APPUNTI DI ANALISI MATEMATICA 3

Analisi funzionale

Pietro Celada

Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche
Università degli Studi di Parma

A.A. 2021–2022

Indice

CAPITOLO 1

Spazi normati

L'analisi funzionale lineare generalizza al caso di spazi vettoriali di dimensione infinita alcune delle familiari idee e tecniche dell'algebra lineare classica e, abbinata alla nozione di spazio funzionale in cui le funzioni sono considerate come elementi di uno spazio vettoriale astratto, fornisce un quadro generale e al contempo potente in cui numerosi problemi di analisi possono essere convenientemente affrontati da un punto di vista unitario. In questo capitolo ne presentiamo i risultati principali nel quadro teorico degli spazi di Banach e delle operazioni lineari tra di essi. I risultati che presenteremo ruotano essenzialmente attorno al ruolo della convessità con il teorema di Hahn–Banach e attorno al ruolo della completezza con il principio di uniforme limitatezza e il teorema dell'applicazione aperta di Banach–Schauder.
In tutto questo capitolo conveniamo di denotare con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ il campo dei numeri reali o complessi.

1.1. Spazi normati e operatori lineari

Introduciamo in questa sezione la nozione di spazio normato e di operatore lineare limitato tra spazi normati come generalizzazione degli spazi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ muniti della norma euclidea e degli operatori lineari tra di essi.

Norme e spazi normati. Sia X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Una funzione $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

(N1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall\, x \in X$; (omogeneità)

(N3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in X$; (subadditività)

si dice *norma su* X e il numero $\|x\|$ si dice *norma del vettore* x.
Da (N1), (N2) e (N3) si ricava che deve essere

$$\|x\| \ge 0, \qquad x \in X.$$

La disuguaglianza (N3) prende il nome di *disuguaglianza triangolare*. Da (N2) e (N3) risulta anche

$$\big|\|x\| - |y\|\big| \le \|x - y\|, \qquad x, y \in X.$$

La norma $\|x\|$ ha il significato di lunghezza del vettore $x \in X$.

Definizione 1.1. Uno spazio vettoriale X sul campo $\mathbb{K}$ munito di una norma $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ si dice *spazio normato sul campo* $\mathbb{K}$ e si denota con $(X, \|\cdot\|)$. □

Nel seguito scriveremo brevemente X in luogo di $(X, \|\cdot\|)$ quando non sia necessario evidenziare la norma $\|\cdot\|$ su X e, quando necessario, parleremo di spazio normato reale o complesso a seconda che sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Esempio 1.2. Esaminiamo alcuni esempi di spazi normati. Alcuni di questi esempi sono già comparsi nei capitoli precedenti come esempi di spazi metrici.

(a) Le funzioni $\|\cdot\|_p \colon \mathbb{K}^N \to [0,+\infty)$ $(1 \le p \le +\infty)$ definite per ogni vettore $x = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{K}^N$ ponendo

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \Bigg(\sum_{1\le n\le N} |x^n|^p\Bigg)^{1/p} && 1 \le p < +\infty; \\ \|x\|_\infty &= \max_{1\le n\le N} |x^n| && p = +\infty; \end{aligned}$$

sono norme su $\mathbb{K}^N$. In particolare, la disuguaglianza triangolare è conseguenza della disuguaglianza di Minkowski per $1 < p < +\infty$ ed è ovvia per $p = +\infty$.
Per $p = 2$ si ritrova la norma euclidea di $\mathbb{K}^N$ che continuiamo a denotare con con $\|\cdot\|$ in luogo di $\|\cdot\|_2$ e per $p = 1$ e $p = +\infty$ si ritrovano la norma della somma e la norma del massimo in $\mathbb{K}^N$.

(b) Una successione $x = \{x_n\}_n$ di elementi di $\mathbb{K}$ si dice p – *sommabile* $(1 \le p < +\infty)$ se risulta

$$\sum_n |x_n|^p < +\infty.$$

Gli spazi vettoriali ℓ_p $(1 \le p \le +\infty)$ formati dalle successioni $x = \{x_n\}_{n\ge1}$ $p-$sommabili $(1 \le p < +\infty)$ o limitate $(p = +\infty)$ di elementi di $\mathbb{K}$ sono spazi normati sul campo $\mathbb{K}$ con le norme definite da

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \Bigg(\sum_{n\ge1} |x_n|^p\Bigg)^{1/p} && x = \{x_n\}_{n\ge1} \in \ell_p && (1 \le p < +\infty); \\ \|x\|_\infty &= \sup_{n\ge1} |x_n| && x = \{x_n\}_{n\ge1} \in \ell_\infty && (p = +\infty); \end{aligned}$$

rispettivamente. Anche in questo caso la disuguaglianza triangolare è conseguenza della disuguaglianza di Minkowski per $1 < p < +\infty$ ed è ovvia per $p = +\infty$.

(c) Gli spazi vettoriali

$$\begin{aligned} c_\infty &= \big\{x = \{x_n\}_n : \exists\, x_\infty \in \mathbb{K} \text{ tale che } x_n \to x_\infty \text{ per } n \to +\infty\big\}; \\ c_0 &= \big\{x = \{x_n\}_n : x_n \to 0 \text{ per } n \to +\infty\big\}; \\ c_{\mathrm{c}} &= \big\{x = \{x_n\}_n : x_n = 0 \text{ definitivamente}\big\}; \end{aligned}$$

formati dalle successioni rispettivamente convergenti, infinitesime e definitivamente nulle di elementi di $\mathbb{K}$ sono spazi normati sul campo $\mathbb{K}$ con la norma

$$\|x\|_u = \sup_n |x_n|,$$

per ogni $x = \{x_n\}_n$ in c_∞ o c_0 o c_{c}. Questa norma si dice *norma della convergenza uniforme.*

(d) Sia Ω un insieme (non vuoto). Lo spazio vettoriale

$$B(\Omega) = \big\{f \colon \Omega \to \mathbb{K} \text{ limitata}\big\}$$

delle funzioni definite su Ω a valori in $\mathbb{K}$ limitate è uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ con la norma

$$\|f\|_{\Omega,u} = \sup\big\{|f(\omega)| : \omega \in \Omega\big\}, \qquad f \in B(\Omega).$$

Anche questa norma si dice *norma dell'estremo superiore* o *norma della convergenza uniforme in* Ω ed è consuetudine scrivere brevemente $\|\cdot\|_u$ in luogo di $\|\cdot\|_{\Omega,u}$ quando non è necessario evidenziare l'insieme Ω.
Risulta evidentemente $B(\mathbb{N}_+) = \ell_\infty$ e ne denotiamo la norma indifferentemente con $\|\cdot\|_u$ o $\|\cdot\|_\infty$.

(e) Sia $\mathcal{S}$ una $\sigma-$algebra di insiemi di un insieme astratto X. Lo spazio vettoriale $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ delle misure reali o complesse su $\mathcal{S}$ è uno spazio normato reale o complesso con le norme definite per ogni $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ da

$$\|\mu\|_{\text{sv}} = |\mu|_{\text{sv}}(X) \qquad \text{e} \qquad \|\mu\|_{\text{tv}} = |\mu|_{\text{tv}}(X).$$

Queste norme prendono rispettivamente il nome di *norma della semivariazione* e *norma della variazione totale.*

Analogamente, se X è uno spazio di Hausdorff localmente compatto, lo spazio vettoriale $\mathcal{M}(X)$ delle misure di Radon reali o complesse in X è uno spazio normato con le medesime norme.

(f) Lo spazio vettoriale $C([a\,,b])$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ formato dalle funzioni $f\colon [a\,,b] \to \mathbb{K}$ continue è uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ con la norma dell'estremo superiore

$$\|f\|_{[a,b],u} = \sup\left\{|f(t)| :\ t \in [a\,,b]\right\}, \qquad u \in C([a\,,b]).$$

(g) Lo spazio vettoriale $C^k([a\,,b])$ $(-\infty < a < b < +\infty$ e $k \geq 1)$ formato dalle funzioni $f\colon [a\,,b] \to \mathbb{K}$ che sono $k-$volte derivabili con continuità nell'intervallo $[a\,,b]$ è uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ con la norma

$$\|f\|_{[a,b],k,u} = \sum_{0 \leq h \leq k} \|f^{(h)}\|_{[a,b],u}, \qquad f \in C^k([a\,,b]).$$

Questa norma si dice *norma dell'estremo superiore della funzione e delle sue derivate.* $\square$

Se X è uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ con norma $\|\cdot\|$, la funzione

$$d(x\,,y) = \|x - y\|, \qquad x\,,y \in X,$$

è una metrica su X che si dice *indotta* dalla norma. Ogni spazio normato è canonicamente uno spazio metrico con la metrica indotta dalla norma e negli spazi normati è quindi possibile parlare di insiemi aperti, chiusi, limitati, di successioni convergenti e di successioni di Cauchy, di funzioni continue e limiti e così via. Se X è uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ con norma $\|\cdot\|$, in accordo con le notazioni già introdotte per gli spazi metrici, denotiamo con

$$\begin{aligned} B_r(x_0) &= \{x \in X :\ \|x - x_0\| < r\} \\ B_r[x_0] &= \{x \in X :\ \|x - x_0\| \leq r\} \end{aligned} \qquad (x_0 \in X \text{ e } r > 0)$$

la palla aperta e la palla chiusa in X di centro $x_0 \in X$ e raggio $r > 0$.

Se $\{x_n\}_n$ e $\{y_n\}_n$ sono successioni di vettori di X convergenti a $x\,,y \in X$ rispettivamente e se $\{\lambda_n\}_n$ è una successione di scalari di $\mathbb{K}$ convergente a $\lambda \in \mathbb{K}$ risulta

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = x + y \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n x_n = \lambda x.$$

Abbiamo così provato la continuità delle operazioni di spazio vettoriale. Riassumiamo questo risultato e le sue conseguenze nella proposizione seguente.

Proposizione 1.3. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$. Allora,*

(a) *l'addizione e la moltiplicazione per gli scalari*

$$\begin{gathered} (x\,,y) \in X \times X \mapsto x + y \in X \\ (\lambda\,,x) \in \mathbb{K} \times X \mapsto \lambda x \in X \end{gathered}$$

sono continue nelle topologie prodotto di $X \times X$ e $\mathbb{K} \times X$;

(b) *le traslazioni e le omotetie definite da*

$$\begin{aligned} T_a x &= x + a, \qquad && x \in X \quad (a \in X); \\ M_\lambda x &= \lambda x, && x \in X \quad (\lambda \in \mathbb{K} \text{ } e \text{ } \lambda \neq 0); \end{aligned}$$

sono omeomorfismi di X su se stesso;

(c) $Y \subset X$ *sottospazio vettoriale* $\implies$ $\mathrm{cl}(Y)$ *sottospazio vettoriale.*

Definizione 1.4. Uno spazio normato $(X\,, \|\cdot\|)$ sul campo $\mathbb{K}$ che sia completo nella metrica indotta dalla norma si dice *spazio di Banach* sul campo $\mathbb{K}$. □

Anche per gli spazi di Banach scriveremo brevemente X in luogo di $(X\,, \|\cdot\|)$ quando non sia necessario evidenziare la norma $\|\cdot\|$ su X e, quando necessario, parleremo di spazio di Banach reale o complesso a seconda che sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Se X è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, due norme $\|\cdot\|_i$ $(i = 1, 2)$ si dicono *equivalenti* se le metriche d_i da esse indotte sono equivalenti. Ciò accade se risulta

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1, \qquad x \in X,$$

per $c_2 \geq c_1 > 0$ opportuni. In tal caso, le due norme determinano la stessa uniformità e la stessa topologia su X e i due spazi normati $(X\,, \|\cdot\|_i)$ $(i = 1, 2)$ si dicono *equivalenti.*

Esempio 1.5. Sia $\mathcal{S}$ una $\sigma-$algebra di insiemi di un insieme astratto X. Le norme della semivarizione e della variazione totale sono norme equivalenti che rendono lo spazio vettoriale $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ delle misure reali o complesse su $\mathcal{S}$ uno spazio di Banach reale o complesso (Teorema II–4.6). Lo stesso vale per le norme della semivariazione e della variazione totale relativamente allo spazio vettoriale

$$\mathcal{M}(X) = \big\{\mu\colon \mathcal{B}(X) \to \mathbb{K} \text{ misura di Radon in } X\big\}$$

delle misure di Radon reali o complesse su uno spazio di Hausdorff localmente compatto X (Teorema II–4.15). □

Concludiamo questa parte osservando che in uno spazio normato X è possibile definire la nozione di serie di vettori di X in completa analogia con quanto si fa per le serie numeriche. Siano infatti $x_n \in X$ $(n \geq 1)$ gli elementi di una successione di vettori di X. I vettori s_n $(n \geq 1)$ definiti ricorsivamente da

$$\begin{cases} s_1 = x_1 \\ s_{n+1} = s_n + x_{n+1} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

sono le *somme parziali di* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ e la successione delle somme parziali $\{s_n\}_{n\geq 1}$ si chiama *serie associata alla successione* $\{x_n\}_n$ e si denota come al solito con uno dei seguenti simboli

$$\sum_{n\geq 1} x_n \qquad \text{o} \qquad \sum_n x_n$$

a seconda che sia necessario oppure no evidenziare il termine da cui parte la successione. Se la successione delle somme parziali $\{s_n\}_n$ converge, la serie si dice *convergente* e il vettore $x \in X$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = x$$

si dice *somma della serie* e si scrive con abuso di notazione

$$\sum_{n\geq 1} x_n = x.$$

Riassumiamo nei due risultati seguenti le principali proprietà delle serie di vettori in spazi normati omettendo le ovvie dimostrazioni.

Proposizione 1.6. *Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una successione di vettori tale che la serie*

$$\sum_{n\geq 1} x_n$$

converga. Allora,

(a) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che*

$$n \geq m \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leq \varepsilon;$$

(b) $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$

La condizione (a) è l'usuale condizione di Cauchy che risulta essere anche condizione sufficiente per la convergenza della serie quando X è uno spazio di Banach.

Proposizione 1.7. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e siano $\{x_n\}_{n\geq 1}$ e $\{y_n\}_{n\geq 1}$ due successioni di vettori tali che le serie*

$$\sum_{n\geq 1} x_n \qquad e \qquad \sum_{n\geq 1} y_n$$

convergano. Allora, le serie associate alle successioni $\{x_n + y_n\}_{n\geq 1}$ e $\{\lambda x_n\}_{n\geq 1}$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) convergono e risulta

$$\sum_{n\geq 1}(x_n + y_n) = \sum_{n\geq 1} x_n + \sum_{n\geq 1} y_n \qquad e \qquad \sum_{n\geq 1} \lambda x_n = \lambda \sum_{n\geq 1} x_n.$$

La completezza negli spazi normati si caratterizza in termini di serie convergenti nella maniera seguente.

Teorema 1.8. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *X è uno spazio di Banach;*

(b) *per ogni successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ di X si ha*

$$\sum_{n\geq 1} \|x_n\| < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n\geq 1} x_n \text{ converge.}$$

In accordo con la terminologia in uso per le serie numeriche, una serie di vettori $\{x_n\}_{n\geq 1}$ di X tali che

$$\sum_{n\geq 1} \|x_n\| < +\infty$$

si dice *assolutamente convergente* e la tesi del teorema si riformula nel modo seguente: uno spazio normato è completo se e solo se ogni serie assolutamente convergente è convergente.

Dimostrazione. Basta provare che (b) implica (a), essendo l'altra implicazione ovvia.
Sia $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una successione di Cauchy di X e sia n_k ($k \geq 1$) una successione strettamente crescente di interi positivi tali che risulti

$$\|x_n - x_{n_k}\| \leq 1/2^k, \qquad n \geq n_k,$$

per ogni $k \geq 1$. Posto $x_{n_0} = 0$ e $y_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}}$ per $k \geq 1$, risulta

$$\sum_{k\geq 1} \|y_k\| \leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k} + \|x_{n_1}\| < +\infty$$

e quindi la serie di termine generale y_k converge con somma $x \in X$. Da

$$\sum_{1 \le h \le k} y_h = x_{n_k}, \qquad k \ge 1,$$

segue che la successione $\{x_n\}_{n\ge1}$ ha una sottosuccessione convergente ad x cosicché, essendo di Cauchy, converge ad x. □

Algebre normate. Un'algebra X sul campo $\mathbb{K}$ munita di una norma $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ tale che

$$\|xy\| \le \|x\|\|y\|, \qquad x, y \in X,$$

si dice *algebra normata sul campo* $\mathbb{K}$. Se inoltre X risulta essere uno spazio di Banach rispetto alla norma $\|\cdot\|$, l'algebra X si dice *algebra di Banach*.
Se X è un'algebra normata sul campo $\mathbb{K}$ con norma $\|\cdot\|$, la moltiplicazione

$$(x, y) \in X \times X \mapsto xy \in X$$

è continua nella topologia prodotto di $X \times X$ e ciò implica, come per i sottospazi degli spazi normati, che

$$\mathcal{A} \subset X \text{ sottoalgebra} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{cl}(\mathcal{A}) \text{ sottoalgebra.}$$

Inoltre, se X è un'algebra normata munita di un'unità u, risulta $\|u\| \ge 1$ ed è sempre possibile definire una norma $|||\cdot|||$ equivalente a $\|\cdot\|$ tale che risulti $|||u||| = 1$ (Esercizio 1.3). In conseguenza di ciò, se X è un'algebra normata sul campo $\mathbb{K}$ con norma $\|\cdot\|$ munita di un'unità u, supporremo sempre nel seguito che risulti

$$\|u\| = 1.$$

Il principale esempio di algebra normata sul campo $\mathbb{K}$ è costituito dall'algebra

$$B(\Omega) = \big\{ f: \Omega \to \mathbb{K} \text{ limitata} \big\}$$

delle funzioni limitate definite su un insieme Ω (non vuoto) a valori in $\mathbb{K}$ con la norma della convergenza uniforme:

$$\|f\|_u = \sup \big\{ |f(\omega)| : \omega \in \Omega \big\}, \qquad f \in B(\Omega),$$

(Esempio 1.2 − (d)) che risulta essere un'algebra di Banach commutativa con unità sul campo $\mathbb{K}$. L'unità u di $B(\Omega)$ è ovviamente la funzione costante uguale a 1 su Ω.

Teorema 1.9. *Sia Ω un insieme (non vuoto). Allora, $B(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_u$ è un'algebra di Banach commutativa con unità sul campo $\mathbb{K}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga alla dimostrazione di Teorema II–4.6 ed è sufficiente provare la completezza di $B(\Omega)$, essendo le altre affermazioni ovvie. Siano $f_n \in B(\Omega)$ $(n \ge 1)$ gli elementi di una successione di Cauchy: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 = n_0(\varepsilon) \ge 1$ tale che risulti

$$(*) \qquad n, m \ge n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|f_n - f_m\|_u \le \varepsilon.$$

Per ogni $\omega \in \Omega$ fissato si ha allora

$$n, m \ge n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n(\omega) - f_m(\omega)| \le \varepsilon$$

e quindi anche la successione $\{f_n(\omega)\}_n$ verifica la condizione di Cauchy in $\mathbb{K}$ e dunque converge. Sia quindi $f: \Omega \to \mathbb{K}$ la funzione definita da

$$f(\omega) = \lim_{n\to+\infty} f_n(\omega), \qquad \omega \in \Omega.$$

e proviamo che essa è limitata e quindi appartiene a $B(\Omega)$. Scegliendo infatti $n_0 = n_0(\varepsilon) \ge 1$ corrispondente a $\varepsilon = 1$ e $m = n_0$, per $(*)$ risulta

$$|f_n(\omega)| \le |f_{n_0}(\omega)| + |f_{n_0}(\omega) - f_n(\omega)| \le \|f_{n_0}\|_u + \|f_{n_0} - f_n\|_u \le \|f_{n_0}\|_u + 1$$

per ogni $n \geq n_0$ e per ogni $\omega \in \Omega$ da cui segue, passando al limite per $n \to +\infty$, che f è limitata su Ω.
Resta infine da provare che risulta $f_n \to f$ per $n \to +\infty$ in $B(\Omega)$. A tale scopo, fissato $\varepsilon > 0$, sia $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ ad esso associato da $(*)$ cosicché risulta

$$|f_n(\omega) - f_m(\omega)| \leq \varepsilon, \qquad \omega \in \Omega,$$

per ogni $n, m \geq n_0$. Facendo quindi tendere $n \to +\infty$ risulta

$$|f_n(\omega) - f(\omega)| \leq \varepsilon, \qquad \omega \in \Omega,$$

da cui segue $\|f_n - f\|_u \leq \varepsilon$ per $n \geq n_0$. Quindi, $f_n \to f$ in $B(\Omega)$ per $n \to +\infty$ e questo completa la dimostrazione. □

Operatori lineari limitati. Denotiamo in questa parte con X e Y due spazi normati sullo stesso campo $\mathbb{K}$ e denotiamo per semplicità le relative norme con lo stesso simbolo $\|\cdot\|$.

Definizione 1.10. Un operatore lineare $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tale che

$$\sup\big\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\big\} < +\infty$$

si dice *limitato*. □

Gli operatori lineari limitati tra due spazi normati X e Y sul medesimo campo $\mathbb{K}$ sono dunque le applicazioni lineari che mandano i vettori della palla unitaria di X in un insieme limitato di Y e per omogeneità lo stesso accade per qualunque insieme limitato di X. Questa definizione di limitatezza di un operatore lineare si discosta quindi dall'usuale definizione di funzione limitata a valori in uno spazio metrico che corrisponde a chiedere che l'immagina del dominio sia limitata. In tal senso, nessuna funzione lineare a parte la funzione nulla potrebbe essere limitata. La convenzione universalmente in uso prevede che gli operatori lineari siano limitati secondo questa definizione.

Esempio 1.11. (a) Sia c_∞ lo spazio normato delle successioni reali o complesse aventi limite all'infinito con la norma della convergenza uniforme (Esempio 1.2 – (c)). Il funzionale lineare $L\colon c_\infty \to \mathbb{K}$ definito da

$$Lx = \lim_{n\to+\infty} x_n, \qquad x = \{x_n\}_n \in c_\infty,$$

è limitato poiché si ha

$$|Lx| = \left|\lim_{n\to+\infty} x_n\right| \leq \sup_n |x_n| \leq \|x\|_u \leq 1$$

per ogni successione $x = \{x_n\}_n \in c_\infty$ con $\|x\|_u \leq 1$.
(b) Sia c_c lo spazio normato delle successioni reali o complesse definitivamente nulle con la norma della convergenza uniforme (Esempio 1.2 – (c)). Il funzionale lineare $L\colon c_c \to \mathbb{K}$ definito da

$$Lx = \sum_n n x_n, \qquad x = \{x_n\}_n \in c_c,$$

non è limitato. Scegliendo infatti le successioni $e_k = \{e_{k,n}\}_{n\geq 1}$ $(k \geq 1)$ definite da

$$e_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}$$

si ha $\|e_k\|_u = 1$ e $|Le_k| = k$ per ogni k.
(c) Sia X uno spazio di Banach con dimensione infinita e sia $\{x_i : i \in I\}$ una base (di Hamel) di X (Teorema I–6 in Preliminari) che possiamo supporre formata da vettori x_i con $\|x_i\| = 1$ per ogni i. Essendo I infinito, esso contiene un insieme

numerabile $\{i_n : n \geq 1\}$ e il funzionale lineare $L\colon X \to \mathbb{K}$ definito sugli elementi della base $\{x_i\}_i$ da

$$Lx_i = \begin{cases} n & \text{se } i = i_n \\ 0 & \text{se } i \neq i_n \end{cases}$$

non è limitato. □

Sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operatore lineare limitato e sia $\|T\|$ il numero non negativo definito da

$$\|T\| = \sup\left\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\right\}.$$

Per ogni $x \in X$, $x \neq 0$, il vettore $x/\|x\|$ ha norma unitaria e quindi si ha

$$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|T\|, \qquad x \in X \quad (x \neq 0).$$

Da ciò segue

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|, \qquad x \in X,$$

che vale anche per $x = 0$. Viceversa, se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ è un operatore lineare tale risulti

$$\|Tx\| \leq C\|x\|, \qquad x \in X,$$

per qualche $C \geq 0$, allora T è limitato e risulta $\|T\| \leq C$.

