n_k \geq j] \Rightarrow s(j) = 1 \ \forall j$
- $s(j) = 1 \ \forall j \Rightarrow s \notin c_0$ assurdo! ∎

Oss. Analogamente $B = \{x \in l_1 : \|x\|_1 \leq 1\}$ non e' debolm. compatta in l_1. ∎

Teorema (S. Kakutani): Sia X sp. di Banach su $\mathbb{K}$ e sia

$$B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

la palla unitaria di X. Allora,

B debolmente compatta $\Leftrightarrow$ X riflessivo.

Dim. $\Rightarrow$

- $J: X_w \to X^{**}_{w*}$ omeomorfismo di X_w su $J(X)$ con la topologia indotta da X^{**}_{w*}
- B compatta in X_w $\Rightarrow$ $J(B)$ compatta in X^{**}_{w*}
- Goldstine $\Rightarrow$ $J(B)$ denso in $B^{**} = \{x^{**} \in X^{**} : \|x^{**}\| \leq 1\}$ nella topologia indotta da X^{**}_{w*}
- $J(B) = B^{**}$ $\Rightarrow$ X riflessivo

$\Leftarrow$

- Banach-Alaoglu $\Rightarrow$ B^{**} compatta in X^{**}_{w*}
- X riflessivo $\Rightarrow$ $J(B) = B^{**}$
- $J: X_w \to X^{**}_{w*}$ omeomorfismo di X_w su X^{**}_{w*} $\Rightarrow$ B compatta in X

$\blacksquare$

Teorema: Siano X sp. normato su $\mathbb{K}$ separabile e $K \subset X$ insieme debolmente compatto. Allora, la topologia debole di K e' metrizzabile.

Dim.

- X separabile $\Rightarrow \exists \{x_n\}_{\forall n}$ (al più) numerabile e denso in $S = \{x \in X : \|x\| =$
- HB $\Rightarrow \forall n \geq 1 \ \exists x_n^* \in X^* : \|x_n^*\| = 1$ e $\langle x_n^*, x_n \rangle = \|x_n\| = 1$
- $x \in S \Rightarrow \exists n \geq 1 : \|x_n - x\| \leq 1/2$
- $|\langle x_n^*, x \rangle| \geq |\langle x_n^*, x_n \rangle| - |\langle x_n^*, x_n - x \rangle| \geq 1 - 1/2 = 1/2$
- $x \in S \Rightarrow \exists n \geq 1 : \langle x_n^*, x \rangle \neq 0$
- stesso per $x \in X$, $x \neq 0$ per linearita'
- $f_n(x) = \langle x_n^*, x \rangle$, $x \in X$ $(n \geq 1)$ continue e separano i punti di X
- lemma $\Rightarrow \tau_{w} \cap K$ metrizzabile. ▨

Corollario: Sia X sp. di Banach su $\mathbb{K}$ separabile e riflessivo. Allora, ogni successione limitata in X ha una sottosuccessione debolmente convergente.

Esempio:

a) $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile e $1 < p < +\infty$

$f_n \in L_p(E)$ $n \geq 1$: $\sup_{n \geq 1} \|f_n\|_p < +\infty \Rightarrow \exists \{f_{n_k}\}_k$ e $f \in L_p(E)$: $f_{n_k} \rightharpoonup f$ debolm. in $L_p(E)$

b) H sp. di Hilbert separabile

$x_n \in H$ $n \geq 1$: $\sup_{n \geq 1} \|x_n\| < +\infty \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}_k$ e $x \in H$: $x_{n_k} \rightharpoonup x$ debolm. in H. ▨

Oss.

Vero per X sp. di Banach riflessivo anche non separabile (teorema di Eberlein-Šmulian). ▨