Denotiamo con

$$\mathrm{B}(X, Y) = \left\{T \in \mathcal{L}(X, Y) : T \text{ limitato}\right\}$$

l'insieme degli operatori lineari limitati da X in Y e conveniamo di scrivere per brevità $\mathrm{B}(X) = \mathrm{B}(X, X)$ quando $Y = X$[1]. È facile verificare che $\mathrm{B}(X, Y)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}(X, Y)$ e che

$$\|T\| = \sup\left\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\right\}, \qquad T \in \mathrm{B}(X, Y),$$

è una norma su $\mathrm{B}(X, Y)$ che prende il nome di *norma degli operatori*. Pertanto, lo spazio vettoriale $\mathrm{B}(X, Y)$ degli operatori lineari limitati tra due spazi normati X e Y sul campo $\mathbb{K}$ è a sua volta uno spazio normato sullo stesso campo rispetto alla norma degli operatori. Inoltre, con la stessa dimostrazione di Teorema 1.9 si prova che esso è anche completo.

Teorema 1.12. *Siano X uno spazio normato e Y uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$. Allora,* $\mathrm{B}(X, Y)$ *con la norma degli operatori è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Siano $T_n \in \mathrm{B}(X, Y)$ $(n \geq 1)$ gli elementi di una successione di Cauchy: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che risulti

$$n, m \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|T_n - T_m\| \leq \varepsilon.$$

Per ogni $x \in X$ fissato si ha allora

$$(**) \qquad n, m \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon\|x\|$$

e quindi anche la successione $\{T_n x\}_n$ verifica la condizione di Cauchy in Y e dunque converge. Per ogni $x \in X$ sia quindi $Tx \in Y$ tale che

$$\lim_{n \to +\infty} Tx_n = Tx.$$

La funzione $T\colon X \to Y$ così definita è lineare. Inoltre, essendo anche $\{\|T_n\|\}_n$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$, esiste $C \geq 0$ tale che risulti $\|T_n\| \leq C$ per ogni n. Si ha allora

$$\|T_n x\| \leq C\|x\|, \qquad x \in X$$

[1] La stessa notazione $B(X)$ denota quindi l'algebra normata delle funzioni limitate definite sull'insieme X e lo spazio normato (Teorema 1.12) degli operatori lineari limitati dallo spazio normato X in sè. Lasciamo di volta in volta al contesto il compito di chiarire in quale senso venga usata tale notazione

per ogni n e, passando al limite per $n \to +\infty$, risulta $\|Tx\| \le C$ per ogni $x \in X$. Quindi, T è limitato e, facendo tendere $m \to +\infty$ in $(**)$, si ottiene

$$n \ge n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|T_n x - Tx\| \le \varepsilon \|x\|, \qquad x \in X.$$

Quindi $T_n \to T$ per $n \to +\infty$ in $\mathrm{B}(X\,,Y)$ e questo completa la dimostrazione. □

Gli operatori lineari limitati e la loro norma si comportano bene anche rispetto all'operazione di composizione. Per enunciare questa proprietà consideriamo un ulteriore spazio normato Z sul campo $\mathbb{K}$ la cui norma denotiamo ancora con $\|\cdot\|$.

Teorema 1.13. *Siano X, Y e Z spazi normati sul campo $\mathbb{K}$ e siano $S \in \mathrm{B}(X\,,Y)$ e $T \in \mathrm{B}(Y\,,Z)$ operatori lineari limitati. Allora,*

(a) $TS \in \mathrm{B}(X\,,Y)$;
(b) $\|TS\| \le \|T\|\|S\|$.

Lo spazio degli operatori lineari limitati $\mathrm{B}(X)$ da X in sè è dunque un'algebra normata sul campo $\mathbb{K}$ munità di unità che risulta essere un'algebra di Banach se X è a sua volta completo.

Dimostrazione. Si ha

$$\|TSx\| \le \|T\|\|Sx\| \le \|T\|\|S\|\|x\|, \qquad x \in E,$$

e quindi l'operatore lineare TS è limitato e vale (b). □

Esaminiamo ora le relazioni tra operatori lineari limitati e operatori lineari continui. Denotiamo a tal fine con con

$$\mathrm{L}(X\,,Y) = \big\{T \in \mathcal{L}(X\,,Y) : \, T \text{ continuo}\big\}$$

il sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}(X\,,Y)$ formato dagli operatori lineari continui da X in Y e conveniamo anche in questo caso di scrivere per brevità $\mathrm{L}(X) = \mathrm{L}(X\,,X)$ quando $Y = X$.

Teorema 1.14. *Siano X e Y spazi normati sul campo $\mathbb{K}$ e sia $T \in \mathcal{L}(X\,,Y)$ un operatore lineare. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *T è limitato;*
(b) *T è una funzione lipschitziana da X in Y;*
(c) *T è continua in $x_0 = 0$;*

ed in tal caso si ha $\|T\| = \mathrm{Lip}(T)$.

Dimostrazione. È sufficiente provare che (a) implica (b) e che (c) implica (a) poiché la restante implicazione è ovvia.
(a) Se $T \in \mathrm{B}(X\,,Y)$ è un operatore lineare limitato, si ha

$$\|Tx\| \le \|T\|\|x\|, \qquad x \in X.$$

Per la linearità di T, la stessa disuguaglianza con $x_1 - x_2$ al posto di x prova (b).
(c) Sia $\delta = \delta(1) > 0$ tale che risulti

$$\|x\| \le \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|Tx\| \le 1.$$

Quindi, per ogni $x \in X$ con $\|x\| \le 1$ si ha $\|T(\delta x)\| \le 1$ da cui segue che T è limitato con $\|T\| \le 1/\delta$.
Resta infine da provare che risulta $\|T\| = \mathrm{Lip}(T)$. Da (a) si deduce che risulta $\mathrm{Lip}(T) \le \|T\|$. Viceversa, sia $\|T\| > 0$ cosicché, per ogni $0 < \varepsilon < \|T\|$, esiste $x_\varepsilon \in X$ con $\|x_\varepsilon\| \le 1$ tale che sia $\|Tx_\varepsilon\| > \|T\| - \varepsilon > 0$. Quindi, deve essere $x_\varepsilon \ne 0$ e si ha

$$\mathrm{Lip}(T) \ge \frac{\|Tx_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} \ge \|Tx_\varepsilon\| > \|T\| - \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue $\mathrm{Lip}(T) \geq \|T\|$. $\square$

Per ogni coppia di spazi normati X e Y risulta quindi $\mathrm{L}(X\,,Y) = \mathrm{B}(X\,,Y)$ e per ogni operatore lineare continuo ovvero limitato $T \in \mathrm{L}(X\,,Y)$ si ha

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \|T\|\|x_1 - x_2\|, \qquad x_i \in X \quad (i = 1\,,2).$$

Risulta inoltre

$$T \in \mathrm{B}(X\,,Y) \qquad \Longrightarrow \qquad \ker(T) \text{ chiuso in } X$$

e non vale il viceversa come prova l'esempio seguente.

Esempio 1.15. Sia c_{c} lo spazio normato delle successioni reali o complesse definitivamente nulle con la norma della convergenza uniforme (Esempio 1.2 − (c)). L'operatore lineare $T \in \mathcal{L}(c_{\mathrm{c}})$ da c_{c} in sè definito ponendo

$$(Tx)_n = nx_n, \qquad n \geq 1,$$

per ogni successione $x = \{x_n\}_n \in c_{\mathrm{c}}$ è iniettivo ma non limitato. $\square$

Concludiamo questa parte esaminando, in analogia con quanto fatto per gli spazi metrici, la nozione di isomorfismo tra spazi normati.

Definizione 1.16. Siano X e Y spazi normati sul campo $\mathbb{K}$. Un operatore lineare $T \in \mathcal{L}(X\,,Y)$ tale che

- T è un isomorfismo lineare di X su Y;
- $T \in \mathrm{L}(X\,,Y)$ e $T^{-1} \in \mathrm{L}(Y\,,X)$.

si dice *isomorfismo di spazi normati di X su Y* o anche *isomorfismo topologico di X su Y*. $\square$

Nel seguito, quando necessario, parleremo di isomorfismi lineari e di isomorfismi topologici o di spazi normati per distinguere le due nozioni.
Denotiamo con

$$\mathrm{Iso}(X\,,Y) = \bigl\{T \in \mathrm{L}(X\,,Y) :\, T \text{ isomorfismo (topologico) di } X \text{ su } Y\bigr\}$$

l'insieme (eventualmente vuoto) formato da tutti gli isomorfismi di spazi normati di X su Y e poniamo per brevità $\mathrm{Iso}(X) = \mathrm{Iso}(X\,,X)$ per $Y = X$.
È chiaro che, se T è un isomorfismo di spazi normati di X su Y, l'operatore lineare inverso T^{-1} è a sua volta un isomorfismo di spazi normati di Y su X. Inoltre, se Z denota un ulteriore spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e se $S \in \mathrm{Iso}(X\,,Y)$ e $T \in \mathrm{Iso}(Y\,,Z)$ sono isomorfismi di spazi normati di X su Y e di Y su Z rispettivamente, anche il prodotto di composizione TS è un isomorfismo di spazi normati di X su Z. In particolare, $\mathrm{Iso}(X)$ è un gruppo rispetto al prodotto di composizione.
Chiaramente un isomorfismo di spazi vettoriali $T \in \mathcal{L}(X\,,Y)$ è un isomorfismo di spazi normati se e solo se si ha

$$c_1\|x\| \leq \|Tx\| \leq c_2\|x\|, \qquad x \in \mathbb{E},$$

per qualche coppia di numeri positivi $c_2 \geq c_1 > 0$ nel qual caso risulta $\|T\| \leq c_2$ e $\|T^{-1}\| \leq 1/c_1$. Ogni isomorfismo tra spazi normati è anche un isomorfismo tra i corrispondenti spazi metrici.
Dalla nozione di isomorfismo tra spazi normati sul medesimo campo $\mathbb{K}$ deriva in modo ovvio la definizione di spazi normati isomorfi: due spazi normati X e Y sul campo $\mathbb{K}$ si dicono *isomorfi come spazi normati* o (*topologicamente*) *isomorfi* se esiste un isomorfismo di spazi normati $T \in \mathrm{Iso}(X\,,Y)$ e in tal caso scriviamo

$$X \simeq Y.$$

Nel caso particolare in cui risulta $T \in \mathrm{Iso}(X\,,Y)$ e

$$\|Tx\| = \|x\|, \qquad x \in X,$$

l'operatore lineare T si dice *isomorfismo isometrico* e gli spazi normati X e Y si dicono *isometricamente isomorfi*. Vi sono spazi normati isomorfi che non sono isometricamente isomorfi (Esercizio 1.14).
È chiaro che la relazione $\simeq$ di isomorfismo tra spazi normati è una relazione d'equivalenza e che spazi normati isomorfi sono indistinguibili dal punto di vista della struttura topologica e uniforme.

Duale di uno spazio normato. Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$. Lo spazio dei funzionali lineari continui o limitati da X in $\mathbb{K}$ prende il nome di *duale* (*topologico*[2]) e si denota con

$$X^* = \mathrm{L}(X\,,\mathbb{K}).$$

Il duale X^* di uno spazio normato X è quindi uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ con la norma definita da

$$\|L\| = \sup\big\{|Lx| :\ x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\big\}\,, \qquad L \in X^*.$$

Il risultato seguente caratterizza i funzionali lineari limitati in termini di proprietà del nucleo. Si noti la differenza di comportamento rispetto agli operatori lineari tra spazi normati (Esempio 1.15).

TEOREMA 1.17. *Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e $L \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ un funzionale lineare con $L \neq 0$. Allora,*

(a) *L è un'applicazione aperta;*

e inoltre le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(b) *$L \in X^*$;*
(c) $\ker(L)$ *è un sottospazio chiuso;*
(d) $\ker(L)$ *non è denso in X.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $V \subset X$ un insieme aperto (non vuoto). Fissato $\lambda_0 \in L(V)$, sia $x_0 \in V$ tale che $Lx_0 = \lambda_0$ e sia $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset V$. Essendo $L \neq 0$ per ipotesi, esiste $y \in B_r$ tale che risulti $Ly \neq 0$ e, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ con

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{|Ly|r}{\|y\|}$$

risulta

$$x_0 + \frac{\lambda - \lambda_0}{Ly} y \in B_r(x_0) \qquad \text{e} \qquad L\left(x_0 + \frac{\lambda - \lambda_0}{Ly} y\right) = \lambda.$$

Per provare l'equivalenza delle restanti affermazioni, procediamo ciclicamente osservando che è sufficiente provare solo che (c) implica (a), essendo le altre implicazioni ovvie.
Se $\ker(L)$ non è denso in X, si ha $\ker(L) \cap B_r[x_0] = \varnothing$ per $x_0 \in X$ e $r > 0$ opportuni. Se L non fosse limitato, l'insieme $L\big(B_r[0]\big)$ sarebbe illimitato e quindi si avrebbe $|Lx| > |Lx_0|$ per qualche $x \in B_r[0]$. Si avrebbe allora

$$-\frac{Lx_0}{Lx} x \in B_r[0] \qquad \text{e} \qquad L\left(x_0 - \frac{Lx_0}{Lx} x\right) = 0$$

da cui seguirebbe $\ker(L) \cap B_r[x_0] \neq \varnothing$ in contrasto con l'ipotesi fatta all'inizio. $\square$

I funzionali lineari limitati (non nulli) hanno anche un'interpretazione geometrica: si identificano infatti con i sottospazi chiusi di codimensione uno.

TEOREMA 1.18. *Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e $M \subset X$ un sottospazio di X. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

---

[2] L'aggettivo topologico serve (quando necessario) a distinguere il duale topologico di X dal duale algebrico di X formato da tutti i funzionali lineari da X in $\mathbb{K}$.

(a) *esiste* $L \in X^*$ *con* $L \neq 0$ *tale che* $M = \ker(L)$*;*
(b) M *è chiuso e* $\operatorname{codim} M = 1$*.*

Dimostrazione. (a) Il sottospazio M è chiuso. Sia $x_0 \in X$ tale che $Lx_0 = 1$. Allora, $x_0 \notin M$ e per ogni $x \in X$ risulta

$$L\big(x - (Lx)x_0\big) = Lx - (Lx)Lx_0 = 0.$$

Quindi, $x - (Lx)x_0 \in M$ per ogni $x \in X$ cosicché si ha

$$x = \big(x - (Lx)x_0\big) + (Lx)x_0 \in M + \mathbb{K}x_0.$$

Pertanto, risulta $X = M + \mathbb{K}x_0$ e $M \cap \mathbb{K}x_0 = \varnothing$ e questo prova (b).
(b) Ogni elemento $x \in X$ si scrive in modo unico nella forma $x = y + \lambda x_0$ con $y \in M$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Sia $L\colon X \to \mathbb{R}$ il funzionale lineare definito da

$$Lx = \lambda, \qquad x = y + \lambda x_0 \in X.$$

Poiché M è chiuso e $x_0 \notin M$, risulta

$$r = \inf\big\{\|y - x_0\| : \; y \in M\big\} > 0$$

e quindi da ciò segue

$$\|y + \lambda x_0\| = |\lambda| \cdot \big\|\big(y/(-\lambda)\big) - x_0\big\| \geq r|\lambda|$$

per ogni $\lambda \neq 0$ e $y \in M$. Si ha allora

$$|L(y + \lambda x_0)| = |\lambda| = \frac{1}{r}(r|\lambda|) \leq \frac{1}{r}\|y + \lambda x_0\|, \qquad x = y + \lambda x_0 \in X,$$

e quindi $L \in X^*$ con $\|L\| \leq 1/r$. □

In accordo con la terminologia consueta per gli spazi euclidei di dimensione finita, ogni insieme della forma

$$\pi_\lambda = \big\{x \in X : \; Lx = \lambda\big\}, \qquad \lambda \in \mathbb{K},$$

con $L \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, $L \neq 0$, si dice *iperpiano* (*affine*) *di* X. Risulta quindi

$$\pi_\lambda = x_0 + \ker L,$$

essendo $x_0 \in X$ un qualunque punto tale che $Lx_0 = \lambda$, e dal teorema precedente si ricava che gli iperpiani chiusi coincidono con gli insiemi della forma $x_0 + M$ al variare di $x_0 \in X$ e di M tra i sottospazi chiusi di X con $\operatorname{codim} M = 1$.
Quando X è uno spazio normato reale, ogni iperpiano chiuso

$$\pi_c = \big\{x \in X : \; Lx = c\big\}, \qquad (L \in X^*,\ L \neq 0 \text{ e } c \in \mathbb{R}),$$

evidentemente disconnette lo spazio e, in tal caso, all'iperpiano chiuso π_c si associano gli insiemi

$$\pi_c^- = \big\{x \in X : \; Lx \leq c\big\} \qquad \text{e} \qquad \pi_c^+ = \big\{x \in X : \; Lx \geq c\big\}$$

che si dicono *semispazi chiusi* associati all'iperpiano π_c. In maniera ovvia si definiscono i corrispondenti *semispazi aperti.* La situazione è diversa quando invece X è uno spazio normato complesso.

Proposizione 1.19. *Sia* X *uno spazio normato sul campo* $\mathbb{C}$ *e sia*

$$\pi_\lambda = \big\{x \in X : \; Lx = \lambda\big\}$$

($L \in X^*$ con $L \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$) *un iperpiano chiuso. Allora,* $X \setminus \pi_\lambda$ *è connesso.*

Dimostrazione. È sufficiente provare la tesi per $\lambda = 0$ cioè nel caso dell'iperpiano chiuso $\pi_0 = \ker L$ e in particolare è sufficiente provare che $X \setminus \ker L$ è connesso per archi: dati due punti $x_i \notin \ker L$ $(i = 0, 1)$, esiste una funzione continua $\gamma\colon [0,1] \to X$ tale che $\gamma(i) = x_i$ per $i = 0, 1$ e $\gamma(t) \notin \ker L$ per ogni $t \in [0,1]$.
Posto $L(x_i) = \lambda_i \neq 0$ per $i = 0, 1$, deve presentarsi uno dei casi seguenti:

- $s\lambda_1 + (1-s)\lambda_0 \neq 0$ per ogni $s \in [0,1]$;
- esiste $s \in (0,1)$ tale che $s\lambda_1 + (1-s)\lambda_0 = 0$.

Nel primo caso basta scegliere $\gamma(t) = tx_1 + (1-t)x_0$ per $t \in [0,1]$. Nell'altro caso si ha $sx_1 + (1-s)x_0 \in \ker L$ da cui segue

$$x_1 = -\frac{1-s}{s}x_0 + y/s$$

per qualche $y \in \ker L$ nel qual caso basta scegliere

$$\gamma(t) = e^{i\pi t}\left[(1-t) + t\frac{1-s}{s}\right]x_0 + \frac{t}{s}y, \qquad t \in [0,1]. \qquad \square$$

Concludiamo questa parte svolgendo alcune considerazioni sui funzionali lineari nel caso di spazi normati complessi. Sia dunque X uno spazio vettoriale sul campo complesso. In tal caso X è ovviamente anche uno spazio vettoriale reale che indicheremo con $X_{\mathbb{R}}$ e parleremo di funzionali $\mathbb{C}-$lineari ovvero $\mathbb{R}-$lineari per distinguere gli elementi di $\mathcal{L}(X,\mathbb{C})$ dagli elementi di $\mathcal{L}(X_{\mathbb{R}},\mathbb{R})$. Ancora, qualora X sia anche uno spazio normato, denoteremo come al solito con X^* il duale di X come spazio normato complesso – formato quindi dai funzionali $\mathbb{C}-$lineari limitati su X – e denoteremo con $X^*_{\mathbb{R}}$ il duale di $X_{\mathbb{R}}$ come spazio vettoriale reale formato dai funzionali $\mathbb{R}-$lineari limitati. Le relazioni tra funzionali $\mathbb{C}-$lineari e $\mathbb{R}-$lineari sono illustrate nel risultato seguente.

Proposizione 1.20. *Siano X uno spazio normato complesso e $X_{\mathbb{R}}$ il corrispondente spazio normato reale. Allora,*

(a) *se $L \in \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$, posto $\Lambda = \mathrm{Re}(L)$, risulta $\Lambda \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{R}},\mathbb{R})$ e*

$$Lx = \Lambda x - i\Lambda(ix), \qquad x \in X;$$

(b) *se $\Lambda \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{R}},\mathbb{R})$, posto*

$$Lx = \Lambda x - i\Lambda(ix), \qquad x \in X;$$

risulta $L \in \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$;

(c) *se $L \in \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$ e $\Lambda = \mathrm{Re}(L)$, si ha*

$$L \in X^* \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Lambda \in X^*_{\mathbb{R}}$$

e in tal caso risulta $\|L\| = \|\Lambda\|$.

Ogni funzionale $\mathbb{C}-$lineare è quindi univocamente determinato dalla sua parte reale che è un funzionale $\mathbb{R}-$lineare.

Dimostrazione. (a) Per ogni $x, y \in X$ e $t \in \mathbb{R}$ risulta

$$\Lambda(x+y) = \mathrm{Re}(L(x+y)) = \mathrm{Re}(Lx+Ly) = \mathrm{Re}(Lx) + \mathrm{Re}(Ly) = \Lambda x + \Lambda y$$
$$\Lambda(tx) = \mathrm{Re}(L(tx)) = \mathrm{Re}(tLx) = t\,\mathrm{Re}(Lx) = t\Lambda x$$

da cui segue $\Lambda \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{R}},\mathbb{R})$. Inoltre, per ogni numero complesso $z = u+iv$ ($u, v \in \mathbb{R}$) risulta $iz = -v + iu$. Quindi, si ha $z = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Re}(iz)$ e da ciò segue

$$Lx = \mathrm{Re}(Lx) - i\,\mathrm{Re}(iLx) = \mathrm{Re}(Lx) - i\,\mathrm{Re}(L(ix)) = \Lambda x - i\Lambda(ix)$$

per ogni $x \in X$, essendo L un funzionale $\mathbb{C}-$lineare.

(b) È chiaro che, se $\Lambda \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{R}},\mathbb{R})$, il funzionale L definito come in (b) è $\mathbb{R}-$lineare. Si ha inoltre

$$L(ix) = \Lambda(ix) - i\Lambda(-x) = \Lambda(ix) + i\Lambda x = i\left[\Lambda x - i\Lambda(ix)\right] = iLx$$

per ogni $x \in X$ e quindi risulta $L \in \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$.

(c) Si ha evidentemente $|\Lambda x| \leq |Lx|$ per ogni $x \in X$. Quindi, da $L \in X^*$ segue $\Lambda \in X^*_{\mathbb{R}}$ e $\|\Lambda\| \leq \|L\|$. Viceversa, sia $\Lambda \in X^*_{\mathbb{R}}$ e, fissato $x \in X$, sia $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tale che risulti $|Lx| = \lambda Lx$. Si ha allora

$$|Lx| = \lambda Lx = L(\lambda x) = \Lambda(\lambda x) \leq \|\Lambda\| \cdot \|\lambda x\| = \|\Lambda\| \cdot \|x\|$$

da cui segue $L \in X^*$ e $\|L\| \leq \|\Lambda\|$. □

Spazi normati di dimensione finita. Esaminiamo in questa parte il caso particolare degli spazi normati di dimensione finita. Il risultato fondamentale in questa direzione è il seguente: tutti gli spazi normati sul campo $\mathbb{K}$ aventi dimensione finita n sono isomorfi come spazi normati allo spazio euclideo $\mathbb{K}^n$. Esaminiamo quindi le numerose conseguenze di questo risultato.

Consideriamo come al solito uno spazio normato X sul campo $\mathbb{K}$ con norma $\|\cdot\|$.

Teorema 1.21. *Sia X uno spazio normato X sul campo $\mathbb{K}$ con $\dim X = n$ e sia $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, X)$ un isomorfismo lineare di $\mathbb{K}^n$ su X. Allora,*

$$L \in \mathrm{Iso}(\mathbb{K}^n, X).$$

Dimostrazione. Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$ cosicché i vettori u_m definiti da $u_m = Le_m$ $(m = 1, \ldots, n)$ formano una base di X e risulta

$$L\lambda = \lambda^1 u_1 + \cdots + \lambda^n u_n, \qquad \lambda = \lambda^1 e_1 + \cdots + \lambda^n e_n \in \mathbb{K}^n.$$

Si ha allora

$$\|L\lambda\| \leq |\lambda^1|\|u_1\| + \cdots + |\lambda^n|\|u_n\| \leq \left(\sum_{1 \leq m \leq N} \|u_m\|^2 \right)^{1/2} \|\lambda\|$$

per ogni vettore $\lambda = \lambda^1 e_1 + \cdots + \lambda^n e_n \in \mathbb{K}^n$. Quindi, L è limitato con

$$\|L\| \leq \left(\sum_{1 \leq m \leq n} \|u_m\|^2 \right)^{1/2}$$

e resta da provare che anche L^{-1} è limitato. Se così non fosse, esisterebbero vettori $x_k \in X$ $(k \geq 1)$ tali che $\|x_k\| \leq 1$ per ogni k e $\|L^{-1}(x_k)\| \to +\infty$ per $k \to +\infty$. Supposto $L^{-1}(x_k) \neq 0$ per ogni k e posto

$$\lambda_k = \frac{L^{-1}(x_k)}{\|L^{-1}(x_k)\|} \in \mathbb{K}^n, \qquad k \geq 1,$$

sarebbe $\|\lambda_k\| = 1$ per ogni k e quindi, pur di passare ad una sottosuccessione ancora denotata con λ_k, si avrebbe $\lambda_k \to \lambda$ per $k \to +\infty$ per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\|\lambda\| = 1$. Si avrebbe quindi

$$\lim_{k \to +\infty} L\lambda_k = L\lambda \qquad \text{e} \qquad \lim_{k \to +\infty} L\lambda_k = \lim_{k \to +\infty} \frac{x_k}{\|L^{-1}(x_k)\|} = 0$$

da cui seguirebbe $L\lambda = 0$ e $\|\lambda\| = 1$ e ciò è assurdo. □

Questo risultato ha numerose conseguenze che riassumiamo nel corollario seguente.

Corollario 1.22. *Siano X e Y due spazi normati sul campo $\mathbb{K}$ con $\dim X < +\infty$. Allora,*

- (a) *X è uno spazio di Banach;*
- (b) *se $\dim X = \dim Y < +\infty$, gli spazi X e Y sono isomorfi come spazi normati;*
- (c) *ogni operatore lineare $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ è limitato;*
- (d) *tutte le norme su X sono equivalenti;*

(e) *un insieme $K \subset X$ è compatto se e solo se K è chiuso e limitato.*

In particolare, se X ha dimensione finita risulta $\mathcal{L}(X\,,Y) = \mathrm{L}(X\,,Y)$.

DIMOSTRAZIONE. (a) Se $\dim X = n$, lo spazio normato X risulta isomorfo come spazio normato a $\mathbb{K}^n$ e quindi ne eredita la completezza.

(b) Ovvio!

(c) Siano $\{u_1,\dots,u_n\}$ una base di X e $\{e_1,\dots,e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$ e sia $L \in \mathrm{Iso}(\mathbb{K}^n, X)$ l'isomorfismo lineare di $\mathbb{K}^n$ su X definito da $Le_m = u_m$ per ogni m che risulta essere anche un isomorfismo di spazi normati (Teorema 1.21). Poniamo $y_m = Tu_m$ per $m = 1,\dots,n$ e denotiamo con $S \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, Y)$ l'operatore lineare tale che $Se_m = y_m$ per ogni m. Procedendo come in Teorema 1.21 si verifica che S è limitato e la conclusione segue da $T = SL^{-1}$ (Figura 1.1).

(d) Sia X_i lo spazio vettoriale X munito della norma $\|\cdot\|_i$ $(i = 1, 2)$. Per (c) id_X è un isomorfismo di spazi normati di X_1 su X_2 e viceversa. □

COROLLARIO 1.23. *Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e $Y \subset X$ un sottospazio vettoriale. Allora,*

$$\dim Y < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad Y \text{ chiuso.}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\dim Y = n$. Il sottospazio vettoriale Y è isomorfo a $\mathbb{K}^n$ e quindi è chiuso, essendo $\mathbb{K}^n$ completo. □

Caratterizziamo ora gli spazi normati di dimensione finita in termini di validità della proprietà di Heine–Borel e di locale compattezza. Questa caratterizzazione è basata sul seguente *lemma di Riesz* che caratterizza i sottospazi densi di uno spazio normato.

TEOREMA 1.24 (F. Riesz). *Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e $Y \subset X$ un sottospazio chiuso con $Y \neq X$. Allora, per ogni $0 < \varepsilon < 1$ esiste $x_\varepsilon \in X$ tale che*

- $\|x_\varepsilon\| = 1$;
- $\|y - x_\varepsilon\| > 1 - \varepsilon$ *per ogni* $y \in Y$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $x_0 \in X \setminus Y$ e

$$d = d(x_0, Y) = \inf\big\{\|x_0 - y\| :\ y \in Y\big\}\,.$$

Essendo Y chiuso, risulta $d > 0$ (Proposizione I–3.8) cosicché, fissato $0 < \varepsilon < 1$, si ha

$$0 < \|x_0 - \overline{y}\| < \frac{d}{1-\varepsilon}$$

per $\overline{y} \in Y$ opportuno. Sia quindi

$$x_\varepsilon = \frac{x_0 - \overline{y}}{\|x_0 - \overline{y}\|}.$$

Si ha $\|x_\varepsilon\| = 1$ e per ogni $y \in Y$ risulta

$$x_\varepsilon - y = \frac{x_0 - \overline{y}}{\|x_0 - \overline{y}\|} - y = \frac{\|x_0 - (\overline{y} + \|x_0 - \overline{y}\|y)\,\|}{\|x_0 - \overline{y}\|}$$

cosicché da $\overline{y} + \|x_0 - \overline{y}\|y \in Y$ segue

$$\|x_\varepsilon - \overline{y}\| = \frac{\|x_0 - (\overline{y} + \|x_0 - \overline{y}\|y)\,\|}{\|x_0 - \overline{y}\|} > d\frac{1-\varepsilon}{d} = 1 - \varepsilon$$

per ogni $y \in Y$ e questo completa la dimostrazione. □

COROLLARIO 1.25. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "L^{-1}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & Y \\ & \mathbb{K}^N \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

(a)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & Y \\ & X/M \arrow[ur, "T_\sharp"'] & \end{tikzcd}$$

(b)

FIGURA 1.1. (a) Relazione tra gli operatori S e T (Corollario 1.22 – (c)); (b) Azione dell'operatore lineare quoziente (Teorema 1.29).

(a) *X è localmente compatto;*

(b) *X ha la proprietà di Heine–Borel;*

(c) $\dim X < +\infty$.

In particolare, in uno spazio normato X le palle chiuse $B_r[x_0]$ ($x_0 \in X$, $r > 0$) sono insiemi compatti se e solo se X ha dimensione finita e se X ha dimensione infinita tutti gli insiemi compatti sono privi di punti interni.

DIMOSTRAZIONE. (a) Ogni punto $x \in X$ ha un intorno compatto che contiene una palla chiusa $B_\rho[x]$ per $\rho = \rho(x) > 0$ opportuno e conseguentemente tutte le palle chiuse $B_r[x]$ ($r > 0$) sono compatte (Proposizione 1.3 – (b)). Ogni insieme chiuso e limitato è contenuto nella palla $B_r[0]$ per $r > 0$ opportuno e questo prova che X ha la proprietà di Heine–Borel.

(b) La sfera unitaria

$$S_1 = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

è un insieme chiuso e limitato e quindi compatto. Fissato $0 < \varepsilon < 1$ esistono allora vettori in numero finito $y_m \in S_1$ ($m = 1, \dots, n$) tali che

$$S_1 \subset B_{1-\varepsilon}(y_1) \cup \cdots \cup B_{1-\varepsilon}(y_n).$$

Sia quindi $Y = \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_n\}$ il sottospazio chiuso da essi generato. Se fosse $\dim X = +\infty$, sarebbe $Y \neq X$ e per il lemma di Riesz esisterebbe $x_\varepsilon \in X$ con $\|x_\varepsilon\| = 1$ per cui si avrebbe $\|y - x_\varepsilon\| > 1 - \varepsilon$ per ogni $y \in Y$ e ciò è assurdo.

(c) Ovvio! □

Concludiamo questa parte caratterizzando gli insiemi compatti negli spazi di Banach. In dimensione finita, tali insiemi si caratterizzano mediante la prorietà di Heine–Borel mentre in dimensione infinita gli insiemi compatti sono gli insiemi chiusi e limitati che sono arbitrariamente vicini a sottospazi di dimensione finita nel senso illustrato nel teorema seguente.

TEOREMA 1.26. *Siano X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e $K \subset X$ un insieme. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *K è chiuso e limitato e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottospazio M_ε tale che*
- $\dim(M_\varepsilon) < +\infty$*;*
- $d(x, M_\varepsilon) < \varepsilon$ *per ogni $x \in K$;*

(b) *K è compatto.*

In uno spazio di Banach di dimensione finita gli insiemi compatti sono gli insiemi chiusi e limitati mentre in dimensione infinita sono gli insiemi chiusi e limitati che sono arbitrariamente vicini a sottospazi di dimensione finita.

Dimostrazione. (a) Fissato $\varepsilon > 0$, sia M_ε il sottospazio di dimensione finita associato a $\varepsilon/3$ e per ogni $x \in K$ sia $y_x \in M_\varepsilon$ tale che

$$\|y_x - x\| < \varepsilon/3.$$

Poiché K è limitato, si ha $\|x\| \leq C$ per ogni $x \in K$ per $C \geq 0$ opportuno da cui segue

$$\|y_x\| \leq \|x\| + \|y_x - x\| \leq C + \varepsilon/3.$$

Pertanto l'insieme $\{y_x : x \in K\}$ è limitato e quindi relativamente compatto in M_ε (Teorema 1.22 – (e)). Esistono allora vettori $y_m = y_{x_m}$ per opportuni $x_m \in K$ $(m = 1, \ldots, n)$ tali che

$$\big\{y_x : x \in K\big\} \subset \big[B_{\varepsilon/3}(y_1) \cup \cdots B_{\varepsilon/3}(y_n)\big] \cap M_\varepsilon.$$

Per ogni $x \in K$ esiste allora $m \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $\|y_x - y_m\| < \varepsilon/3$ da cui segue

$$\|x - x_m\| \leq \|x - y_x\| + \|y_x - y_m\| + \|y_m - x_m\| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Questo prova che K è totalmente limitato cosicché, essendo chiuso, esso è anche compatto (Teorema I–3.16).

(b) Essendo K compatto, fissato $\varepsilon > 0$, esistono vettori $x_m \in K$ $(m = 1, \ldots, n)$ tali che

$$K \subset B_\varepsilon(x_1) \cup \cdots B_\varepsilon(x_n).$$

Posto $M_\varepsilon = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$, si ha $\dim(M_\varepsilon) \leq n$ e per ogni vettore $x \in K$ risulta $x \in B_\varepsilon(x_m)$ per m opportuno da cui segue $d(x, M_\varepsilon) \leq \|x - x_m\| < \varepsilon$. □

Spazio normato quoziente. Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e $M \subset X$ un sottospazio chiuso di X. Consideriamo lo spazio vettoriale quoziente X/M i cui elementi sono le classi laterali di M che denotiamo come al solito con

$$[x] = x + M = \big\{x + y : y \in M\big\}$$

e denotiamo inoltre con

$$\pi(x) = [x], \qquad x \in X,$$

la proiezione canonica di X su X/M che è un operatore lineare $\pi \in \mathcal{L}(X, X/M)$ con $\ker(\pi) = M$ e $\operatorname{im}(\pi) = X/M$. Consideriamo quindi la funzione

$$\|[x]\|_{X/M} = \inf\big\{\|x + y\| : y \in M\big\}, \qquad [x] \in X/M,$$

che è ben definita e risulta essere una norma su X/M (Esercizio 1.8).
Lo spazio normato $(X/M, \|\cdot\|_{X/M})$ si dice *spazio normato quoziente di X rispetto a M* e scriveremo brevemente X/M in luogo di $(X/M, \|\cdot\|_{X/M})$ e $\|\cdot\|$ per la norma quoziente.

Teorema 1.27. *Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$, $M \subset X$ un sottospazio chiuso di X e π la proiezione canonica di X su X/M e siano*

$$B_X = \big\{x \in X : \|x\| < 1\big\} \qquad e \qquad B_{X/M} = \big\{[x] \in X/M : \|[x]\| < 1\big\}$$

le palle aperte di raggio unitario e centro nell'origine di X e X/M rispettivamente. Allora,

(a) *$\pi \in \mathrm{L}(X, X/M)$ con $\|\pi\| = 0$ se $M = X$ e $\|\pi\| = 1$ se $M \neq X$;*
(b) *si ha $\pi(B_X) = B_{X/M}$ e π è un'applicazione aperta;*
(c) *X spazio di Banach $\quad\Longrightarrow\quad$ X/M spazio di Banach.*

DIMOSTRAZIONE. (a) Si ha

$$\|\pi(x)\| = \inf\big\{\|x+y\| :\ y \in M\big\} \le \|x\|, \qquad x \in X,$$

e questo prova la limitatezza di π con $\|\pi\| \le 1$. Se $V = X$ si ha evidentemente $\pi = 0$ mentre, per $V \neq X$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in X$ con $\|x_\varepsilon\| = 1$ tale che

$$\|x_\varepsilon + y\| \ge 1 - \varepsilon, \qquad y \in M,$$

per il lemma di Riesz (Teorema 1.24). Risulta quindi $\|\pi(x_\varepsilon)\| \ge 1 - \varepsilon$ con $\|x_\varepsilon\| = 1$ e dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue la conclusione.
(b) Si ha $\pi(B_X) \subset B_{X/M}$ per (a). Viceversa, se $[x] \in B_{X/M}$, si ha $\|x + y_x\| < 1$ per $y_x \in M$ opportuno e da ciò segue $[x] = \pi(x) = \pi(x + y_x) \in \pi(B_X)$ ovvero $B_{X/M} \subset \pi(B_X)$. Abbiamo così provato che risulta $\pi(B_X) = B_{X/M}$ e quindi π risulta aperta per linearità.
(c) Siano $[x_n] \in X/M$ $(n \ge 1)$ gli elementi di una successione di Cauchy in X/M. Passando ad un'opportuna successione strettamente crescente di interi $n_k \ge 1$ $(k \ge 1)$ si ha

$$\|[x_{n_{k+1}}] - [x_{n_k}]\| < 1/2^k, \qquad k \ge 1,$$

e quindi per ogni k esiste $\overline{y}_k \in M$ tale che

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + \overline{y}_k\| < 1/2^k.$$

Posto allora $y_1 = 0$ e $y_k = \overline{y}_1 + \cdots + \overline{y}_{k-1}$ per $k \ge 2$, risulta $y_k \in M$ e

$$\|(x_{n_{k+1}} + y_{n_{k+1}}) - (x_{n_k} + y_{n_k})\| = \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + \overline{y}_k\| < 1/2^k$$

per ogni k. Pertanto, la successione $\{(x_{n_k} + y_k)\}_k$ è di Cauchy in X e dunque si ha $(x_{n_k} + y_k) \to x$ in X per $k \to +\infty$ per $x \in X$ opportuno. Si ha allora

$$\limsup_{k\to+\infty} \|[x_{n_k}] - [x]\| \le \lim_{k\to+\infty} \|(x_{n_k} + y_k) - x\| = 0$$

e questo completa la dimostrazione poiché ogni successione di Cauchy avente una sottosuccessione convergente è a sua volta convergente. □

COROLLARIO 1.28. *Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e $M \subset X$ un sottospazio chiuso di X e siano*

- *$\mathcal{T}_\pi$ la topologia quoziente di X/M (Sezione I–2.2);*
- *$\mathcal{T}$ la topologia normata di X/M indotta dalla norma quoziente.*

Allora, $\mathcal{T}_\pi = \mathcal{T}$.

DIMOSTRAZIONE. La proiezione canonica π di X su X/M è $\mathcal{T}-$continua (Teorema 1.27−(a)) e quindi risulta $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\pi$ per definizione di topologia quoziente.
Viceversa, dato un insieme $\mathcal{T}_\pi-$aperto $V \subset X/M$ (non vuoto), sia $[x_0] \in V$. Si ha allora $x_0 \in \pi^{-1}(V)$ e quindi, essendo $\pi^{-1}(V)$ aperto in X per definizione di topologia quoziente, risulta $B_r(x_0) \subset \pi^{-1}(V)$ per $r > 0$ opportuno. Ragionando come in Teorema 1.27−(b), si ha $B_r([x_0]) = B_r(\pi(x_0)) = \pi(B_r(x_0)) \subset V$ e quindi $[x_0]$ è un punto interno di V nella topologia $\mathcal{T}$. Essendo $[x_0]$ arbitrario, V è $\mathcal{T}-$aperto e questo completa la dimostrazione. □

TEOREMA 1.29. *Siano X, Y due spazi normati sul campo $\mathbb{K}$, $M \subset X$ un sottospazio chiuso di X e π la proiezione canonica di X su X/M e sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operatore lineare con $\ker(T) \subset M$. Allora,*

(a) *esiste uno ed un solo $T_\sharp \in \mathcal{L}(X/M, Y)$ tale che $T = T_\sharp\pi$;*
(b) *$\mathrm{im}(T_\sharp) = \mathrm{im}(T)$ e $T_\sharp$ è iniettivo se $\ker(T) = M$;*
(c) *$T_\sharp \in \mathrm{L}(X/M, Y)$ se e solo se $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ e in tal caso si ha $\|T_\sharp\| = \|T\|$;*
(d) *T è una funzione aperta se e solo se $T_\sharp$ è aperta.*

L'operatore lineare $T_\sharp$ si dice *indotto da T sul quoziente*. L'azione di $T_\sharp$ è illustrata in Figura 1.1 – (b).

DIMOSTRAZIONE. L'esistenza di un unico operatore lineare $T_\sharp \in \mathcal{L}(X/M\,, Y)$ tale che $T = T_\sharp \pi$ è un fatto ben noto di algebra lineare e l'uguaglianza $\mathrm{im}(T_\sharp) = \mathrm{im}(T)$ è ovvia. Se $\ker(T) = M$, si ha

$$T_\sharp[x] = 0 \implies 0 = T_\sharp[x] = Tx \implies x \in \ker T = M \implies [x] = 0 \text{ in } X/M$$

e quindi $T_\sharp$ risulta iniettivo.
L'equivalenza tra la continuità di T e di $T_\sharp$ segue dalle proprietà della topologia quoziente (Sezione I–2.2) e con le notazioni di Teorema 1.27 si ha

$$\begin{aligned}\|T\| = \sup\big\{\|Tx\| : \ x \in B_X\big\} &= \sup\big\{\|T_\sharp(\pi(x))\| : \ x \in B_X\big\} = \\ &= \sup\big\{\|T_\sharp([x])\| : \ [x] \in B_{X/M}\big\} = \|T_\sharp\|.\end{aligned}$$

Infine, l'ultima affermazione (d) segue facilmente da $T = T_\sharp\pi$, essendo π una applicazione aperta (Teorema 1.27 – (b)). $\square$

Concludiamo questa parte con alcune conseguenze/applicazioni degli spazi quoziente.

TEOREMA 1.30. *Siano $X\,, Y$ due spazi normati sul campo $\mathbb{K}$ e sia $T \in \mathcal{L}(X\,, Y)$ un operatore lineare con* $\dim(\mathrm{im}(T)) < +\infty$*. Allora,*

$$T \in L(X\,, Y) \qquad \iff \qquad \ker(T) \ \textit{chiuso.}$$

Un operatore lineare $T \in \mathcal{L}(X\,, Y)$ con $\dim(\mathrm{im}(T)) < +\infty$ si dice *operatore lineare di rango finito*. A differenza di quanto accade nel caso generale, per gli operatori di rango finito la condizione di avere nucleo chiuso è necessaria e sufficiente per la continuità (Esempio 1.15).

DIMOSTRAZIONE. Occorre provare solo l'implicazione $\Longleftarrow$. Posto $M = \ker T$, l'operatore lineare quoziente $T_\sharp \in \mathcal{L}(X/M\,, Y)$ di T è iniettivo (Teorema 1.29) e quindi da $\mathrm{im}\,(T_\sharp) = \mathrm{im}\,(T)$ e $\dim(\mathrm{im}(T)) < +\infty$ segue che deve essere $\dim(X/M < +\infty$. Pertanto, $T_\sharp$ è limitato (Corollario 1.22 – (c)) e lo stesso vale per T (Teorema 1.29). $\square$

TEOREMA 1.31. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e siano $M\,, N \subset X$ due sottospazi tali che*

- *M e N chiusi in X;*
- $\dim N < +\infty$.

Allora, $M + N$ è chiuso in X.

DIMOSTRAZIONE. Sia π la proiezione canonica di X su X/M. Il sottospazio $\pi(N)$ di X/M ha dimensione finita e quindi è chiuso in X/M e lo stesso vale per $\pi^{-1}(\pi(N))$ per continuità. Si ha

$$\begin{aligned}x \in \pi^{-1}(\pi(N)) \iff \pi(x) \in \pi(N) \iff x + M \in \big\{y + M : \ y \in N\big\} \iff \\ \iff \exists\, y \in N : \ x + M = y + M \iff x \in M + N\end{aligned}$$

e questo prova l'asserto. $\square$

1.2. Convergenza incondizionata e sommabilità

La consueta nozione di convergenza incondizionata di una serie numerica intesa come convergenza di tutti i riordinamenti della serie stessa si estende in modo naturale alle serie di vettori in spazi di Banach. Ne esaminiamo in questa sezione le proprietà di base ed estendiamo la nozione di sommabilità alle funzioni a valori in spoazi di Banach.

Convergenza incondizionata. Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una successione di vettori di X. Una successione $\{y_k\}_{k\geq 1}$ si dice *riordinamento di* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ se risulta

$$y_k = x_{\sigma(k)}, \qquad k \geq 1,$$

per una qualche funzione biettiva $\sigma\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ (permutazione) e in tal caso, con abuso di terminologia, anche la serie associata alla successione $\{y_k\}_{k\geq 1}$ si dice *riordinamento* della serie associata alla successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$.

Definizione 1.32. Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una successione di elementi di X. La serie

$$\sum_{n\geq 1} x_n$$

si dice *incondizionatamente convergente* se ogni suo riordinamento converge. □

Benché nella definizione non sia richiesto, le somme dei riordinamenti di una serie incondizionatamente convergente coincidono (Corollario 1.36).
Per le serie numeriche, come è noto, la convergenza incondizionata equivale alla convergenza assoluta e lo stesso vale per le serie di vettori di $\mathbb{K}^N$ e quindi anche per le serie di vettori di spazi di Banach di dimensione finita.
La situazione è diversa negli spazi di Banach di dimensione infinita. In ogni spazio di Banach – indipendentemente dalla dimensione – la convergenza assoluta di una serie implica la convergenza della serie stessa (Teorema 1.8) e quindi la convergenza assoluta di una serie ne implica la convergenza incondizionata. Riassumiamo questa osservazione nel risultato seguente.

Proposizione 1.33. *Siano X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una successione di vettori di X. Allora,*

$$\sum_{n\geq 1} \|x_n\| < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n\geq 1} x_n \text{ converge incondizionatamente.}$$

Negli spazi di Banach di dimensione infinita l'implicazione opposta può essere falsa come provano gli esempi seguenti.

Esempio 1.34. La serie

$$(*) \qquad \sum_{k\geq 1} x_k$$

ove $x_k\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{K}$ $(k \geq 1)$ è la successione definita da $x_k(n) = 1/k$ se $n = k$ e $x_k(n) = 0$ se $n \neq k$, converge incondizionatamente in c_0 o ℓ_∞ e in ℓ_p $(1 < p < +\infty)$ ma non converge assolutamente in tali spazi.
Si ha infatti $\|x_k\|_u = \|x_k\|_p = 1/k$ per ogni k e quindi la serie $(*)$ non converge assolutamente in nessuno di tali spazi.
Tuttavia, se

$$\sum_{k\geq 1} y_k$$

è il riordinamento di $\{x_k\}_k$ definito da $y_k = x_{\sigma(k)}$ per ogni k per una qualche permutazione σ di $\mathbb{N}_+$, per $\varepsilon > 0$ fissato risulta $\sigma(k) \geq 1/\varepsilon$ per $k \geq k_0$ con $k_0 = k_0(\varepsilon) \geq 1$ opportuno da cui segue

$$\left\|y_{k_1} + \cdots + y_{k_2}\right\|_u = \left\|x_{\sigma(k_1)} + \cdots + x_{\sigma(k_2)}\right\|_u = \max_{k_1 \leq k \leq k_2} \frac{1}{\sigma(k)} \leq \varepsilon$$

per $k_2 \geq k_1 \geq k_0$. Questo prova che il generico riordinamento di termine generale y_k di $(*)$ converge in c_0 ovvero che la serie $(*)$ converge incondizionatamente in c_0 e lo stesso vale evidentemente in ℓ_∞.
Analogamente, per ℓ_p con $1 < p < +\infty$, fissato $\varepsilon > 0$, sia $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che

$$n_2 \geq n_1 \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n_1 \leq n \leq n_2} \frac{1}{n^p} \leq \varepsilon^p$$

e sia $k_0 = k_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che $\{1, \ldots, n_0\} \subset \sigma\big(\{1, \ldots, k_0\}\big)$. Per $k_2 \geq k_1 \geq k_0$, posto

$$n_1 = \min\big\{\sigma(k) : \ k_1 \leq k \leq k_2\big\} \qquad \text{e} \qquad n_2 = \max\big\{\sigma(k) : \ k_1 \leq k \leq k_2\big\},$$

risulta $n_2 \geq n_1 \geq n_0$ da cui segue

$$\left\|y_{k_1} + \cdots + y_{k_2}\right\|_p^p = \left\|x_{\sigma(k_1)} + \cdots + x_{\sigma(k_2)}\right\|_p^p = \sum_{k_1 \leq k \leq k_2} \frac{1}{\big[\sigma(k)\big]^p} \leq \sum_{n_1 \leq n \leq n_2} \frac{1}{n^p} \leq \varepsilon^p.$$

Come prima, questo prova che la serie $(*)$ converge incondizionatamente in ℓ_p $(1 < p < +\infty)$. ☐

Anche negli spazi di Banach la convergenza incondizionata si esprime come limite di somme finite lungo l'insieme filtrante degli insiemi finiti di $\mathbb{N}_+$.

Teorema 1.35. *Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una successione di vettori di X. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ converge incondizionatamente;*

(b) *esiste $x \in X$ con la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $F_\varepsilon \subset \mathbb{N}_+$ tale che*

$$F \subset \mathbb{N}_+ \text{ finito e } F_\varepsilon \subset F \qquad \Longrightarrow \qquad \left\|\sum_{n\in F} x_n - x\right\| \leq \varepsilon;$$

e in tal caso risulta

$$x = \sum_{n\geq 1} x_n.$$

La condizione in (b) equivale a dire che la successione generalizzata delle somme parziali relative agli insiemi finiti

$$(**) \qquad S_F = \sum_{n\in F} x_n, \qquad F \subset \mathbb{N}_+ \text{ finito},$$

converge a x in X lungo l'insieme filtrante degli insiemi finiti di $\mathbb{N}_+$ nel qual caso risulta

$$\lim_{F \text{ finito}} S_F = \sum_{n\geq 1} x_n.$$

Altre formulazioni equivalenti della nozione di convergenza incondizionata sono presentate in Esercizio 1.9.

Dimostrazione. (a) Sia $x \in X$ la somma della serie in (a) e supponiamo per assurdo che la proprietà (b) non valga per x. Esisterebbe allora $\varepsilon_0 > 0$ con la seguente proprietà: per ogni insieme $F \subset \mathbb{N}_+$ finito esiste un altro insieme $G \subset \mathbb{N}_+$ finito tale che $F \subset G$ per cui risulta

$$\left\| \sum_{n \in G} x_n - x \right\| \geq 2\varepsilon_0.$$

Sia quindi $n_1 \geq 1$ tale che

$$n \geq n_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \left\| \sum_{1 \leq m \leq n} x_n - x \right\| \leq \varepsilon_0.$$

Posto $F_1 = \{1, \ldots, n_1\}$, esisterebbe un insieme $G_1 \subset \mathbb{N}_+$ finito tale che $F_1 \subset G_1$ per cui si avrebbe

$$\left\| \sum_{n \in G_1} x_n - x \right\| \geq 2\varepsilon_0$$

e, posto $H_1 = G_1 \setminus F_1$, da ciò seguirebbe

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n \in H_1} x_n \right\| &= \left\| \sum_{n \in G_1} x_n - \sum_{n \in F_1} x_n \right\| \geq \\ &\geq \left\| \sum_{n \in G_1} x_n - x \right\| - \left\| \sum_{n \in F_1} x_n - x \right\| \geq 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Posto $n_2 = \max G_1$ e $F_2 = \{1, \ldots, n_2\}$, sarebbe $n_2 \geq n_1 + 1$ ed esisterebbe un insieme $G_2 \subset \mathbb{N}_+$ finito tale che $F_2 \subset G_2$ per cui si avrebbe nuovamente

$$\left\| \sum_{n \in G_2} x_n - x \right\| \geq 2\varepsilon_0.$$

cosicché, posto $H_2 = G_2 \setminus F_2$, si avrebbe $\max H_1 < \min H_2$ e

$$\left\| \sum_{n \in H_2} x_n \right\| \geq \varepsilon_0$$

come prima. Iterando questo argomento si determinerebbero una successione strettamente crescente di interi n_j $(j \geq 1)$ e una successione di insiemi finiti H_j $(j \geq 1)$ tali che

- $n_j < \min H_j \leq \max H_j = n_{j+1}$ per ogni j;
- $\left\| \sum_{n \in H_j} x_n \right\| \geq \varepsilon_0$;

per ogni j. Potremmo definire allora un riordinamento $\{y_k\}_{k \geq 1}$ di $\{x_n\}_n$ ponendo $y_k = x_k$ per $1 \leq k \leq n_1$ e definendo per ogni j gli elementi y_k con $n_j < k \leq n_{j+1}$ numerando prima gli elementi x_n con $n \in H_j$ seguiti poi dagli elementi x_n con $n \in \{n_j + 1, \ldots, n_{j+1}\} \setminus H_j$. Posto $n'_j = n_j + \operatorname{card}(H_j)$, si avrebbe allora

$$\left\| \sum_{n_j + 1 \leq k \leq n'_j} y_k \right\| = \left\| \sum_{n \in H_j} x_n \right\| \geq \varepsilon_0$$

per ogni j e quindi il riordinamento di termine generale y_k non convergerebbe.

(b) Fissato $\varepsilon > 0$, sia $F_\varepsilon \subset \mathbb{N}_+$ un insieme finito tale che

$$F \subset \mathbb{N}_+ \text{ finito e } F_\varepsilon \subset F \qquad \Longrightarrow \qquad \left\| \sum_{n \in F} x_n - x \right\| \leq \varepsilon$$

e siano $y_k = x_{\sigma(k)}$ $(k \geq 1)$ gli elementi di un generico riordinamento di $\{x_n\}_{n \geq 1}$ relativo ad una qualche permutazione σ di $\mathbb{N}_+$. Posto $k_0 = k_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che sia

$$F_\varepsilon \subset \big\{ \sigma(1), \ldots, \sigma(k_0) \big\} ,$$

per $k \geq k_0$ l'insieme $F_k = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\}$ è finito e contiene F_ε. Risulta quindi

$$\left\| \sum_{1 \leq h \leq k} y_h - x \right\| = \left\| \sum_{n \in F_k} x_n - x \right\| \leq \varepsilon$$

e questo prova (a). □

Corollario 1.36. *Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e $\{x_n\}_{n \geq 1}$ una successione di elementi di X la cui serie associata converge incondizionatamente. Allora, si ha*

$$\sum_{k \geq 1} y_k = \sum_{n \geq 1} x_n$$

per ogni riordinamento $\{y_k\}_{k \geq 1}$ di $\{x_n\}_{n \geq 1}$.

Dimostrazione. Sia $\{y_k\}_{k \geq 1}$ un riordinamento di $\{x_n\}_{n \geq 1}$.
Le successioni generalizzate definite da

$$S_F = \sum_{n \in F} x_n \qquad \text{e} \qquad S'_F = \sum_{k \in F} y_k$$

per ogni insieme finito $F \subset \mathbb{N}_+$ sono l'una una sottosuccessione generalizzata dell'altra e la conclusione segue dall'unicità del limite.
Alternativamente, siano $x, y \in X$ tali che

$$\sum_{n \geq 1} x_n = x \qquad \text{e} \qquad \sum_{k \geq 1} y_k = y$$

e sia $\sigma \colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ la permutazione di $\mathbb{N}_+$ tale che $y_k = x_{\sigma(k)}$ per ogni k. Fissato $\varepsilon > 0$, siano $F_0, G_0 \subset \mathbb{N}_+$ insiemi finiti tali che risulti

$$\left\| \sum_{n \in F} x_n - x \right\| \leq \varepsilon/2 \qquad \text{e} \qquad \left\| \sum_{k \in G} y_k - y \right\| \leq \varepsilon/2$$

per ogni coppia di insiemi finiti $F, G \subset \mathbb{N}_+$ tali che $F_0 \subset F$ e $G_0 \subset G$. Posto allora $F = F_0 \cup \sigma(G_0)$ e $G = \sigma^{-1}(F_0) \cup G_0$, risulta $F = \sigma^{-1}(G)$ e

$$\sum_{n \in F} x_n = \sum_{k \in \sigma^{-1}(F)} x_{\sigma(k)} = \sum_{k \in G} y_k .$$

Da $F_0 \subset F$ e $G_0 \subset G$ segue allora

$$\|x - y\| = \left\| \left(x - \sum_{n \in F} x_n \right) + \left(\sum_{k \in G} y_k - y \right) \right\| \leq \left\| x - \sum_{n \in F} x_n \right\| + \left\| \sum_{k \in G} y_k - y \right\| \leq \varepsilon$$

e dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue la conclusione. □

Alla luce di Teorema 1.35, la convergenza incondizionata di una serie equivale all'esistenza del limite della successione generalizzata delle somme parziali della serie relative agli insiemi finiti e negli spazi di Banach l'esistenza di tale limite si esprime sotto forma di condizione di Cauchy nella maniera seguente.

Teorema 1.37. *Siano X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una successione di vettori di X. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *la serie* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x_n$ *converge incondizionatamente;*

(b) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $F_\varepsilon \subset \mathbb{N}_+$ tale che*

$$F_i \subset \mathbb{N}_+ \text{ finiti e } F_\varepsilon \subset F_i \ (i = 1, 2) \qquad \Longrightarrow \qquad \left\| \sum_{n\in F_2} x_n - \sum_{n\in F_1} x_n \right\| \leq \varepsilon;$$

(c) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $F_\varepsilon \subset \mathbb{N}_+$ finito tale che*

$$F \subset \mathbb{N}_+ \text{ finito e } F \cap F_\varepsilon = \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad \left\| \sum_{n\in F} x_n \right\| \leq \varepsilon.$$

La condizione (b) non è altro che la condizione di Cauchy per l'esistenza del limite della successione generalizzata delle somme parziali $(**)$ mentre (c) è la medesima condizione espressa in termini di piccolezza delle code.

Dimostrazione. Occorre provare solo che (c) implica (a) poiché (b) segue da (a) per effetto di Teorema 1.35 e (c) non è altro che una formulazione equivalente di (b). Supponiamo quindi che valga (c) e, denotate con S_F ($F \subset \mathbb{N}_+$ finito) le somme parziali di $\{x_n\}_{n\geq 1}$ relative agli insiemi finiti definiti da $(**)$, osserviamo che per (c) esistono insiemi finiti $F_n \subset \mathbb{N}_+$ $(n \geq 1)$ tali che $F_n \subset F_{n+1}$ e

$$F \subset I \text{ finito e } F \cap F_n = \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad \|S_F\| \leq 1/n;$$

per ogni n. Posto $s_n = S_{F_n}$ per ogni n, si ha

$$n \geq m \qquad \Longrightarrow \qquad \|s_n - s_m\| = \|S_{F_n \setminus F_m}\| \leq 1/m.$$

La successione $\{s_n\}_n$ verifica quindi la condizione di Cauchy cosicché esiste $x \in X$ tale che $s_n \to x$ per $n \to +\infty$. Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che risulti $1/n_0 \leq \varepsilon/2$ e $\|s_n - x\| \leq \varepsilon/2$ per $n \geq n_0$ e poniamo $F_\varepsilon = F_{n_0}$. Per ogni insieme $F \subset \mathbb{N}_+$ finito tale che $F_\varepsilon \subset F$ si ha allora

$$\|S_F - x\| \leq \|S_F - s_{n_0}\| + \|s_{n_0} - x\| = \|S_{F\setminus F_{n_0}}\| + \|s_{n_0} - x\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Esiste quindi il limite di S_F lungo l'insieme filtrante degli insiemi finiti di $\mathbb{N}_+$ e questo conclude la dimostrazione (Teorema 1.35). □

Teorema di Dvoretzky–Rogers. La congettura secondo la quale in ogni spazio di Banach di dimensione infinita vi sono serie incondizionatamente convergenti che non sono assolutamente convergenti risale alle origini della teoria degli spazi di Banach ed è motivata dall'osservazione che in tutti gli spazi di Banach classici di dimensione infinita è possibile esibire esempi espliciti di questo comportamento. In alcuni casi questi esempi si determinano immediatamente come accade per c_0 e ℓ_p $(1 < p < +\infty)$ (Esempio 1.34) e per gli spazi di Hilbert del successivo Capitolo 3 ma in altri possono essere difficili da individuare come accade per ℓ_1 (Sezione **??**). Illustriamo in questa parte la dimostrazione di questa congettura ottenuta da A. Dvoretzky e C. A. Rogers ([19]) solo nel 1950.

Teorema 1.38 (A. Dvoretzky–C. A. Rogers). *Siano X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ con $\dim X = +\infty$ e $\{c_n\}_{n\geq 1}$ una successione di numeri positivi tali che*

$$\sum_{n\geq 1} c_n < +\infty.$$

Allora, esistono $x_n \in X$ $(n \geq 1)$ tali che

(a) $\|x_n\|^2 = c_n$ *per ogni* n*;*

(b) *la serie* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *converge incondizionatamente.*

Scegliendo ad esempio $c_n = 1/n^\alpha$ $(n \geq 1)$ con $1 < \alpha \leq 2$ si ottiene una serie incondizionatamente convergente ma non assolutamente convergente.

Corollario 1.39. *Sia X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$. Ogni serie incondizionatamente convergente di vettori di X è assolutamente convergente se e solo se risulta* $\dim X < +\infty$*.*

La dimostrazione del teorema di Dvoretzky–Rogers è di natura geometrica e la proprietà che è alla base della dimostrazione può essere formulato in maniera equivalente in termini di proprietà delle norme di $\mathbb{R}^N$.

Lemma 1.40. *Sia $|||\cdot|||$ una norma in $\mathbb{R}^N$. Allora, esistono vettori $v_1, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^N$ tali che*

(a) $|||v_n||| = 1$ *per* $n = 1, \ldots, N$*;*

(b) *per ogni $n = 1, \ldots, N$ e $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ si ha*

$$|||t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n||| \leq \left(1 + \sqrt{\frac{n(n-1)}{N}}\right) \left(t_1^2 + \cdots + t_n^2\right)^{1/2}.$$

Il significato del lemma può essere illustrato nel modo seguente: se $v_1, \ldots, v_N$ sono vettori di $\mathbb{R}^N$ di norma $|||\cdot|||$ unitaria, per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz si ha banalmente

$$|||t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n||| \leq |t_1| + \cdots + |t_n| \leq \sqrt{n} \left(t_1^2 + \cdots + t_n^2\right)^{1/2}$$

per ogni $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ e $1 \leq n \leq N$. Il lemma stabilisce quindi che è possibile scegliere i vettori $v_1, \ldots, v_N$ in modo che la disuguaglianza precedente valga con

$$c(N, n) = 1 + \sqrt{\frac{n(n-1)}{N}} \tag{***}$$

in luogo di n. Per n vicino a uno o a N e in generale per N piccolo, la stima del lemma non è migliore di quella fornita dalla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz: ad esempio, per $n = 1$ si ha $c(N, 1) = 1$ e per $n = N$ si ha $c(N, N) = 1 + \sqrt{N-1} \geq \sqrt{N}$. Se invece si ha ad esempio $N = n(n-1)$, risulta $c(N, n) = 2 \ll \sqrt{n}$ per n grande.

Dimostrazione. Sia $N \geq 2$ altrimenti è tutto ovvio. La palla unitaria

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ |||x||| \leq 1\right\}$$

nella norma $|||\cdot|||$ è un intorno compatto dell'origine (Corollario 1.22) ed è un insieme convesso e simmetrico. Sia

$$E(S) = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ \langle x \,|\, Sx\rangle \leq 1\right\} \qquad (S \in \mathbb{M}^{N\times N}_{\mathrm{sym}} N \text{ con } S > 0)$$

l'ellissoide di volume massimo contenuto in K (Esercizio II–5.27). Posto per brevità $E = E(S)$, osserviamo che possiamo assumere che sia $E = B_1$ ove B_1 denota come al solito la palla chiusa di raggio unitario nella norma euclidea. Si ha infatti $T(E) = B_1$ per un opportuno isomorfismo $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^N)$[3] e B_1 risulta essere l'ellissoide di volume massimo tra quelli contenuti in

$$K' = \left\{x : \ |||x|||' \leq 1\right\}$$

ove $|||\cdot|||'$ è la norma di $\mathbb{R}^N$ definita da $|||x|||' = |||T^{-1}x|||$ per ogni x. Allora, una volta costruiti i vettori $v'_n, \ldots, v'_N$ con le proprietà (a) e (b) relativamente alla

[3] Risulta $T = \sqrt{D}Q^*$ dove $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ è la matrice diagonale degli autovalori $\lambda_n = \lambda_n(S) > 0$ $(n = 1, \ldots, N)$ di S e $Q \in O(N)$ è la matrice ortogonale tale che $S = QDQ^*$.

norma $|||\cdot|||'$, i vettori $v_1 = T^{-1}v'_1, \dots, v_N = T^{-1}v'_N$ verificano le stesse proprietà relativamente alla norma $|||\cdot|||$.
Supponiamo dunque che la palla B_1 sia l'ellissoide di volume massimo contenuto in K e proviamo che esistono N vettori $w_1, \dots, w_N$ di $\mathbb{R}^N$ e una matrice ortogonale $R \in O(N)$ con le seguenti proprietà:

- $\|w_1\| = \ldots = \|w_N\| = 1$ e $w_1, \dots, w_N \in R(\partial K)$;
- $w_n = (w_{n,1}, \dots, w_{n,n}, 0, \dots, 0)$ con $w_{n,n} > 0$ per $n = 1, \dots, N$;
- $w_{n,1}^2 + \cdots + w_{n,n-1}^2 = 1 - w_{n,n}^2 \leq \dfrac{n-1}{N}$ per $n = 2, \dots, N$.

Procediamo ricorsivamente per $n = 1, \dots, N$. Per $n = 1$ osserviamo che, poiché la palla B_1 è l'ellissoide di volume massimo contenuto in K, esiste un vettore $w \in \partial K \cap B_1$ con $\|w\| = 1$ e per un'opportuna matrice ortogonale $R_1 \in O(N)$ si ha $w_1 = R_1 w = (1, 0, \dots, 0)$.
Supponiamo quindi di aver determinato $n-1$ vettori $w_1, \dots, w_{n-1}$ di $\mathbb{R}^N$ e una matrice ortogonale $R_{n-1} \in O(N)$ con le seguenti proprietà:

- $\|w_1\| = \ldots = \|w_{n-1}\| = 1$ e $w_1, \dots, w_{n-1} \in R_{n-1}(\partial K)$;
- $w_m = (w_{m,1}, \dots, w_{m,m}, 0, \dots, 0)$ con $w_{m,m} > 0$ per $m = 1, \dots, n-1$;

e, se $n \geq 3$, tali che si abbia inoltre

- $w_{m,1}^2 + \cdots + w_{m,m-1}^2 = 1 - w_{m,m}^2 \leq \dfrac{m-1}{N}$ per $m = 2, \dots, n-1$;

e proviamo che è possibile scegliere il vettore w_n e la matrice ortogonale $R_n \in O(N)$ in modo che per $w_1, \dots, w_n$ valgano le stesse proprietà con R_n al posto di R_{n-1}.
Consideriamo a tal fine l'ellissoide

$$E_\varepsilon = \left\{ u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N : \, q_\varepsilon(u) \leq 1 \right\}, \qquad \varepsilon > 0,$$

ove q_ε denota la forma quadratica definita da

$$q_\varepsilon(u) = (1+\varepsilon)^{N-n+1} \left(u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2 \right) + (1 + \varepsilon + \varepsilon^2)^{1-n} \left(u_n^2 + \cdots + u_N^2 \right)$$

per ogni $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ e osserviamo che risulta

$$\begin{aligned} |E_\varepsilon| &= (1+\varepsilon)^{-\frac{N-n+1}{2}(n-1)} (1+\varepsilon+\varepsilon^2)^{-\frac{1-n}{2}(N-n+1)} \omega_N = \\ &= \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon} \right)^{(N-n+1)(n-1)/2} \omega_N > \omega_N \end{aligned}$$

ove ω_N denota come al solito la misura della palla B_1 (Esercizio 5.23).
Poiché la palla B_1 è l'ellissoide di volume massimo contenuto in K, essa è anche l'ellissoide di volume massimo contenuto in $R_{n-1}K$ e dunque l'ellissoide E_ε non può essere contenuto in $R_{n-1}K$. Esiste allora un vettore $w_\varepsilon = (w_{\varepsilon,1}, \dots, w_{\varepsilon,N})$ tale che $w_\varepsilon \in E_\varepsilon$ e $w_\varepsilon \in \partial(R_{n-1}K) = R_{n-1}(\partial K)$. Poiché $w_\varepsilon \in \partial(R_{n-1}K)$ e B_1 è l'ellissoide di volume massimo contenuto in $R_{n-1}K$, il vettore w_ε non può essere un punto interno di B_1 e quindi deve essere $\|w_\varepsilon\| \geq 1$. Si ha allora

$$q_\varepsilon(w_\varepsilon) \leq 1 \leq \|w_\varepsilon\|^2$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \frac{q_\varepsilon(w_\varepsilon) - \|w_\varepsilon\|^2}{\varepsilon} &= \frac{(1+\varepsilon)^{N-n+1} - 1}{\varepsilon} \left(w_{\varepsilon,1}^2 + \cdots + w_{\varepsilon,n-1}^2 \right) + \\ &\quad + (1+\varepsilon) \frac{(1+\varepsilon+\varepsilon^2)^{1-n} - 1}{\varepsilon + \varepsilon^2} \left(w_{\varepsilon,n}^2 + \cdots + w_{\varepsilon,N}^2 \right) \leq 0 \end{aligned}$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Per compattezza, fissata una qualunque successione $\varepsilon_k \to 0^+$, la corrispondente successione di vettori w_{ε_k} converge a meno di sottosuccessioni ad un vettore $w_0 = (w_{0,1}, \dots, w_{0,N}) \in \partial(R_{n-1}K)$ per il quale, passando al limite nelle due disuguaglianze precedenti, risulta $\|w_0\| = 1$ e

$$(****) \qquad (N-n+1)\left(w_{0,1}^2 + \cdots + w_{0,n-1}^2\right) + (1-N)\left(w_{0,n}^2 + \cdots + w_{0,N}^2\right) \le 0.$$

Effettuando ora un'opportuna trasformazione ortogonale $Q \in O(N)$ della forma

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n-1} & 0 \\ 0 & Q' \end{pmatrix}, \qquad Q' \in O(N-n+1),$$

che lascia inalterate le prime $n-1$ componenti dei vettori di $\mathbb{R}^N$, risulta

$$Qw_0 = (w_{0,1}, \dots, w_{0,n-1}, w_{n,n}, 0, \dots, 0)$$

per $w_{n,n} > 0$ opportuno. Posto

$$w_n = (w_{n,1}, \dots, w_{n,n}, 0, \dots, 0) = Qw_0 \qquad \text{e} \qquad R_n = QR_{n-1} \in O(N),$$

risulta $w_n \in \partial(R_nK)$ e $\|w_n\| = 1$. Inoltre, per la sua forma la trasformazione ortogonale Q non cambia la norma del vettore di $\mathbb{R}^{n-1}$ formato dalle prime $n-1$ componenti di w_0 né quella del vettore di $\mathbb{R}^{N-n+1}$ formato dalle ultime $N-n+1$ componenti di w_0. Conseguentemente, anche w_n verifica la disuguaglianza $(****)$ ovvero risulta

$$(N-n+1)\left(w_1^2 + \cdots + w_{n-1}^2\right) + (1-N)w_n^2 \le 0$$

e da ciò, tenendo conto che $\|w_n\| = 1$, si ricava

$$w_{n,1}^2 + \cdots + w_{n,n-1}^2 = 1 - w_{n,n}^2 \le \frac{n-1}{N}.$$

Iterndo questo argomento N volte si determinano i vettori $w_1, \dots, w_N$ di $\mathbb{R}^N$ e la matrice ortogonale $R \in O(N)$ con le proprietà elencate all'inizio.
Poniamo $v_n = R^{-1}w_n$ $(n = 1, \dots, N)$ e verifichiamo che per i vettori così definiti valgono le proprietà (a) e (b) della tesi.
Da $v_n = R^{-1}w_n \in \partial K$ segue $|||v_n||| = 1$ per ogni n per la definizione di K e questo prova (a). Per provare (b), scegliamo una base $\{u_1, , \dots, u_N\}$ di $\mathbb{R}^N$ ortonormale rispetto al prodotto scalare euclideo tale che sia $u_1 = w_1$. Essendo R una matrice ortogonale, per $1 \le n \le N$ e $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ si ha allora

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{1\le m\le n} t_m v_m \right\| &= \left\| \sum_{1\le m\le n} t_m w_m \right\| = \\ &\le \left\| \sum_{1\le m\le n} t_m u_m \right\| + \left\| \sum_{1\le m\le n} t_m (w_m - u_m) \right\| \le \\ &\le \left(t_1^2 + \cdots + t_n^2\right)^{1/2} + \sum_{1\le m\le n} |t_m| \|w_m - u_m\| \le \\ &\le \left[1 + \left(\sum_{1\le m\le n} \|w_m - u_m\|^2\right)^{1/2}\right] \left(t_1^2 + \cdots + t_n^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Per $m = 1$ si ha $\|w_1 - u_1\| = 0$ per la scelta di u_1 e per $2 \le m \le n$ risulta

$$(1 - w_{m,m})^2 = 1 - 2w_{m,m} + w_{m,m}^2 \le 1 - 2w_{m,m}^2 + w_{m,m}^2 = 1 - w_{m,m}^2$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\|v_m - u_m\|^2 &= v_{m,1}^2 + \cdots + v_{m,m-1}^2 + (1 - v_{m,m})^2 \le \\ &\le v_{m,1}^2 + \cdots + v_{m,m-1}^2 + \left(1 - v_{m,m}^2\right) \le 2\frac{m-1}{N}\end{aligned}$$

per la scelta dei vettori $w_1, \ldots, w_N$. Si ha pertanto

$$\left\| \sum_{1 \le m \le n} t_m v_m \right\| \le \left[1 + \left(\sum_{1 \le m \le n} 2 \frac{m-1}{N} \right)^{1/2} \right] \left(t_1^2 + \cdots t_n^2 \right)^{1/2} \le$$

$$= \left[1 + \sqrt{\frac{n(n-1)}{N}} \right] \left(t_1^2 + \cdots t_n^2 \right)^{1/2} = c(N, n) \left(t_1^2 + \cdots t_n^2 \right)^{1/2}$$

per ogni $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ e $1 \le n \le N$ ove $c(N, n)$ è la costante definita da $(***)$. Da $B_1 \subset K$ segue allora

$$t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n \in c(N, n) \left(t_1^2 + \cdots t_n^2 \right)^{1/2} B_1 \subset c(N, n) \left(t_1^2 + \cdots t_n^2 \right)^{1/2} K$$

per ogni $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ e per $1 \le n \le N$ e questo prova (b). □

LEMMA 1.41. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ con $\dim X = +\infty$ e siano $c_1, \ldots, c_n > 0$ $(n \ge 1)$. Allora, esistono n vettori $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che*

(a) $\|x_m\|^2 = c_m$ *per* $1 \le m \le n$;

(b) $\displaystyle \left\| \sum_{m \in F} x_m \right\|^2 \le 4 \sum_{m \in F} \|x_m\|^2$ *per ogni insieme* $F \subset \{1, \ldots, n\}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $n \ge 2$ altrimenti è tutto ovvio e sia dapprima $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Poniamo $N = n(n-1)$. Poiché X ha dimensione infinita, esistono N vettori linearmente indipendenti $y_1, \ldots, y_N \in X$ e quindi la funzione

$$|||t||| = \|t_1 y_1 + \cdots + t_N y_N\|, \qquad t = (t_1, \ldots, t_N) \in \mathbb{R}^N,$$

è una norma in $\mathbb{R}^N$. Per il lemma precedente esistono allora N vettori $v_m \in \mathbb{R}^N$ $(m = 1, \ldots, N)$ di componenti $v_m = (v_{m,1}, \ldots, v_{m,N})$ e norma $|||v_m||| = 1$ per ogni m per cui risulta

$$\left|\left|\left| \sum_{m \in F} t_m v_m \right|\right|\right| \le 2 \left(\sum_{m \in F} t_m^2 \right)^{1/2}, \qquad F \subset \{1, \ldots, N\} \text{ e } \operatorname{card}(F) \le n$$

per la scelta di N. Posto

$$x_m = \sqrt{c_m} \, (v_{m,1} y_1 + \cdots + v_{m,N} y_N) \in X, \qquad m = 1, \ldots, n,$$

risulta

$$\|x_m\|^2 = c_m \|v_{m,1} y_1 + \cdots + v_{m,N} y_N\|^2 = c_m |||v_m|||^2 = c_m$$

per ogni $m = 1, \ldots, n$ e

$$\left\| \sum_{m \in F} x_m \right\| = \left\| \sum_{m \in F} \sqrt{c_m} \, (v_{m,1} y_1 + \cdots v_{m,N} y_N) \right\| =$$

$$= \left\| \left(\sum_{m \in F} \sqrt{c_m} v_m \right)_1 y_1 + \cdots + \left(\sum_{m \in F} \sqrt{c_m} v_m \right)_1 y_1 \right\| =$$

$$= \left|\left|\left| \sum_{m \in F} \sqrt{c_m} v_m \right|\right|\right| \le 2 \left(\sum_{m \in F} c_m \right)^{1/2} = 2 \left(\sum_{m \in F} \|x_m\|^2 \right)^{1/2}$$

per ogni insieme $F \subset \{1, \ldots, n\}$ con ovvio significato dei simboli.
Questo completa la dimostrazione nel caso reale e il caso complesso segue da questo poiché ogni spazio normato complesso è anche uno spazio normato reale. □

Dimostrazione (Teorema 1.38). Siano n_j $(j \geq 1)$ gli elementi di una successione strettamente crescente di interi positivi tali che

$$\sum_{n \geq n_j+1} c_n \leq \frac{1}{2^{2j}}, \qquad j \geq 1,$$

cosicché, posto $n_0 = 0$, risulta

$$\sum_{j \geq 0} \left(\sum_{n_j+1 \leq n \leq n_{j+1}} c_n \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{1 \leq n \leq n_1} c_n \right)^{1/2} + \sum_{j \geq 1} \frac{1}{2^j} < +\infty$$

e per il lemma precedente siano inoltre $x_n \in X$ $(n \geq 1)$ vettori tali che $\|x_n\|^2 = c_n$ per ogni n e

$$(*****) \qquad \left\| \sum_{m \in F} x_m \right\|^2 \leq 4 \sum_{m \in F} \|x_m\|^2$$

per ogni insieme $F \subset \{n_j+1, \ldots, n_{j+1}\}$ e per ogni j.
Consideriamo ora un riordinamento $\{y_k\}_{k \geq 1}$ di $\{x_n\}_{n \geq 1}$ e denotiamo con σ la permutazione di $\mathbb{N}_+$ che lo definisce cosicché risulta $y_k = x_{\sigma(k)}$ per ogni $k \geq 1$. Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo $j_0 = j_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che risulti

$$\sum_{j \geq j_0} \left(\sum_{n_j+1 \leq n \leq n_{j+1}} c_n \right)^{1/2} \leq \varepsilon/2$$

e scegliamo poi $k_0 = k_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che $k_0 > \max\left\{\sigma^{-1}(n) :\ 1 \leq n \leq n_{j_0}\right\}$ in modo che la sommatoria

$$\sum_{1 \leq k < k_0} y_k$$

includa tutti i vettori x_n con indice $n = 1, \ldots, n_{j_0}$. Consideriamo quindi due interi $k_2 \geq k_1 \geq k_0$ e denotiamo con $F = \{\sigma(k) :\ k_1 \leq k \leq k_2\}$ l'insieme formato dagli indici n degli elementi $x_n = y_k$ per $k_1 \leq k \leq k_2$. Tale insieme è finito e tale che $\min F \geq n_{j_0} + 1$ cosicché si ha

$$F = \bigcup_{j \geq j_0} F_j = \bigcup_{j \geq j_0} \left\{n :\ n \in F \text{ e } n_j + 1 \leq n \leq n_{j+1}\right\}$$

con ovvio significato dei simboli e quindi, tenuto conto che gli insiemi F_j sono disgiunti e solo un numero finito di essi è non vuoto, risulta

$$\left\| \sum_{k_1 \leq k \leq k_2} y_k \right\| = \left\| \sum_{k_1 \leq k \leq k_2} x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{n \in F} x_n \right\| =$$
$$= \left\| \sum_{j \geq j_0} \left(\sum_{n \in F_j} x_n \right) \right\| \leq \sum_{j \geq j_0} \left\| \sum_{n \in F_j} x_n \right\|.$$

Per $(*****)$ e per la scelta della successione $\{n_j\}_j$ si ha infine

$$\left\| \sum_{k_1 \leq k \leq k_2} y_k \right\| \leq \ldots \leq \sum_{j \geq j_0} \left\| \sum_{n \in F_j} x_n \right\| \leq$$
$$\leq 2 \sum_{j \geq j_0} \left(\sum_{n \in F_j} \|x_n\|^2 \right)^{1/2} \leq 2 \sum_{j \geq j_0} \left(\sum_{n_j+1 \leq n \leq n_{j+1}} c_n \right)^{1/2} \leq \varepsilon$$

Abbiamo così provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $k_0 = k_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che

$$k_2 \geq k_1 \geq k_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left\| \sum_{k_1 \leq k \leq k_2} y_k \right\| \leq \varepsilon$$

e questo conclude la dimostrazione. □

Alla luce del teorema di Dvoretzky–Rogers è naturale chiedersi se per ogni successione $x_n \in X$ $(n \geq 1)$ l'implicazione

$$\sum_{n\geq 1} x_n \text{ converge incondizionatamente} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n\geq 1} \|x_n\|^2 < +\infty.$$

sia vera. La risposta dipende dallo spazio X: è vera per alcuni spazi di Banach ma falsa in generale (Teorema **??** e ...). Osserviamo qui che in ogni caso l'esponente due non può essere migliorato. Prendendo

$$c_n = \frac{1}{n \log^2(n+1)}, \qquad n \geq 1,$$

in Teorema 1.38, si ricava che ogni spazio di Banach X con dimensione infinita contiene una successione di vettori $\{x_n\}_{n\geq 1}$ la cui serie associata converge incondizionatamente e tuttavia risulta

$$\sum_{n\geq 1} \|x_n\|^{2-\varepsilon} = +\infty$$

per ogni $\varepsilon > 0$.

Sommabilità e somme (non ordinate). Motivati da ..., estendiamo la nozione di sommabilità e somma (non ordinata) alle funzioni a valori in spazi normati o di Banach.

Dato X spazio normato su $\mathbb{K}$, consideriamo un insieme (non vuoto) I e una funzione $x \colon I \to X$ che rappresentiamo come un insieme indicizzato di vettori $\{x_i\}_{i\in I}$. La *serie generalizzata* associata a $\{x_i\}_{i\in I}$ che denotiamo con

$$\sum_{i\in I} x_i \qquad \text{o brevemente con} \qquad \sum_i x_i$$

è la successione generalizzata $\{s_F\}_F$ delle *somme parziali*

$$s_F = \sum_{i\in F} x_i, \qquad F \subset I \text{ finito}$$

indiccizzata lungo l'insieme filtrante dei sottoinsiemi finiti di I. La funzione $\{x_i\}_{i\in I}$ si dice *sommabile in* X se la successione generalizzata $\{s_F\}_F$ converge ad un elemento $x \in X$ lungo l'insieme filtrante degli insiemi finiti di I: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $F_\varepsilon \subset I$ tale che

$$F \subset \mathbb{N}_+ \text{ finito e } F_\varepsilon \subset F \qquad \Longrightarrow \qquad \|S_F - x\| \leq \varepsilon.$$

In tal caso il limite x è la *somma della serie generalizzata* e si scrive come al solito

$$\sum_{i\in I} x_i = x.$$

I risultati seguenti riassumono le principali proprietà delle funzioni sommabili a valori in spazi normati.

Teorema 1.42. *Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e $\{x_i\}_{i\in I}$ una funzione sommabile in X. Allora,*

(a) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $F_\varepsilon \subset I$ *finito tale che*

$$F \subset I \text{ finito e } F \cap F_\varepsilon = \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad \Big\| \sum_{i \in F} x_i \Big\| \leq \varepsilon;$$

(b) *l'insieme* $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ *è (al più) numerabile.*

La condizione (a) è l'usuale condizione di Cauchy espressa nella forma di piccolezza della coda della somma (non ordinata) e da (b) si ricava che la nozione di sommabilità in spazi normati si riduce alla convergenza incondizionata di serie di vettori.

Dimostrazione. È sufficiente provare solo (b). Per la condizione di Cauchy (a), l'insieme $\{i \in I : \|x_i\| \geq \varepsilon\}$ è finito per ogni $\varepsilon > 0$ e quindi l'insieme

$$\big\{i \in I : x_i \neq 0\big\} = \bigcup_{n \geq 1} \big\{i \in I : \|x_i\| \geq 1/n\big\}$$

è (al più) numerabile. □

Se X è uno spazio di Banach, la condizione di Cauchy del teorema precedente è anche sufficiente per la sommabilità. Omettiamo la dimostrazione che è identica alla corrispondente dimostrazione per le serie (teo:12.2:ci-cauchy).

Teorema 1.43. *Siano X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e $\{x_i\}_{i \in I}$ una funzione a valori in X. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *la funzione* $\{x_i\}_{i \in I}$ *è sommabile in* X.

(b) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $F_\varepsilon \subset I$ *finito tale che*

$$F \subset I \text{ finito e } F \cap F_\varepsilon = \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad \Big\| \sum_{i \in F} x_i \Big\| \leq \varepsilon;$$

Concludiamo questa parte osservando che, se $\{x_i\}_{i \in I}$ e $\{y_i\}_{i \in I}$ sono due funzioni sommabili in X, anche le funzioni $\{x_i + y_i\}_{i \in I}$ e $\{\lambda x_i\}_{i \in I}$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) sono sommabili in X e risulta

$$\sum_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i \qquad \text{e} \qquad \sum_{i \in I} \lambda x_i = \lambda \sum_{i \in I} x_i.$$

1.3. Convessità e completezza negli spazi normati

Esaminiamo in questa sezione il ruolo svolto dalla convessità e dalla completezza nell'ambito della teoria degli spazi normati.
Il ruolo della convessità negli spazi normati si manifesta attraverso un insieme di risultati che prendono collettivamente il nome di teorema di Hahn–Banach. Questi risultati garantiscono l'esistenza di funzionali lineari continui in quantità sufficiente per lo sviluppo di una ricca teoria della dualità. La versione del teorema di Hahn–Banach che esaminiamo in questa parte è la cosidetta versione analitica sull'estensione dei funzionali lineari continui.
La completezza degli spazi di Banach interviene in alcune delle principali proprietà che sono all'origine dell'interesse per questo tipo di struttura e si manifesta frequentemente attraverso il teorema della categoria di Baire (Teorema I–3.23). Illustriamo in questa sezione queste proprietà nella forma del principio di uniforme limitatezza e del teorema dell'applicazione aperta di Banach–Schauder.

Teorema di Hahn–Banach. Denotiamo in questa parte con X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ evidenziando di volta in volta, quando necessario, i risultati che valgono per una scelta specifica del campo $\mathbb{K}$.

Teorema 1.44 (H. Hahn–S. Banach). *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e siano $M_0 \subset X$ un sottospazio e $L_0 \in M_0^*$ un funzionale lineare limitato su M_0. Allora, esiste $L \in X^*$ tale che*

(a) *$Lx = L_0 x$ per ogni $x \in M_0$;*
(b) *$\|L\| = \|L_0\|$.*

Nell'uguaglianza in (b) la norma a sinistra è la norma di L in X^* e la norma a destra è quella di L_0 in M_0^*.
Questo risultato prende il nome di versione analitica del *teorema di Hahn–Banach* o di *teorema di estensione di Hahn–Banach*. Esso garantisce che ogni funzionale lineare limitato definito su un sottospazio di X ammette un'estensione a tutto lo spazio X che è ancora limitata e che preserva la norma. L'estensione non è in genere unica (Esercizio 1.17).

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso in cui X è uno spazio normato reale e supponiamo che sia $L_0 \neq 0$ altrimenti non c'è nulla da provare.
Consideriamo quindi l'insieme $\mathcal{M}$ formato da tutte le coppie (M', L') con M' sottospazio di X e $L' \in (M')^*$ funzionale lineare limitato su M' tali che

- $M_0 \subset M'$;
- $L' = L_0$ su M_0 e $\|L'\| = \|L_0\|$;

e muniamo l'insieme $\mathcal{M}$ dell'ordinamento parziale definito da

$$(M', L') \leq (M'', L'') \qquad \text{se} \qquad M' \subset M'' \text{ e } L' = L'' \text{ su } M'.$$

Per il teorema di massimalità di Hausdorff (Teorema I–1.5) esiste un sottoinsieme totalmente ordinato $\mathcal{M}_{\max}$ di $\mathcal{M}$ che è massimale rispetto all'inclusione. Essendo $\mathcal{M}_{\max}$ totalmente ordinato, l'insieme

$$M = \bigcup \left\{ M' : \ (M', L') \in \mathcal{M}_{\max} \right\}$$

è un sottospazio di X contenente M_0 e la funzione $L \colon M \to \mathbb{R}$ definita da

$$Lx = L'x \qquad \text{se } (M', L') \in \mathcal{M}_{\max} \text{ e } x \in M'$$

è ben definita. Inoltre, per lo stesso motivo L è un funzionale lineare e risulta $L \in M^*$ con $\|L\| = \|L_0\|$. Infatti, per $x \in M$ con $\|x\| \leq 1$, risulta $x \in M'$ per qualche coppia $(M', L') \in \mathcal{M}_{\max}$ e da ciò segue

$$|Lx| = |L'x| \leq \|L'\| = \|L_0\|$$

Quindi, il funzionale lineare L è limitato su M con $\|L\| \leq \|L_0\|$ e da $M_0 \subset M$ e $L = L_0$ su M_0 segue la disuguaglianza opposta e quindi l'uguaglianza $\|L\| = \|L_0\|$.
Per completare la dimostrazione nel caso di X spazio normato reale resta solo da provare che risulta $M = X$.
Essendo $L_0 \neq 0$, possiamo ovviamente supporre che sia $\|L\| = \|L_0\| = 1$. Supponiamo ora che risulti $M \neq X$ e scegliamo quindi $x_0 \notin M$. Avendo L norma unitaria, per ogni $x, y \in M$ risulta

$$Lx - Ly = L(x - y) \leq \|x - y\| \leq \|x - x_0\| + \|y - x_0\|$$

da cui segue

$$A_x = Lx - \|x - x_0\| \leq Ly + \|y - x_0\| = B_y$$

per ogni $x, y \in M$. Possiamo allora scegliere $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo che si abbia

$$\sup \left\{ A_x : \ x \in M \right\} \leq \alpha \leq \inf \left\{ B_y : \ y \in M \right\}$$

cosicché risulta in particolare

$$Lx - \|x - x_0\| \leq \alpha \leq Lx + \|x - x_0\|$$

ovvero
$$|Lx - \alpha| \leq \|x - x_0\|$$
per ogni $x \in M$. Mettendo ora $-x/t$ con $x \in M$ e $t \neq 0$ al posto di x si ottiene
$$(*) \qquad |Lx + \alpha t| \leq \|x + tx_0\|, \qquad x \in M, \quad t \neq 0,$$
e la disuguaglianza così ottenuta vale anche banalmente per $t = 0$. Consideriamo quindi il sottospazio M' definito da
$$M' = \operatorname{span}\{M, x_0\} = M \oplus \mathbb{R}x_0 = \big\{x + tx_0 : \ x \in M \text{ e } t \in \mathbb{R}\big\}.$$
Ogni vettore $x' \in M'$ ha così un'unica rappresentazione nella forma $x' = x + tx_0$ con $x \in M$ e $t \in \mathbb{R}$. Definiamo allora $L' \colon M' \to \mathbb{R}$ ponendo
$$L'x' = L'(x + tx_0) = Lx + \alpha t, \qquad x' = x + tx_0 \in M'.$$
È chiaro che la funzione L' così definita è un funzionale lineare su M' tale che $L = L'$ su M e da $(*)$ segue $L' \in (M')^*$ con $\|L'\| \leq 1$ cosicché da $L' = L$ su M segue $\|L'\| \geq \|L\| = 1$.
Se dunque fosse $M \neq X$, l'insieme $\mathcal{M}_{\max} \cup \{(M', L')\}$ sarebbe un sottoinsieme totalmente ordinato di $\mathcal{M}$ contenente $\mathcal{M}_{\max}$ in contraddizione con la massimalità di $\mathcal{M}_{\max}$. Abbiamo così provato che risulta $M = X$ e questo completa la dimostrazione nel caso di X spazio normato reale.
Sia infine $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e sia $L_0 \in M^*$ un funzionale $\mathbb{C}-$lineare limitato su M. Allora, con la terminologia e le notazioni di Proposizione 1.20, la sua parte reale $\Lambda_0 = \operatorname{Re}(L_0)$ è un funzionale $\mathbb{R}-$lineare limitato su M con $\|\Lambda_0\| = \|L_0\|$. Dalla dimostrazione del caso reale segue allora l'esistenza di un'estensione $\Lambda \in X^*_{\mathbb{R}}$ di Λ_0 con $\|\Lambda\| = \|\Lambda_0\|$ e quindi, ponendo
$$Lx = \Lambda x - i\Lambda(ix), \qquad x \in X,$$
si ottiene un funzionale $\mathbb{C}-$lineare limitato su X che estende L_0 e avente norma $\|L\| = \|\Lambda\| = \|\Lambda_0\| = \|L_0\|$. □

Evidenziamo nei corollari seguenti alcune conseguenze del teorema di Hahn–Banach.

Corollario 1.45. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e siano $M \subset X$ un sottospazio chiuso e $x_0 \in X \setminus M$ un vettore. Allora, esiste $L \in X^*$ tale che*

- $Lx = 0$ *per ogni* $x \in M$ *e* $Lx_0 = d(x_0, M) > 0$*;*
- $\|L\| = 1$.

Equivalentemente, nelle stesse ipotesi esiste $L \in X^*$ con $\|L\| = 1/d(x_0, M)$ che si annulla su M e vale $Lx_0 = 1$.

Dimostrazione. Sia $d = d(x_0, M) > 0$. Poniamo
$$M_0 = \operatorname{span}\{M, x_0\} = M \oplus \mathbb{R}x_0$$
e consideriamo il funzionale lineare $L_0 \colon M_0 \to \mathbb{K}$ definito da
$$L_0x' = L_0(x + \lambda x_0) = \lambda d, \qquad x' = x + \lambda x_0 \in M'.$$
Si ha allora $L_0x = 0$ per ogni $x \in M$ e $L_0x_0 = d$. Inoltre, per ogni vettore $x' \in M'$, $x' = x + \lambda x_0 \in M'$ con $x \in M$ e $\lambda \neq 0$, da $-x/\lambda \in M$ segue
$$|L_0x'| = |L_0(x + \lambda x_0)| = |\lambda| d \leq |\lambda| \cdot \|x_0 - (-x/\lambda)\| = \|x + \lambda x_0\| = \|x'\|$$
e lo stesso accade ovviamente quando $\lambda = 0$. Quindi, L_0 è un funzionale lineare limitato su M_0 con $\|L_0\| \leq 1$. Viceversa, per ogni $x \in M$ si ha
$$\|L_0\|\|x - x_0\| \geq |L_0(x - x_0)| = d$$
da cui segue
$$\|L_0\| d = \|L_0\| \inf\big\{\|x - x_0\| : \ x \in M\big\} \geq d.$$

Essendo $d > 0$, deve essere $\|L_0\| \geq 1$ da cui segue $\|L_0\| = 1$. Estendendo L_0 mediante il teorema di Hahn–Banach si ottiene un funzionale lineare limitato $L \in X^*$ con le proprietà elencate. $\square$

COROLLARIO 1.46. *Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e $x_0 \in X$ un vettore con $x_0 \neq 0$. Allora, esiste $L \in X^*$ tale che $Lx_0 = \|x_0\|$ e $\|L\| = 1$.*

In particolare, il duale X^* di X non si riduce al solo spazio banale $\{0\}$ e contiene funzionali lineari limitati in quantità sufficiente per separare i punti di X: se $x_i \in X$ $(i = 1, 2)$ e $x_1 \neq x_2$, esiste $L \in X^*$ tale che $Lx_1 \neq Lx_2$. Inoltre, risulta

$$\|x\| = \sup \left\{ |Lx| : \ L \in X^* \text{ e } \|L\| \leq 1 \right\}, \qquad x \in X.$$

Sistemi di equazioni lineari. All'origine del teorema di Hahn–Banach vi è il problema della risoluzione di sistemi lineari di equazioni in spazi normati. Per illustrare questo legame, consideriamo il sistema di N equazioni lineari

$$(**) \qquad \begin{cases} a_1^1 L_1 + \cdots + a_1^M L_M = c_1 \\ a_2^1 L_1 + \cdots + a_2^M L_M = c_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_N^1 L_1 + \cdots + a_N^M L_M = c_N \end{cases}$$

nelle incognite $L_1, \ldots, L_M$ con coefficienti $a_n^m \in \mathbb{K}$ e $c_n \in \mathbb{K}$ $(m = 1, \ldots, M$ e $n = 1, \ldots, N)$. Denotate allora con $\{e_1 \ldots, e_M\}$ e con $\{e^1, , \ldots, e^M\}$ la base canonica di $\mathbb{K}^M$ e la sua base duale e con $a_1, \ldots, a_n$ i vettori di componenti

$$a_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^M \end{pmatrix} = a_n^1 e_1 + \cdots + a_n^M e_M \in \mathbb{K}^M, \qquad n = 1, \ldots, N,$$

risolvere il sistema $(**)$ equivale a determinare un funzionale lineare

$$L = (L_1, \ldots, L_M) = L_1 e^1 + \cdots + L_M e^M \in \left(\mathbb{K}^M\right)^*,$$

che assuma i valori $La_n = c_n$ per ogni n.

In uno spazio normato X di dimensione infinita, consideriamo un insieme di vettori A di cardinalità arbitraria e un corrispondente insieme di scalari $c_a \in \mathbb{K}$ al variare di $a \in A$. In analogia con il sistema lineare $(**)$, la determinazione di un funzionale lineare limitato $L \in X^*$ per cui si abbia $La = c_a$ per ogni $a \in A$ può essere allora interpretata come la risoluzione di un sistema di equazioni lineari e tali equazioni possono essere infinite se A è tale. Il teorema di Hahn–Banach stabilisce quando ciò sia possibile.

TEOREMA 1.47 (H. Hahn). *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e siano $A \subset X$ un insieme di vettori e $\{c_a : a \in A\} \subset \mathbb{K}$ un corrispondente insieme di scalari. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *esiste $L \in X^*$ tale che $La = c_a$ per ogni $a \in A$;*

(b) *esiste $M \geq 0$ tale che*

$$|\lambda_1 c_{a_1} + \cdots + \lambda_n c_{a_n}| \leq M \|\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n\|$$

per ogni n e per ogni $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ e $a_1, \ldots, a_n \in A$.

In tal caso, si può avere $\|L\| \leq M$.

Dimostrazione. Occorre provare solo che (b) implica (a) poiché il viceversa è ovvio.
Sia $M_0 = \operatorname{span}(A)$ e, con ovvio significato dei simboli, siano

$$x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m = \lambda_1' a_1' + \cdots + \lambda_n' a_n'$$

due rappresentazioni di $x \in M_0$ come combinazione lineare di elementi di A. Si ha allora

$$|(\lambda_1 c_{a_1} + \cdots + \lambda_m c_{a_m}) - (\lambda_1' c_{a_1'} + \cdots + \lambda_n' c_{a_n'})| \le \\ \le M\|(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m) - (\lambda_1' a_1' + \cdots + \lambda_n' a_n')\| = 0$$

e quindi la formula

$$L_0 x = \lambda_1 c_{a_1} + \cdots + \lambda_n c_{a_n}, \qquad x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \in M_0,$$

definisce una funzione su M_0 che risulta essere un funzionale lineare limitato su M_0 con norma $\|L_0\| \le M$. Estendendo L_0 mediante il teorema di Hahn–Banach si ottiene un funzionale lineare limitato $L \in X^*$ con le proprietà elencate in (a). □

Nel teorema precedente è possibile scambiare il ruolo di X e di X^* pur di restringersi ad un numero finito di equazioni.

Teorema 1.48 (E. Helly). *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e siano $L_1, \dots, L_n \in X^*$ un insieme finito di funzionali lineari limitati e $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ un corrispondente insieme di scalari. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *esiste $x_0 \in X$ tale che $L_m x_0 = c_m$ per ogni m;*
(b) *esiste $M \ge 0$ tale che*

$$|\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_n c_n| \le M\|\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n\|$$

per ogni $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

In tal caso, per ogni $\varepsilon > 0$ si può avere $x_0 = x_\varepsilon$ con $\|x_\varepsilon\| \le M + \varepsilon$.

La dimostrazione del teorema precedente utilizza il seguente risultato di algebra lineare.

Lemma 1.49. *Sia X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e siano $L_1, \dots, L_n \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ e $L \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ funzionali lineari. Allora,*

$$L \in \operatorname{span}(\{L_1, \dots, L_n\}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(L_1) \cap \cdots \cap \ker(L_n) \subset \ker(L).$$

Dimostrazione. È sufficiente provare solo l'implicazione $\Longleftarrow$ poiché il viceversa è ovvio e possiamo inoltre supporre senza perdita di generalità che i funzionali lineari $L_1, \dots, L_n$ siano linearmente indipendenti.
Sia $T \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K}^{n+1})$ l'operatore lineare definito da

$$Tx = (L_1 x, \dots, L_n x, Lx), \qquad x \in X.$$

Allora, $(0, \dots, 0, 1) \notin \operatorname{im}(T)$ e quindi $\operatorname{im}(T)$ è un sottospazio proprio di $\mathbb{K}^{n+1}$. Conseguentemente esiste un funzionale lineare su $\mathbb{K}^{n+1}$ che è non nullo ma che si annulla su $\operatorname{im}(T)$ e quindi esistono $n+1$ scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che risulti

$$\lambda_1(L_1 x) + \cdots + \lambda_n(L_n x) - \lambda(Lx) = 0, \qquad x \in X,$$

da cui segue

$$\lambda L x = \lambda_1 L_1 x + \cdots + \lambda_n L_n x, \qquad x \in X.$$

Non potendo essere $\lambda = 0$ poiché i funzionali lineari $L_1, \dots, L_n$ sono linearmente indipendenti, risulta

$$Lx = (\lambda_1/\lambda) L_1 x + \cdots + (\lambda_n/\lambda) L_n x, \qquad x \in X,$$

e questo completa la dimostrazione. □

Dimostrazione (Teorema 1.48). Occorre provare solo che (b) implica (a) poiché il viceversa è ovvio.
Se è $c_m = 0$ per ogni m, la tesi vale banalmente con $x_0 = 0$ e quindi si può suppore che sia $c_m \neq 0$ per qualche m cosicchè deve essere $L_m \neq 0$ per lo stesso indice m.
Supponiamo dapprima che i funzionali lineari $L_1, \dots, L_n$ siano linearmente indipendenti e proviamo che l'operatore lineare $T \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K}^n)$ definito da

$$Tx = (L_1x, \dots, L_nx), \qquad x \in X,$$

è suriettivo su $\mathbb{K}^n$.
Se è $n = 1$, si ha $T = L_1$ con $L_1 \neq 0$ da cui segue $\operatorname{im}(T) = \operatorname{im}(L_1) = \mathbb{K}$. Se è invece $n \geq 2$, essendo i funzionali lineari $L_1, \dots, L_n$ linearmente indipendenti, per ogni $m = 1, \dots, n$ esiste $x_m \in X$ tale che

$$x_m \in \bigcap_{j \neq m} \ker(L_j) \qquad \text{e} \qquad x_m \notin \ker(L_m)$$

(Lemma 1.49) cosicché per i vettori normalizzati $u_m = x_m/\|x_m\|$ risulta $Tu_m = e_m$ per ogni m ove $\{e_1, \dots, e_n\}$ denota come al solito la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Da questo segue $\operatorname{im}(T) = \mathbb{K}^n$.
Essendo T suriettivo su $\mathbb{K}^n$, si ha $Ty_0 = (c_1, \dots, c_n)$ per $y_0 \in X$ opportuno da cui segue $L_my_0 = c_m$ per ogni m e da $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$ segue che deve essere

$$y_0 \notin \ker(L_1) \cap \ldots \cap \ker(L_n).$$

Il sottospazio $Y = \ker(L_1) \cap \ldots \cap \ker(L_n)$ è chiuso e quindi esiste $L \in X^*$ con $\|L\| = 1$ per cui risulta $Lx = 0$ per ogni $x \in Y$ e $Ly_0 = d(y_0, Y)$ (Corollario 1.45). Da $Y \subset \ker(L)$ segue che risulta $L = \lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n$ per $\lambda_m \in \mathbb{K}$ opportuni $(m = 1, \dots, n)$. Si ha allora

$$\begin{aligned} d(y_0, Y) = Ly_0 &= \left| \sum_{1 \leq m \leq n} \lambda_m L_m y_0 \right| = \\ &= \left| \sum_{1 \leq m \leq n} \lambda_m c_m \right| \leq M \left\| \sum_{1 \leq m \leq n} \lambda_m L_m \right\| = M\|L\| = M \end{aligned}$$

e quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $z_\varepsilon \in Y$ tale che $\|y_0 - z_\varepsilon\| \leq M + \varepsilon$. Ponendo $x_\varepsilon = y_0 - z_\varepsilon$, risulta $\|x_\varepsilon\| \leq M + \varepsilon$ e $L_m x_\varepsilon = L_m y_0 = c_m$ per ogni m e questo completa la dimostrazione della tesi nel caso di funzionali lineari $L_1, \dots, L_n$ linearmente indipendenti.
Supponiamo infine che, rinumerando opportunamente i funzionali lineari, per qualche $1 \leq m < n$ i funzionali lineari $L_1, \dots, L_m$ siano linearmente indipendenti e tali che

$$\operatorname{span}\{L_1, \dots, L_m\} = \operatorname{span}\{L_1, \dots, L_n\}.$$

Si ha allora

$$L_k = \sum_{1 \leq j \leq m} \lambda_{k,j} L_j, \qquad k = 1, \dots, n,$$

per opportuni coefficienti $\lambda_{k,j} \in \mathbb{K}$ ($j = 1, \dots, m$ e $k = 1, \dots, n$) e, per quanto provato in precedenza, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $x_0 \in X$ con $\|x_0\| \leq M + \varepsilon$ tale che $L_j x_0 = c_j$ per $j = 1, \dots, m$. Si ha allora

$$L_k x_0 = \sum_{1 \leq j \leq m} \lambda_{k,j} L_j x_0 = \sum_{1 \leq j \leq m} \lambda_{k,j} c_j, \qquad k = 1, \dots, n,$$

da cui segue

$$|L_k x_0 - c_k| = \left| \sum_{1 \le j \le m} \lambda_{k,j} c_j - c_k \right| \le M \left\| \sum_{1 \le j \le m} \lambda_{k,j} L_j - L_k \right\| = 0$$

per ogni k e questo completa la dimostrazione. □

Principio di uniforma limitatezza. L'enunciato del *principio di uniforme limitatezza di Banach–Steinhaus* è il seguente.

Teorema 1.50 (S. Banach–H. Steinhaus). *Siano X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e Y uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e siano $T_i \in \mathrm{L}(X, Y)$ $(i \in I)$ operatori lineari limitati. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) $\sup_{i \in I} \|T_i\| = +\infty$;

(b) *esiste un insieme $G \in \mathcal{G}_\delta(X)$ denso tale che*

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| = +\infty, \qquad x \in G.$$

Nell'enunciato precedente la cardinalità dell'insieme degli indici I è arbitraria.
Il teorema di Banach–Steinhaus è abitualmente enunciato nella forma della alternativa seguente: o la famiglia di operatori lineari limitati $\{T_i\}_{i \in I}$ è uniformemente limitata cioè risulta

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| \le M$$

per qualche $M \ge 0$ oppure vale (b) cioè esiste un insieme $G \in \mathcal{G}_\delta(X)$ denso su cui gli operatori T_i non restano puntualmente limitati.

Dimostrazione. Ogni funzione $x \in X \mapsto \|T_i x\|$ $(i \in I)$ è continua e quindi la funzione $\varphi \colon X \to [0, +\infty]$ definita da

$$\varphi(x) = \sup_{i \in I} \|T_i x\|, \qquad x \in X,$$

è semicontinua inferiormente (Corollario I–2.158) e tutti gli insiemi

$$V_n = \left\{ x \in X : \varphi(x) > n \right\}, \qquad n \ge 0,$$

sono aperti. Procediamo ora a provare l'equivalenza tra (a) e (b).

(a) Se esistesse $n \ge 0$ tale che V_n non fosse denso, esisterebbero $x_0 \in X$ e $r > 0$ per i quali si avrebbe $V_n \cap B_r[x_0] = \varnothing$ e da ciò seguirebbe

$$x \in B_r[x_0] \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x) \le n \quad \Longrightarrow \quad \|T_i x\| \le n \qquad \forall\, i \in I.$$

Per ogni $x \in X$ con $\|x\| \le r$ si ha allora $x = (x_0 + x) - x_0$ con $x_0 + x \in B_r[x_0]$ e $-x_0 \in B_r[x_0]$ cosicché risulterebbe

$$\|T_i x\| \le \|T_i x_0\| + \|T_i(x_0 + x)\| \le \|T_i x_0\| + n \le 2n$$

per ogni indice $i \in I$ e quindi si avrebbe $\|T_i\| \le 2n/r$ per ogni i in contraddizione con (a). Pertanto, tutti gli insiemi V_n sono densi in X e, posto $G = \bigcap_n V_n$, l'affermazione (b) segue dal teorema di Baire (Teorema I–3.23).

(b) Sia $G \in \mathcal{G}_\delta$ denso in X come in (b). Risulta allora

$$G \subset \bigcap V_n$$

e quindi ogni insieme V_n è un aperto denso di X. Per ogni n esistono allora $x_n \in X$ con $\|x_n\| \le 1$ e $i_n \in I$ tali che $\|T_{i_n} x_n\| > n$. Risulta quindi $\|T_{i_n}\| > n$ per ogni N e questo prova (a). □

Corollario 1.51. *Siano X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e Y uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e siano $T_n \in \mathrm{L}(X, Y)$ $(n \geq 1)$ operatori lineari limitati tali che la successione $\{T_n x\}_n$ converge per ogni $x \in X$. Allora, posto*

$$Tx = \lim_{n \to +\infty} T_n x, \qquad x \in X,$$

risulta

(a) $T \in \mathrm{L}(X, Y)$;

(b) $\sup_n \|T_n\| < +\infty$ *e* $\|T\| \leq \liminf_{n \to +\infty} \|T_n\|$.

Nel caso di operatori lineari limitati definiti su uno spazio di Banach la convergenza puntuale è dunque sufficiente a garantire la continuità del limite a differenza di quanto accade per le funzioni non lineari.

Dimostrazione. È chiaro che $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e per il principio di uniforme limitatezza risulta $\|T_n\| \leq M$ per ogni n per qualche $M \geq 0$. Si ha allora

$$\|x\| \leq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|Tx\| = \lim_{n \to +\infty} \|T_n x\| \leq \limsup_{n \to +\infty} \|T_n\| \leq M$$

e da ciò segue $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ con $\|T\| \leq M$. Per provare la disuguaglianza in (b), scegliamo una sottosuccessione $\{T_{n_k}\}_k$ tale che

$$\lim_{k \to +\infty} \|T_{n_k}\| = \liminf_{n \to +\infty} \|T_n\| < +\infty.$$

Si ha allora come prima

$$\|x\| \leq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|Tx\| = \lim_{k \to +\infty} \|T_{n_k} x\| \leq \lim_{k \to +\infty} \|T_{n_k}\| = \liminf_{n \to +\infty} \|T_n\|$$

e questo prova (b). □

Teorema dell'applicazione aperta. L'altra importante conseguenza della completezza degli spazi di Banach che esaminiamo in questa sezione è il *teorema di Banach–Schauder* o *teorema dell'applicazione aperta.*

Teorema 1.52 (S. Banach–J. Schauder). *Siano X e Y due spazi di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e sia $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ un operatore lineare limitato tale che*

$$\mathrm{im}(T) = Y.$$

Allora, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\big\{y : \ \|y\| < \delta\big\} \subset \big\{Tx : \ \|x\| < 1\big\}.$$

Dimostrazione. Denotiamo per brevità con $B_r = B_r(0)$ $(r > 0)$ le palle aperte di centro nell'origine in entrambi gli spazi di Banach e dividiamo la dimostrazione nei passi seguenti osservando altresì che l'ipotesi di suriettività di T interviene solo nella dimostrazione del primo passo.

Passo 1: $\exists\, \delta > 0 \ : \ B_\delta \subset \mathrm{cl}\big(T(B_1)\big)$.

Essendo T suriettivo, si ha

$$Y = \bigcup_{k \geq 1} T(B_k)$$

e quindi per il teorema di Baire (Teorema I–3.23) esistono $k \geq 1$ e W insieme aperto (non vuoto) tale che risulti

$$W \subset \mathrm{cl}\big(T(B_k)\big).$$

Ogni punto di W è quindi il limite di una successione di immagini mediante T di punti di B_k. Fissiamo ora $y_0 \in W$ e $\eta > 0$ tale che risulti $B_\eta(y_0) \subset W$. Per ogni $y \in Y$ con $\|y\| \leq \eta$ esistono allora due successioni $\{x'_j\}_j, \{x''_j\}_j \subset B_k$ tali che

$$\lim_{j \to +\infty} Tx'_j = y_0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{j \to +\infty} Tx''_j = y_0 - y.$$

Posto $x_j = x'_j - x''_j \in B_{2k}$ per ogni j, risulta allora

$$\lim_{j\to+\infty} Tx_j = \lim_{j\to+\infty} Tx'_j - \lim_{j\to+\infty} Tx''_j = y_0 - (y_0 - y) = y.$$

Abbiamo così provato che risulta

$$B_\eta \subset \mathrm{cl}\big(T(B_{2k})\big)$$

e la conclusione segue per linearità prendendo $\delta = \eta/2k$.

Passo 2: per ogni $y \in B_\delta$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $x_n \in X$ $(n \geq 1)$ tali che

- $\|x_1\| < 1$ e $\|x_n\| < \dfrac{\varepsilon}{2^{n-1}}$ per $n \geq 2$;
- $\|Tx_1 + \cdots + Tx_n - y\| < \delta\dfrac{\varepsilon}{2^n}$ per $n \geq 1$.

Siano $y \in Y$ con $\|y\| < \delta$ e $\varepsilon > 0$ fissati. Per quanto provato al passo precedente, esiste $x_1 \in X$ tale che risulti

$$\|x_1\| < 1 \qquad \text{e} \qquad \|Tx_1 - y\| \leq \delta\frac{\varepsilon}{2}.$$

Riapplichiamo quanto provato al passo precedente al vettore $\overline{y}_2 = 2(y - Tx_1)/\varepsilon$ avente norma $\|\overline{y}_2\| < \delta$: esiste allora $\overline{x}_2 \in X$ tale che risulti

$$\|\overline{x}_2\| < 1 \qquad \text{e} \qquad \left\|T\overline{x}_2 - \frac{2}{\varepsilon}\,(y - Tx_1)\right\| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Ponendo $x_2 = \varepsilon\overline{x}_2/2$ risulta

$$\|x_2\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \|Tx_1 + Tx_2 - y\| \leq \delta\frac{\varepsilon}{2^2}.$$

Iterando questo argomento si determina una successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ con le proprietà cercate.

Possiamo ora concludere la dimostrazione. Per $y \in Y$ con $\|y\| < \delta$ e $\varepsilon > 0$ fissati, sia $\{x_n\}_n$ la successione ad essi associata dal passo precednete. La serie

$$\sum_{n\geq 1} x_n$$

converge allora assolutamente e, denotata con x la sua somma (Teorema 1.8), risulta

$$\|x\| < 1 + \sum_{n\geq 2} \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} = 1 + \varepsilon$$

e $Tx = y$ per continuità. Abbiamo così provato che risulta

$$B_\delta \subset T(B_{1+\varepsilon}) \qquad \text{ovvero} \qquad B_{\delta/(1+\varepsilon)} \subset T(B_1)$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e da

$$B_\delta = \bigcup_{\varepsilon>0} B_{\delta/(1+\varepsilon)} \subset T(B_1)$$

segue la tesi. □

In conseguenza della linearità, ogni operatore lineare limitato suriettivo tra spazi di Banach è un applicazione aperta e ogni operatore lineare limitato che sia al contempo iniettivo e suriettivo è automaticamente un isomorfismo.

Corollario 1.53. *Siano X e Y spazi di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e sia $T \in \mathrm{L}(X\,,Y)$ un operatore lineare limitato tale che*

$$\mathrm{im}(T) = Y.$$

Allora,

(a) *T è un'applicazione aperta;*
(b) *se T è iniettivo risulta $T \in \mathrm{Iso}(X\,,Y)$.*

Dimostrazione. (a) Siano $U \subset X$ un insieme aperto (non vuoto) e $y_0 \in T(U)$. Esistono allora $x_0 \in U$ e $r > 0$ tali che risulti $Tx_0 = y_0$ e $B_r(x_0) \subset U$ ed esiste $\delta > 0$ tale che risulti

$$B_\delta(0) \subset T\big(B_1(0)\big)$$

(Teorema 1.52). Si ha allora per linearità

$$y \in B_{r\delta}(y_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (y - y_0)/r \in B_\delta(0) \subset T\big(B_1(0)\big)$$

e quindi per ogni $y \in B_{r\delta}(y_0)$ esiste $x \in B_1(0)$ tale che $Tx = (y - y_0)/r$ da cui segue $T(x_0 + rx) = y$ con $x_0 + rx \in B_r(x_0)$. Abbiamo così provato che risulta

$$B_{r\delta}(y_0) \subset T\big(B_r(x_0)\big) \subset T(U)$$

e quindi $T(U)$ è un insieme aperto.

(b) Come prima, sia $\delta > 0$ tale che risulti

$$B_\delta(0) \subset T\big(B_1(0)\big)\,.$$

Quindi, essendo T iniettivo, per ogni $x \in X$ con $\|x\| \geq 1$ deve essere $\|Tx\| \geq \delta$ da cui segue $\|Tx\| \geq \delta\|x\|$ per ogni $x \in X$ ovvero

$$\|T^{-1}y\| \leq \|y\|/\delta, \qquad y \in Y,$$

poiché ogni vettore $y \in Y$ è della forma $y = T^{-1}x$ per uno ed un solo $x \in X$. □

Concludiamo questa parte esaminando alcune proprietà degli operatori lineari limitati con rango chiuso che sono conseguenza del teorema dell'applicazione aperta.

Teorema 1.54. *Siano $X\,,Y$ due spazi di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e sia $T \in \mathrm{L}(X\,,Y)$ un operatore lineare limitato con operatore quoziente $T_\sharp \in \mathrm{L}(X/\ker(T)\,,Y)$. Allora,*

$$\mathrm{im}(T) \text{ chiuso} \qquad \Longrightarrow \qquad T_\sharp \in \mathrm{Iso}(X/\ker(T)\,,\mathrm{im}(T)).$$

Dimostrazione. L'operatore lineare quoziente è biettivo da $X/\ker(T)$ su $\mathrm{im}(T)$ (Teorema 1.29−(b)). Essendo $\mathrm{im}(T)$ chiuso, la conclusione segue dal teorema dell'applicazione aperta (Corollario 1.53). □

Corollario 1.55. *Siano $X\,,Y$ due spazi di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e sia $T \in \mathrm{L}(X\,,Y)$ un operatore lineare limitato. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) $\mathrm{im}(T)$ *chiuso in Y;*

(b) *esiste $K \geq 0$ con la seguente proprietà:*

$$\forall\, y \in \mathrm{im}(T) \quad \exists\, x \in X : \, Tx = y \text{ e } \|x\| \leq K\|Tx\|;$$

(c) *esiste $K \geq 0$ tale che*

$$d(x\,,\ker(T)) \leq K\|Tx\|, \qquad x \in X.$$

Dimostrazione. Se $\mathrm{im}(T)$ è un sottospazio chiuso di Y, l'operatore lineare quoziente $T_\sharp \in \mathrm{L}(X/\ker(T)\,,Y)$ è un isomorfismo di $X/\ker(T)$ su $\mathrm{im}(T)$ per il teorema precedente e (b) e (c) seguono entrambe dalla continuità di $(T_\sharp)^{-1}$.

Viceversa, se $\{y_n\}_n$ è una successione di elementi di $\mathrm{im}(T)$ che converge a $y \in Y$, da (b) o (c) segue che esistono vettori $x_n \in X$ tali che $Tx_n = y_n$ per ogni n che formano una successione di Cauchy in X. Allora, $x_n \to x$ in X per $n \to +\infty$ per $x \in X$ opportuno da cui segue $Tx = y$ per continuità e questo completa la dimostrazione. □

Isomorfismi di spazi di Banach. Esaminiamo in questa parte alcune proprietà degli isomorfismi tra spazi di Banach che sono conseguenza della completezza.

Teorema 1.56 (C. G. Neumann). *Siano X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e $T \in \mathrm{L}(\mathbb{E})$ un operatore lineare limitato con $\|T\| < 1$. Allora,* $\mathrm{id}_X - T \in \mathrm{Iso}(X)$.

Qui $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Iso}(X)$ denota l'operatore lineare identità di X ed il teorema di Von Neumann garantisce che, per ogni perturbazione sufficientemente piccola T, l'operatore lineare $\mathrm{id}_X - T$ ottenuto perturbando l'identità è ancora un isomorfismo di X.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo ricorsivamente $T^0 = \mathrm{id}_X$ e $T^{n+1} = TT^n$ per ogni $n \geq 0$. La serie

$$\sum_{n\geq 0} T^n$$

converge assolutamente (Teorema 1.13) e quindi, essendo $\mathrm{L}(X)$ uno spazio di Banach, converge (Teorema 1.8). Siano $S \in \mathrm{L}(X)$ la sua somma e S_n $(n \geq 0)$ le sue somme parziali. Si ha allora

$$\lim_{n\to+\infty} S_n\,(\mathrm{id}_X - T) = S\,(\mathrm{id}_X - T)$$

(Teorema 1.13) in $\mathrm{L}(X)$ e da

$$S_n\,(\mathrm{id}_X - T) = \mathrm{id}_X - T^{n+1}, \qquad n \geq 0,$$

si conclude che deve essere $S\,(\mathrm{id}_X - T) = \mathrm{id}_X$ poiché $T^n \to 0$ per $n \to +\infty$ in $\mathrm{L}(X)$. Analogamente, da

$$\lim_{n\to+\infty} (\mathrm{id}_X - T)\,S_n = (\mathrm{id}_X - T)\,S$$

in $\mathrm{L}(X)$ e da $(\mathrm{id}_X - T)\,S_n = \mathrm{id}_X - T^{n+1}$ per ogni $n \geq 0$, si conclude come prima che è $(\mathrm{id}_X - T)\,S = \mathrm{id}_X$. Pertanto, l'operatore lineare $(\mathrm{id}_X - T)$ è invertibile e risulta $(\mathrm{id}_X - T)^{-1} = S \in \mathrm{L}(X)$. □

TEOREMA 1.57. *Siano X e Y due spazi di Banach sul campo $\mathbb{K}$ isomorfi tra loro come spazi normati. Allora,*

(a) *se $T \in \mathrm{Iso}(X, Y)$ e $S \in \mathrm{L}(X, Y)$ sono tali che*

$$\|S - T\| < 1/\|T^{-1}\|,$$

risulta $S \in \mathrm{Iso}(X, Y)$;

(b) *l'applicazione*

$$T \in \mathrm{Iso}(X, Y) \mapsto T^{-1} \in \mathrm{L}(Y, X)$$

è continua.

L'insieme $\mathrm{Iso}(X, Y)$ degli isomorfismi di X su Y è quindi aperto in $\mathrm{L}(X, Y)$.

DIMOSTRAZIONE. (a) Sia S come in (a) cosicché risulta

$$\|S - T\|\|T^{-1}\| < 1.$$

Si ha allora

$$S = T - (T - S) = T\left[\mathrm{id}_{\mathbb{E}} - T^{-1}(T - S)\right]$$

con $\mathrm{id}_X - T^{-1}(T - S) \in \mathrm{Iso}(X, Y)$ (Teorema 1.56). Quindi risulta $S \in \mathrm{Iso}(X, Y)$.
(b) Sia $T \in \mathrm{Iso}(X, Y)$ fissato. Consideriamo $S \in \mathrm{Iso}(X, Y)$ tale che

$$\|S - T\| < 1/\|T^{-1}\|.$$

Si ha allora

$$\|x\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\| \leq \|T^{-1}\|\left(\|Sx\| + \|T - S\|\|x\|\right), \qquad x \in X,$$

e da ciò segue

$$\left(\frac{1}{\|T^{-1}\|} - \|T - S\|\right)\|x\| \leq \|Sx\|, \qquad x \in X.$$

Prendendo $x = S^{-1}y$ con $y \in Y$, si trova

$$\|S^{-1}y\| \leq \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|T^{-1}\|\|T - S\|}\|y\|, \qquad y \in Y,$$

da cui segue infine

$$\|S^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|T^{-1}\|\|T - S\|}.$$

Per $S \in \mathrm{Iso}(X, Y)$ scelto come sopra si ha allora

$$S^{-1} - T^{-1} = S^{-1}(T - S)T^{-1}.$$

da cui segue quindi

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|^2}{1 - \|T^{-1}\|\|T - S\|}\|T - S\|$$

per ogni $S \in \mathrm{Iso}(X, Y)$ con $\|T - S\| < 1/\|T^{-1}\|$ e questo prova l'asserto. □

1.4. Duale, biduale e spazi riflessivi

Esaminiamo in questa sezione la relazione di dualità tra uno spazio di Banach e il suo duale e le relazioni che intercorrono tra lo spazio stesso e il suo biduale inteso come spazio di Banach dei funzionali lineari continui sul duale dello spazio.

Duale, biduale e spazi riflessivi. Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ la cui norma denotiamo con $\|\cdot\|$ e sia X^* il suo duale. Conveniamo in questa sezione di denotare gli elementi di X^* con x^* e di scrivere

$$\langle x^*, x\rangle = x^*(x), \qquad x \in X,$$

per indicare il valore assunto dal funzionale lineare x^* in x. Questa notazione evidenzia la dualità dell'azione di X^* su X e viceversa di X su X^*.
Come abbiamo visto, il duale X^* di X è uno spazio di Banach con la norma

$$\|x^*\| = \sup\left\{|\langle x^*, x\rangle : x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\right\}, \qquad x^* \in X^*,$$

e in maniera duale la norma degli elementi di X è data da

$$(*) \qquad \|x\| = \sup\left\{|\langle x^*, x\rangle : x^* \in X^* \text{ e } \|x^*\| \leq 1\right\}, \qquad x \in X,$$

per il teorema di Hahn–Banach (Corollario 1.46).
Lo spazio duale di X^* prende il nome di *biduale di* X e si denota con

$$X^{**} = \mathrm{L}(X^*, \mathbb{K}).$$

I suoi elementi sono i funzionali lineari continui sul duale X^* di X che denotiamo con x^{**}.
Il biduale X^{**} di X è a sua volta uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ con norma

$$\|x^{**}\| = \sup\left\{|\langle x^{**}, x^*\rangle : x^* \in X^* \text{ e } \|x^*\| \leq 1\right\}, \qquad x^{**} \in X^{**}.$$

Per ogni $x \in X$ la funzione $J_X x \colon X^* \to \mathbb{K}$ definita da

$$\langle J_X x, x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle, \qquad x^* \in X^*,$$

è un funzionale lineare su X^* tale che

$$|\langle J_X x, x^*\rangle| = |\langle x^*, x\rangle| \leq \|x\|\|x^*\|, \qquad x^* \in X^*.$$

Quindi, $J_X x$ è un elemento del biduale X^{**} tale che $\|J_X x\| \leq \|x\|$. Inoltre, per $(*)$ risulta

$$\|J_X x\| = \|x\|, \qquad x \in X.$$

L'applicazione $J_X \colon X \to X^{**}$ così definita è evidentemente lineare ed è quindi un'isometria di X in X^{**} che prende il nome di *immersione canonica di X nel*

biduale. Inoltre, $J_X(X)$ è un sottospazio chiuso di X^{**} se e solo se X è uno spazio di Banach.
Nel seguito scriveremo brevemente J in luogo di J_X ogniqualvolta sia chiaro dal contesto quale sia lo spazio X di riferimento.

DEFINIZIONE 1.58. Sia X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e sia $J_X \in \mathrm{L}(X, X^{**})$ l'immersione canonica di X nel biduale X^{**}. Se risulta

$$J_X(X) = X^{**}$$

lo spazio di Banach X si dice *riflessivo*. □

Gli spazi di Banach riflessivi sono dunque gli spazi di Banach che sono isometricamente isomorfi al biduale mediante l'immersione canonica. È importante sottolineare che, affinché uno spazio di Banach sia riflessivo, è necessario che l'isomorfismo isometrico dello spazio sul suo biduale sia proprio dato dall'immersione canonica: esistono spazi di Banach isometricamente isomorfi al biduale che non sono però riflessivi ([33]). Nel caso di uno spazio di Banach riflessivo X è consuetudine identificare il biduale X^{**} con X stesso.
Tutti gli spazi di Banach di dimensione finita sono riflessivi. Tali sono anche gli spazi di Banach ℓ_p $(1 < p < +\infty)$ mentre gli spazi di Banach c_0, ℓ_1 e ℓ_∞ non sono riflessivi (Esercizio 1.16). Ulteriori esempi sono discussi nel successivo Capitolo 2.
Sulle proprietà e il ruolo degli spazi di Banach riflessivi ritorneremo più estesamente in un paragrafo successivo.
Concludiamo questa parte esaminando la relazione tra separabilità dello spazio e separabilità del duale.

TEOREMA 1.59. *Sia X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$. Allora,*

(a) X^* *separabile* $\Longrightarrow$ X *separabile*;

e, se X è riflessivo, si ha

(b) X *separabile* $\Longleftrightarrow$ X^* *separabile.*

Se X non è riflessivo l'implicazione opposta in (a) può essere falsa (Esercizi 1.12 e 1.16).

DIMOSTRAZIONE. (a) Sia $D^* = \{x_n^*\}_n$ un insieme (al più) numerabile e denso di X^* e per ogni n sia $x_n \in X$ tale che risulti

$$\|x_n\| = 1 \qquad \text{e} \qquad |\langle x_n^*, x_n\rangle| \geq \|x_n^*\|/2.$$

Il sottospazio

$$D = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\{x_n\}_n)$$

di X formato dalle combinazioni lineari a coefficienti razionali degli elementi x_n è numerabile e, se D non fosse denso in X, esisterebbe $x_0^* \in X^*$ per il quale si avrebbe

$$\|x_0^*\| = 1 \qquad \text{e} \qquad \langle x_0^*, d\rangle = 0 \text{ per ogni } d \in D$$

(Corollario 1.45). Scelta allora una successione $\{x_{n_k}^*\}_k$ di elementi di D^* tale che $x_{n_k}^* \to x_0^*$ in X^* per $k \to +\infty$, si avrebbe

$$\begin{aligned}\|x_{n_k}^*\|/2 \leq |\langle x_{n_k}^*, x_{n_k}\rangle| &\leq |\langle x_{n_k}^* - x_0^*, x_{n_k}\rangle| + |\langle x_0^*, x_{n_k}\rangle| = \\ &= |\langle x_{n_k}^* - x_0^*, x_{n_k}\rangle| \leq \\ &\leq \|x_{n_k}^* - x_0^*\|\end{aligned}$$

per ogni k cosicché, passando al limite per $k \to +\infty$, risulterebbe $\|x_0^*\| = 0$ e ciò è assurdo.
(b) Essendo X riflessivo, anche il biduale X^{**} è separabile e lo stesso vale per X^* per (a). □

Annichilatori. Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e siano $A \subset X$ e $A^* \subset X^*$ due insiemi (non vuoti). Gli insiemi

$$A^\perp = \{x^* \in X^* : \langle x^*, a\rangle = 0 \text{ per ogni } a \in A\};$$
$$^\perp(A^*) = \{x \in X : \langle a^*, x\rangle = 0 \text{ per ogni } a^* \in A^*\};$$

si dicono *annichilatore di A* e *annichilatore di A^** rispettivamente ed è consuetudine scrivere brevemente $x_0^\perp$ e $^\perp(x_0^*)$ per $A = \{x_0\}$ ($x_0 \in X$) e $A^* = \{x_0^*\}$ ($x_0^* \in X^*$). Chiaramente, gli annichilatori $A^\perp$ e $(A^*)^\perp$ sono sottospazi di X^* e X rispettivamente e risulta

$$A^\perp = (\mathrm{cl}(\mathrm{span}\,(A)))^\perp \qquad \text{e} \qquad ^\perp(A^*) =^\perp (\mathrm{cl}(\mathrm{span}\,(A^*)))$$

per ogni insieme $A \subset X$ e $A^* \subset X^*$ (non vuoti). Alla luce di questa osservazione, nel seguito considereremo esclusivamente annichilatori di sottospazi e ne riassumiamo le proprietà elementari negli enunciati seguenti.

Proposizione 1.60. *Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e $M \subset X$ un sottospazio di X. Allora,*

(a) *$M^\perp$ è un sottospazio chiuso di X^*;*
(b) *$M^\perp = [\mathrm{cl}(M)]^\perp$;*
(c) *$^\perp(M^\perp) = \mathrm{cl}\,(M)$.*

Dimostrazione. (a) Sia $J : X \to X^{**}$ l'immersione canonica di X nel biduale. Si ha allora

$$M^\perp = \bigcap \{\ker\,(Jx) : x \in M\}$$

e la conclusione segue da Teorema 1.17.

(b) Da $M \subset \mathrm{cl}\,(M)$ segue evidentemente $[\mathrm{cl}(M)]^\perp \subset M^\perp$. Viceversa, siano $x^* \in M^\perp$ e $x \in \mathrm{cl}(M)$ cosicché esiste una successione $\{x_n\}_n$ tale che $x_n \in M$ per ogni n e $x_n \to x$ per $n \to +\infty$. Si ha allora

$$\langle x^*, x\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x^*, x_n\rangle = 0$$

per continuità e da ciò segue $x^* \in [\mathrm{cl}(M)]^\perp$ ovvero $M^\perp \subset [\mathrm{cl}(M)]^\perp$.

(c) Il sottospazio $^\perp(M^\perp)$ è chiuso per (a) e contiene M per definizione cosicché risulta $\mathrm{cl}\,(M) \subset {}^\perp(M^\perp)$. Viceversa, sia $x_0 \in \mathrm{cl}\,(M)$ cosicché per $x_0^* \in X^*$ opportuno risulta $\langle x_0^*, x\rangle = 0$ per ogni $x \in \mathrm{cl}\,(M)$ e $\langle x_0^*, x_0\rangle \neq 0$ (Corollario 1.45). Pertanto, si ha $x_0^* \in [\mathrm{cl}\,(M)]^\perp$ e $x_0 \in {}^\perp[(\mathrm{cl}\,(M))^\perp]$ da cui segue

$$[\mathrm{cl}\,(M)]^{\mathrm{c}} \subset \left({}^\perp[(\mathrm{cl}\,(M))^\perp]\right)^{\mathrm{c}}.$$

Passando al complementare si ottiene $^\perp(M^\perp) \subset \mathrm{cl}\,(M)$ e questo completa la dimostrazione. □

Proposizione 1.61. *Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e $N^* \subset X^*$ un sottospazio di X^*. Allora,*

(a) *$^\perp(N^*)$ è un sottospazio chiuso di X;*
(b) *$^\perp(N^*) =^\perp [\mathrm{cl}(N^*)]$;*
(c) *$[^\perp(N^*)]^\perp \supset \mathrm{cl}\,(N^*)$.*

Inoltre, se X è uno spazio di Banach riflessivo si ha $[^\perp(N^*)]^\perp = \mathrm{cl}\,(N^*)$

Se X non è riflessivo, l'inclusione in (c) può essere stretta (Esercizio **??**).

Dimostrazione. Proviamo solo l'ultima affermazione, le dimostrazioni delle altre sono del tutto analoghe alle corrispondenti dimostrazioni della proposizione precedente.
Si ha $\mathrm{cl}\,(N^*) \subset [^\perp(N^*)]^\perp$ per (c) e supponiamo per assurdo che per qualche $x_0^* \in X^*$ si abbia $x_0^* \notin \mathrm{cl}\,(N^*)$ e $x_0^* \in [^\perp(N^*)]^\perp$. Si avrebbe allora $\langle x_0^{**}, x^* \rangle = 0$ per ogni $x^* \in \mathrm{cl}\,(N^*)$ e $\langle x_0^{**}, x_0^* \rangle \neq 0$ per $x_0^{**} \in X^{**}$ opportuno (Corollario 1.45). Essendo X riflessivo, sarebbe $Jx_0 = x_0^{**}$ per un opportuno $x_0 \in X$ e quindi le relazioni precedenti diventerebbero $\langle x^*, x_0 \rangle = 0$ per ogni $x^* \in \mathrm{cl}\,(N^*)$ e $\langle x_0^*, x_0 \rangle \neq 0$. Dalla prima risulterebbe $x_0 \in^\perp [\mathrm{cl}(N^*)]$ e quindi dalla seconda seguirebbe $x_0^* \notin [^\perp\mathrm{cl}(N^*)]^\perp$ che è assurdo. □

Operatore aggiunto. La nozione di aggiunto di un operatore lineare limitato estende agli spazi normati di dimensione infinita la corrispondente nozione per operatori lineari tra spazi euclidei di dimensione finita e la connessa nozione di matrice trasposta.
Siano X e Y due spazi normati sul campo $\mathbb{K}$ e sia $T \in L(X, Y)$ un operatore lineare limitato. Per ogni $y^* \in Y^*$, la funzione

$$x \in X \mapsto \langle y^*, Tx \rangle$$

è un elemento di X^* che denotiamo con T^*x^* e che risulta definito dalla formula

$$(**) \qquad \langle T^*y^*, x \rangle = \langle y^*, Tx \rangle, \qquad x \in X,$$

per ogni $y^* \in Y^*$. La funzione $T^* \colon Y^* \to X^*$ così definita è evidentemente lineare e tale che

$$\sup_{\|y^*\| \le 1} \|T^*y^*\| = \sup_{\|y^*\| \le 1} \left(\sup_{\|x\| \le 1} |\langle T^*y^*, x \rangle| \right) = \sup_{\|y^*\| \le 1} \left(\sup_{\|x\| \le 1} |\langle y^*, Tx \rangle| \right) =$$

$$= \sup_{\|x\| \le 1} \left(\sup_{\|y^*\| \le 1} |\langle y^*, Tx \rangle| \right) = \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\| = \|T\|.$$

Risulta dunque $T^* \in L(Y^*, X^*)$ con $\|T^*\| = \|T\|$ e la funzione che a $T \in L(X, Y)$ associa $T^* \in L(Y^*, X^*)$ è a sua volta evidentemente lineare. Queste considerazioni motivano la definizione seguente.

Definizione 1.62. Siano X, Y spazi normati sul campo $\mathbb{K}$ e $T \in L(X, Y)$ un operatore lineare limitato. L'operatore lineare limitato $T^* \in L(Y^*, X^*)$ definito da $(**)$ si dice *aggiunto* o *duale di* T. □

La definizione di aggiunto è illustrata nel diagramma commutativo di Figura 1.2 – (a). Riassumiamo le considerazioni iniziali sull'aggiunto nella proposizione seguente.

Proposizione 1.63. *Siano X, Y spazi normati sul campo $\mathbb{K}$. Allora, la funzione*

$$T \in L(X, Y) \mapsto T^* \in L(Y^*, X^*)$$

è un isomorfismo isometrico di $L(X, Y)$ in $L(Y^*, X^*)$.

L'isomorfismo isometrico che associa T^* a T non è in genere suriettivo, neanche con X e Y spazi di Banach (Esercizio 1.22).
Siano X e Y due spazi normati sul campo $\mathbb{K}$ e $T \in L(X, Y)$ un operatore lineare limitato e consideriamo l'aggiunto dell'aggiunto $T^* \in L(Y^*, X^*)$ di T o biduale di T che denotiamo con

$$T^{**} = (T^*)^* \in L(X^{**}, Y^{**}).$$

Denotate allora con $J_X \colon X \to X^{**}$ e $J_Y \colon Y \to Y^{**}$ le immersioni canoniche di X e Y nei rispettivi biduali, si ha

$$\langle T^{**}(J_X x), y^* \rangle = \langle J_X x, T^*y^* \rangle = \langle T^*Y^*, x \rangle = \langle y^*, Tx \rangle = \langle J_Y(Tx), y^* \rangle$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "T^*y^*"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[dl, "y^*"] \\
& \mathbb{K} &
\end{tikzcd}
$$

(a)

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[d, "J_Y"] \\
X^{**} \arrow[r, "T^{**}"'] & Y^{**}
\end{tikzcd}
$$

(b)

FIGURA 1.2. Azione di: (a) aggiunto T^*; (b) aggiunto dell'aggiunto T^{**}.

per ogni $y^* \in Y^*$ e $x \in X$. Abbiamo così provato che risulta

$$(***) \qquad T^{**}J_X = J_Y T.$$

Pertanto, la restrizione di $T^{**} \in L(X^{**}, Y^{**})$ al sottospazio $J_X(X)$ di X^{**} estende T nel senso che risulta

$$T^{**}x^{**} = J_Y T J_X^{-1} x^{**}, \qquad x^{**} \in J_X(X),$$

ovvero il diagramma di Figura 1.2 – (b) è commutativo. Nel caso di spazi di Banach X e Y riflessivi, identificando X e Y con i rispettivi biduali X^{**} e Y^{**}, la relazione $(***)$ tra T^{**} e T diviene con abuso di notazione $T^{**} = T$. Riassumiamo queste considerazioni nella proposizione seguente.

PROPOSIZIONE 1.64. *Siano X e Y due spazi normati sul campo $\mathbb{K}$ con $J_X : X \to X^{**}$ e $J_Y : Y \to Y^{**}$ immersioni canoniche di X e Y nei rispettivi biduali e siano $T \in L(X, Y)$ un operatore lineare limitato con biaggiunto $T^{**} \in L(X^{**}, Y^{**})$. Allora,*

$$T^{**}J_X = J_Y T.$$

PROPOSIZIONE 1.65. *Siano X, Y, Z tre spazi normati sul campo $\mathbb{K}$ e $T \in L(X, Y)$ e $S \in L(Y, Z)$ due operatori lineari limitati. Allora,*

(a) $(ST)^* = T^* S^*$*;*

(b) $(\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{X^*}$*;*

(c) *se X e Y sono spazi di Banach, si ha*

$$T \in \mathrm{Iso}(X, Y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad T^* \in \mathrm{Iso}(Y^*, X^*)$$

nel qual caso risulta $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo solo (c) poiché le altre affermazioni sono ovvie.
(c) Sia $T \in \mathrm{Iso}(X, Y)$. Si ha allora $\mathrm{id}_{X^*} = (\mathrm{id}_X)^* = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^* T^*$ da cui segue che T^* è iniettivo. Analogamente, da $\mathrm{id}_{X^*} = (\mathrm{id}_X)^* = (T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^*$ segue che T^* è suriettivo su X^* e questo prova l'implicazione da sinistra a destra. Viceversa, sia $T^* \in \mathrm{Iso}(Y^*, X^*)$ da cui segue $T^{**} \in \mathrm{Iso}(X^{**}, Y^{**})$ per quanto appena provato. Da $(***)$ segue allora che T deve essere iniettivo e resta da provare che T è anche suriettivo su Y. Essendo $J_X(X)$ un sottospazio chiuso di X^{**} e T^{**} un isomorfismo, da $(***)$ segue che $T(X)$ deve essere chiuso in Y. Se fosse $T(X) \neq Y$, si avrebbe $\langle y_0^*, Tx \rangle = 0$ per ogni $x \in X$ con $y_0^* \neq 0$ per $y_0^* \in Y^*$ opportuno (Corollario 1.45) da cui seguirebbe $T^* y_0^* = 0$ con $y_0^* \neq 0$ e ciò contraddirebbe l'ipotesi che T^* sia un isomorfismo. $\square$

Duale di sottospazi e di quozienti e spazi riflessivi. Siano X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e $M \subset X$ un sottospazio chiuso. I duali di M e dello spazio quoziente X/M si possono descrivere mediante l'annichilatore $M^\perp$ di M: risulta infatti

$$M^* \simeq X/M^\perp \qquad \text{e} \qquad (X/M)^* \simeq M^\perp$$

mediante isomorfismi isometrici come prova il teorema seguente.

Teorema 1.66. *Siano X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e $M \subset X$ un sottospazio chiuso. Allora,*

(a) *M^* è isometricamente isomorfo a $X^*/M^\perp$;*
(b) *$(X/M)^*$ è isometricamente isomorfo a $M^\perp$.*

Dimostrazione. Supponiamo che sia $M \neq X$ altrimenti non c'è nulla da provare e conveniamo in questa dimostrazione di indicare esplicitamente lo spazio cui la norma si riferisce scrivendo $\|\cdot\|_Y$ per lo spazio Y di volta in volta considerato.
(a) Sia $i_M \in \mathrm{L}(M\,, X)$ l'operatore lineare di immersione di M in X definito da

$$i_M y = y, \qquad y \in Y,$$

e sia $i_M^* \in \mathrm{L}(M^*, X^*)$ il suo aggiunto. Si ha

$$\langle i_M^* x^*, y\rangle = \langle x^*, i_M y\rangle = \langle x^*, y\rangle, \qquad y \in Y,$$

per ogni $x^* \in X^*$ e quindi i_M^* coincide con l'operatore lineare che ad ogni $x^* \in X^*$ associa l'elemento di M^* definito come restrizione di x^* a M. Si ha allora

- $\|i_M^*\| = \|i_M\| = 1$;
- $\mathrm{im}(i_M^*) = M^*$ e $\ker(i_M^*) = M^\perp$.

Infatti, la prima affermazione segue da Proposizione 1.63 e la suriettività di i_M^* è conseguenza del teorema di Hahn–Banach mentre la rimanente affermazione segue da

$$x^* \in \ker(i_M^*) \quad \Longleftrightarrow \quad \langle i_M^* x^*, y\rangle = \langle x^*, y\rangle = 0 \quad \forall\, y \in M \quad \Longleftrightarrow \quad x^* \in M^\perp.$$

Pertanto, l'operatore lineare quoziente $(i_M^*)_\sharp \in \mathrm{L}(X^*/M^\perp, M^*)$ indotto da i_M^* è un isomorfismo di $X^*/M^\perp$ su M^* (Teorema 1.54) e dunque resta solo da provare che $(i_M^*)_\sharp$ è un'isometria.
A tal fine osserviamo che si ha $(i_M^*)_\sharp[x^*] = i_M^*(x^* + y^*)$ per ogni $y^* \in M^\perp$ e per ogni $[x^*] \in X^*/M^\perp$. Si ha allora

$$\|(i_M^*)_\sharp[x^*]\|_{M^*} = \|i_M^*(x^* + y^*)\|_{M^*} \leq \|x^* + y^*\|_{X^*}$$

per ogni $y^* \in M^\perp$ da cui segue $\|(i_M^*)_\sharp[x^*]\|_{M^*} \leq \|[x^*]\|_{X^*/M^\perp}$. Viceversa, fissato $[x^*] \in X^*/M^\perp$, per il teorema di Hahn–Banach esiste $\overline{x}^* \in X^*$ tale che $\overline{x}^* = x^*$ su M e $\|\overline{x}^*\|_{X^*} = \|i_M^*(x^*)\|_{M^*}$ (Teorema 1.44). In particolare risulta $x^* - \overline{x}^* \in M^\perp$ da cui segue

$$\begin{aligned}\|[x^*]\|_{X^*/M^\perp} &= \inf\left\{\|x^* - y^*\|_{X^*} :\, y^* \in M^\perp\right\} \leq \\ &\leq \|x^* - (x^* - \overline{x}^*)\|_{X^*} = \|\overline{x}^*\|_{X^*} = \|i_M^*(x^*)\|_{M^*} = \|(i_M^*)_\sharp[x^*]\|_{M^*}\end{aligned}$$

e questo completa la dimostrazione.
(b) Sia $\pi \in \mathrm{L}(X\,, X/M)$ la proiezione canonica di X sul quoziente X/M. Proviamo che l'aggoiunto $\pi^* \in \mathrm{L}((X/M)^*, X^*)$ di π è un isomorfismo isometrico di $(X/M)^*$ su $M^\perp$.
Proviamo dapprima che risulta $\mathrm{im}(\pi^*) = M^\perp$. Per ogni $L \in (X/M)^*$ si ha

$$x \in M \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = \langle L\,, \pi(x)\rangle = \langle \pi^*(L)\,, x\rangle$$

e quindi $\pi^*(L) \in M^\perp$ da cui segue $\mathrm{im}(\pi^*) \subset M^\perp$. Viceversa, per ogni $x^* \in M^\perp$ si ha $M \subset \ker(x^*)$ per definizione e quindi x^* induce un funzionale lineare quoziente $(x^*)_\sharp \in (X/M)^*$ tale che $(x^*)_\sharp \pi = x^*$ (Teorema 1.29). Si ha allora $\pi^*(x^*)_\sharp \in X^*$ e

$$\langle \pi^*(x^*)_\sharp\,, x\rangle = \langle (x^*)_\sharp\,, \pi(x)\rangle = \langle x^*, x\rangle, \qquad x \in X.$$

Risulta quindi $\pi^*(x^*)_\sharp = x^*$ per ogni $x^* \in M^\perp$ ovvero $M^\perp \subset \operatorname{im}(\pi^*)$ e questo prova l'asserto.
Infine, per ogni $L \in (X/M)^*$ si ha

$$\begin{aligned}\|\pi^*(L)\|_{X^*} &= \sup\left\{|\langle \pi^*(L)\,, x\rangle :\ \|x\| \le 1\right\} = \\ &= \sup\left\{|\langle L\,, \pi(x)\rangle :\ \|x\| \le 1\right\} = \\ &= \sup\left\{|\langle L\,, [x]\rangle :\ \|[x]\| \le 1\right\} = \|L\|_{(X/M)^*}\end{aligned}$$

(Teorema 1.27 – (b)) e questo prova che π è un'isometria di $(X/M)^*$ su $M^\perp$. □

Nella parte restante di questo pragrafo sviluppiamo alcune considerazioni sulla riflessività di sottospazi e quozienti di spazi riflessivi.

Teorema 1.67. *Siano X e Y due spazi di Banach sul campo $\mathbb{K}$ isometricamente isomorfi. Allora,*

$$X \text{ riflessivo} \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y \text{ riflessivo.}$$

Dimostrazione. Conveniamo in questa dimostrazione di denotare con J_X e J_Y le immersioni canoniche di X e Y nei rispettivi biduali.
Sia quindi $T \in \operatorname{Iso}(X\,, Y)$ un isomorfismo di X su Y. Allora, anche $T^* \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$ e $T^{**} \in \mathrm{L}(X^{**}, Y^{**})$ sono a loro volta isomorfismi di Y^* su X^* e di X^{**} su Y^{**} rispettivamente (Proposizione 1.65 – (c)) e quindi da $T^{**}J_X = J_Y T$ segue che Y è riflessivo quando X è tale e viceversa. □

Teorema 1.68. *Siano X uno spazio di Banach riflessivo sul campo $\mathbb{K}$ e $M \subset X$ un sottospazio chiuso. Allora,*

(a) *M è riflessivo;*
(b) *X/M è riflessivo.*

Dimostrazione. Denotiamo anche in questa dimostrazione con J_X, J_Y e J_M le immersioni canoniche di X, Y e M nei rispettivi biduali.
(a) Procedendo come nella dimostrazione di Teorema 1.66 – (a), denotiamo con $i_M \in \mathrm{L}(M\,, X)$ l'operatore lineare di immersione di M in X e con $i_M^* \in \mathrm{L}(M^*, X^*)$ il suo aggiunto che, come osservato, ad ogni $x^* \in X^*$ associa l'elemento di M^* definito come restrizione di x^* a M.
Consideriamo inoltre $i_M^{**} \in \mathrm{L}(X^{**}, Y^{**})$, l'aggiunto dell'aggiunto di i_M. Fissato $y^{**} \in M^{**}$ risulta $i_M^{**}y^{**} \in X^{**}$ e quindi, essendo X riflessivo, si ha $i_M^{**}y^{**} = J_X x$ per $x \in X$ opportuno.
Se fosse $x \notin M$, per il teorema di Hahn–Banach si avrebbe $\langle x^*, y\rangle = 0$ per ogni $y \in M$ e $\langle x^*, x\rangle \ne 0$ per un certo $x^* \in X^*$ (Corollario 1.45). Per tale x^* si avrebbe $y^* = i_M^* x^* = 0$ da cui seguirebbe

$$0 = \langle y^{**}, y^*\rangle = \langle y^{**}, i_M^* x^*\rangle = \langle i_M^{**} y^{**}, x^*\rangle = \langle J_X x\,, x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle \ne 0$$

e ciò è assurdo. Poniamo quindi $y = x \in M$.
Poiché risulta $\operatorname{im}(i_M^*) = M^*$ come provato nella dimostrazione di Teorema 1.66 – (a), per ogni $y^* \in M^*$ si ha $i_M^* x^* = y^*$ per $x^* \in X^*$ opportuno da cui segue come prima

$$\langle y^{**}, y^*\rangle = \langle x^*, y\rangle$$

per ogni $y^* \in M^*$ e per ogni $x^* \in X^*$ tale che $i_M^* x^* = y^*$. Da $i_M y = y$ segue allora

$$\langle y^{**}, y^*\rangle = \langle x^*, y\rangle = \langle x^*, i_M y\rangle = \langle i_M^* x^*, y\rangle = \langle y^*, y\rangle$$

per ogni $y^* \in M^*$. Abbiamo così provato che risulta $y^{**} = J_M y$ e dall'arbitrarietà di y^{**} in M^{**} segue la conclusione.

(b) La dimostrazione di questa parte utilizza il successivo Teorema 1.69: uno spazio di Banach è riflessivo se e solo se il suo duale è tale[4]. Si ha allora

$$X \text{ riflessivo} \quad \Longrightarrow \quad X^* \text{ riflessivo} \quad \Longrightarrow \quad M^\perp \text{ riflessivo}$$

per Teorema 1.69 e per (a). Essendo $(X/M)^*$ isomorfo a $M^\perp$ (Teorema 1.67), anche $(X/M)^*$ è riflessivo e lo stesso vale per X/M. □

Teorema 1.69. *Sia X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$. Allora,*

$$X \text{ riflessivo} \quad \Longleftrightarrow \quad X^* \text{ riflessivo.}$$

Dimostrazione. Sia X riflessivo e sia x^{***} un elemento del biduale di X^*. La funzione

$$x \in X \mapsto \langle x^{***}, Jx\rangle$$

è lineare e continua e quindi esiste $x^* \in X^*$ tale che risulti

$$\langle x^*, x\rangle = \langle x^{***}, Jx\rangle, \qquad x \in X.$$

Si ha allora

$$\langle Jx\,, x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle = \langle x^{***}, Jx\rangle, \qquad x \in X,$$

e, essendo X riflessivo, l'uguaglianze del primo e dell'ultimo termine si riscrive nella forma

$$\langle x^{**}, x^*\rangle = \langle x^{***}, x^{**}\rangle, \qquad x^{**} \in X^{**}$$

da cui segue $x^{***} = Jx^*$. Per l'arbitrarietà di x^{***} il duale X^* risulta riflessivo.
Sia ora X^* riflessivo. Per (a), il biduale X^{**} è riflessivo cosicché anche il suo sottospazio chiuso $J(X)$ è tale (Teorema 1.68 – (a)) e lo stesso vale quindi per X (Teorema 1.67). □

Teorema del rango chiuso. Nuclei e immagini di un operatore lineare e del suo aggiunto sono legati da relazioni che generalizzano quelle ben note in dimensione finita per i sistemi lineari di equazioni: se $A \in \mathbb{M}^{m\times n}$ è una matrice, il sistema $Ax = a$ ha soluzione per ogni $a \in \mathbb{R}^m$ se e solo se il sistema trasposto omogeneo $A^*y = 0$ ha come unica soluzione $y = 0$ in $\mathbb{R}^m$.

Teorema 1.70. *Siano X e Y due spazi normati sul campo $\mathbb{K}$ e sia $T \in L(X\,, Y)$ un operatore lineare limitato con aggiunto $T^* \in L(Y^*, X^*)$. Allora,*

(a) $\ker(T) = {}^\perp[\mathrm{im}\,(T^*)]$;
(b) $\ker(T^*) = [\mathrm{im}\,(T)]^\perp$;
(c) $[\ker(T)]^\perp \supset \mathrm{cl}\,(\mathrm{im}\,(T^*))$;
(d) ${}^\perp[\ker(T^*)] = \mathrm{cl}\,(\mathrm{im}\,(T))$.

Inoltre, se X è riflessivo si ha $[\ker(T)]^\perp = \mathrm{cl}\,(\mathrm{im}\,(T^*))$.

Dimostrazione. (a) Si ha

$$\begin{aligned} x \in \ker(T) &\iff \langle y^*, Tx\rangle = 0 \quad \forall\, y^* \in Y^* \\ &\iff \langle T^*y^*, x\rangle = 0 \quad \forall\, y^* \in Y^* \iff x \in {}^\perp[\mathrm{im}(T^*)]. \end{aligned}$$

(b) Si ha

$$\begin{aligned} y^* \in \ker(T^*) &\iff \langle T^*y^*, x\rangle = 0 \quad \forall\, x \in X \\ &\iff \langle y^*, Tx\rangle = 0 \quad \forall\, x \in X \iff y^* \in [\mathrm{im}(T)]^\perp. \end{aligned}$$

[4] La dimostrazione di Teorema 1.69 utilizza solo la parte (a) della dimostrazione di Teorema 1.68 che andrebbe quindi spezzato collocando (b) come corollario a valle del teorema successivo. I due enunciati (a) e (b) sono qui riuniti in un unico teorema solo per ragioni di unitarietà e omogeneità dell'enunciato.

(c) Per (a) e Proposizione 1.61 – (c) si ha

$$[\ker(T)]^{\perp} = [{}^{\perp}(\mathrm{im}(T^*)]^{\perp} \supset \mathrm{cl}(\mathrm{im}(T^*))\,.$$

(d) Per (b) e Proposizione 1.60 – (c) si ha

$${}^{\perp}[\ker(T^*)] ={}^{\perp} [(\mathrm{im}(T))^{\perp}] = \mathrm{cl}(\mathrm{im}(T))\,.$$

Infine, l'ultima affermazione segue da (c) e dalla corrispondente affermazione di Proposizione 1.61. □

Teorema 1.71. *Siano X e Y due spazi di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e $T \in L(X, Y)$ un operatore lineare limitato con aggiunto $T^* \in L(Y^*, X^*)$. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) $\mathrm{im}\,(T)$ *chiuso in* Y*;*
(b) $\mathrm{im}\,(T^*) = [\ker(T)]^{\perp}$*;*
(c) $\mathrm{im}\,(T^*)$ *chiuso in* X^*
(d) $\mathrm{im}(T) ={}^{\perp} [\ker(T^*)]$.

Questo teorema caratterizza gli operatori lineari limitati con rango chiuso e prende appunto il nome di *teorema del rango chiuso.* Tutte le implicazioni con l'esclusione di (a) $\Longrightarrow$ (b) valgono in effetti per spazi normati.

Dimostrazione. Occore evidentemente provare solo che (a) implica (b) e che (c) implica (d).
(a) $\Longrightarrow$ (b). Proviamo dapprima che risulta

$$[\ker(T)]^{\perp} \subset \mathrm{im}\,(T^*).$$

Consideriamo a tal fine $x^* \in [\ker(T)]^{\perp}$ e osserviamo che per $y \in \mathrm{im}(T)$ e $x_i \in X$ tali che $Tx_i = y$ $(i = 1, 2)$ si ha $x_1 - x_2 \in \ker(T)$ da cui segue $\langle x^*, x_1\rangle = \langle x^*, x_2\rangle$. Pertanto, la funzione $L\colon\ \mathrm{im}(T) \to \mathbb{K}$ definita da

$$Ly = \langle x^*, x\rangle, \qquad y \in \mathrm{im}(T) \text{ e } Tx = y,$$

è ben definita e lineare. Inoltre, per ogni $y \in \mathrm{im}(T)$ e per $x \in X$ con $Tx = y$ opportuno si ha

$$|Ly| = \langle x^*, x\rangle \le K\|x^*\|\|Tx\| = K\|x^*\|\|y\|$$

(Corollario 1.55). Per il teorema di Hahn–Banach (Teorema 1.44) esiste allora $y^* \in Y^*$ tale che $y^* = L$ su $\mathrm{im}(T)$ e $\|L\| = \|y^*\|$. Si ha allora

$$\langle T^*y^*, x\rangle = \langle y^*, Tx\rangle = L(Tx) = \langle x^*, x\rangle$$

per ogni $x \in X$. Risulta quindi $x^* = T^*y^* \in \mathrm{im}(T^*)$ e questo prova l'asserto.
Viceversa, sia $x^* \in \mathrm{im}(T^*)$ e sia $y^* \in Y^*$ tale che $T^*y^* = x^*$. Si ha

$$x \in \ker(T) \qquad\Longrightarrow\qquad \langle x^*, x\rangle = \langle T^*y^*, x\rangle = \langle y^*, Tx\rangle = 0$$

da cui segue $x^* \in [\ker(T)]^{\perp}$ e questo completa la dimostrazione di (b).
(c) $\Longrightarrow$ (d). Supponiamo dapprima che il rango $\mathrm{im}(T)$ di T sia denso in Y. Allora, T^* risulta iniettivo (Teorema 1.70 – (b)) e quindi, avendo T^* rango chiuso per ipotesi, si ha

$$\|y^*\| \le K\|T^*y^*\|, \qquad y^* \in \mathrm{im}(T^*),$$

per $K > 0$ opportuno (Corollario 1.55 – (b)). Proviamo ora che, denotate come al solito con $B_r = B_r(0)$ le palle aperte con centro nell'origine $(r > 0)$ e posto $\delta = 1/K > 0$, risulta

$$\big\{x:\ \|x\| < \delta\big\} \subset \mathrm{cl}\big(\big\{Tx:\ |x| < 1\big\}\big)\,. \tag{$****$}$$

come nella dimostrazione di Teorema 1.52. A tal fine, poniamo per brevità

$$C = \mathrm{cl}\big(\big\{Tx:\ |x| \le 1\big\}\big)$$

e consideriamo $y_0 \in Y \setminus C$. L'insieme C è chiuso e si verifica facilmente che è anche convesso. Per il teorema di separazione dei convessi (Teorema 4.54 − (b)[5]) esiste allora $y_0^* \in Y^*$ con $y_0^* \neq 0$ tale che

$$\mathrm{Re}\,(\langle y_0^*, y_0\rangle) \geq \sup_{y\in C} \mathrm{Re}\,(\langle y_0^*, y\rangle)\,.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}\frac{1}{K}\|y_0^*\| \leq \|T^* y_0^*\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \mathrm{Re}\,(\langle T^* y_0^*, x\rangle) = \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1} \mathrm{Re}\,(\langle y_0^*, Tx\rangle) = \\ &= \sup_{y\in C} \mathrm{Re}\,(\langle y_0^*, y\rangle) \leq \mathrm{Re}\,(\langle y_0^*, y_0\rangle) \leq \|y_0^*\|\|y_0\|\end{aligned}$$

e da $y_0^* \neq 0$ segue $\|y_0\| \geq 1/K = \delta$. Abbiamo così provato che risulta

$$y_0 \in Y \setminus C \qquad \Longrightarrow \qquad \|y_0\| \geq \delta$$

e questo prova ($****$). Siamo quindi nella stessa situazione della dimostrazione di Teorema 1.52 e ragionando come nel Passo 2 di tale dimostrazione si conclude che risulta

$$\big\{y:\ \|y\| < \delta\big\} \subset \big\{Tx:\ \|x\| < 1\big\}$$

da cui segue $\mathrm{im}(T) = Y$ per linearità. Questo prova (d) nell'ipotesi aggiuntiva che $\mathrm{im}(T)$ sia denso in Y.

Supponiamo quindi che $\mathrm{im}(T)$ non sia denso in Y e, posto $Y_0 = \mathrm{cl}(\mathrm{im}(T))$, denotiamo con $T_0 \in \mathrm{L}(X\,, Y_0)$ l'operatore lineare T pensato come operatore lineare da X in Y_0 e con $T_0^* \in \mathrm{L}(Y_0^*, X^*)$ il suo aggiunto e proviamo che $\mathrm{im}(T^*)$ è chiuso in X^*.

Osserviamo a tal fine che per il teorema di Hahn–Banach (Teorema 1.44) gli elementi del duale Y_0^* di Y_0 sono le restrizioni a Y_0 degli elementi di Y^* ovvero si ha

$$Y_0^* = \Big\{y^*_{|Y_0}:\ y^* \in Y^*\Big\}$$

e che risulta

$$\langle T_0^*(y^*_{|Y_0})\,, x\rangle = \langle y^*, Tx\rangle = \langle T^* y^*, x\rangle, \qquad x \in X,$$

ovvero

$$T_0^*(y^*_{|Y_0}) = T^* y^*, \qquad y^* \in Y^*.$$

Pertanto, T_0^* agisce sulle restrizioni a Y_0 degli elementi di Y^* come T^* agisce sulle estensioni stesse. Analogamente, risulta

$$\ker(T_0^*) = \Big\{y^*_{|Y_0}:\ y^* \in Y^*\Big\}\,.$$

Alla luce di queste considerazioni, fissati $y_0 \in Y_0^*$ e $z_0^* \in \ker(T_0^*)$, siano $y^* \in Y^*$ e $z^* \in \ker(T^*)$ due estensioni di y_0^* e z_0^* rispettivamente. Si ha allora

$$\|y_0^* - z_0^*\| \leq \|y^* - z^*\|$$

da cui segue

$$d(y_0^*, \ker(T_0^*)) \leq d(y^*, \ker(T^*)) \leq K\|T^* y^*\| = K\|T_0^* y_0^*\|$$

per $K \geq 0$ opportuno (Corollario 1.55).

Abbiamo così provato che $\mathrm{im}(T_0^*)$ è chiuso in X^* cosicché, per quanto provato nel caso precedente, risulta $\mathrm{im}(T_0) = Y_0$ da cui segue

$$\mathrm{im}(T) = \mathrm{im}(T_0) = Y_0 = \mathrm{cl}(\mathrm{im}(T)) =^{\perp} [\ker(T^{\perp})]$$

per Teorema 1.70 − (d). □

---

[5] La dimostrazione del teorema qui utilizzato (Teorema 4.54) non usa nessun risultato che dipende dai risultati di questa parte. La sua dimostrazione è solo posticipata per convenienza alla successiva Sezione 4.3 per utilizzare la terminologia introdotta in tale sezione.

Come ricordato all'inizio per i sistemi lineari in dimensione finita, il teorema del rango chiuso si traduce in un teorema di esistenza per l'equazione $Tx = y$ ($T \in \mathrm{L}(X\,,Y)$ e $y \in Y$):

$$\begin{cases} \mathrm{im}(T) \text{ chiuso} \\ T^* \text{ iniettivo} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, y \in Y \quad \exists\, x \in X : \, Tx = y.$$

Riassumiamo questa osservazione e quella per l'equazione duale $T^*y^* = x^*$ nei due enunciati seguenti omettendo la dimostrazione della seconda.

Corollario 1.72. *Siano X e Y due spazi di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e $T \in L(X\,,Y)$ un operatore lineare limitato con aggiunto $T^* \in L(Y^*, X^*)$. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) $\mathrm{im}(T) = Y$;
(b) *esiste* $K \geq 0$ *tale che* $\|y^*\| \leq K\|T^*y^*\|$ *per ogni* $y^* \in Y^*$;
(c) $\ker(T^*) = \{0\}$ *e* $\mathrm{im}(T^*)$ *chiuso in* X^*.

Dimostrazione. (a) Da $\mathrm{im}(T) = Y$ segue $\ker(T^*) = \{0\}$ (Teorema 1.70 – (b)) e quindi (b) si riduce a una riformulazione di Corollario 1.55 – (b).
(b) Si ha $\ker(T^*) = \{0\}$ e $\mathrm{im}(T^*)$ è chiuso in X^* per Corollario 1.55.
(c) Il rango $\mathrm{im}(T)$ risulta chiuso in Y (Teorema 1.71) e da $\ker(T^*) = [\mathrm{im}\,(T)]^\perp$ (Teorema 1.70 – (b)) segue l'asserto. □

Corollario 1.73. *Siano X e Y due spazi di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e $T \in L(X\,,Y)$ un operatore lineare limitato con aggiunto $T^* \in L(Y^*, X^*)$. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) $\mathrm{im}(T^*) = Y^*$;
(b) *esiste* $K \geq 0$ *tale che* $\|x\| \leq K\|Tx\|$ *per ogni* $x \in X$;
(c) $\ker(T) = \{0\}$ *e* $\mathrm{im}(T)$ *chiuso in* X.

Uniforme convessità. Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e sia $\|\cdot\|$ la sua norma. Se per ogni $0 < \varepsilon \leq 2$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che risulti

$$\|x\| = \|y\| = 1 \text{ e } \|x - y\| \geq \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$$

la norma $\|\cdot\|$ di X si dice *uniformemente convessa* o *rotonda* e la funzione

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \,:\, \|x\| = \|y\| = 1 \text{ e } \|x - y\| \geq \varepsilon\right\}, \qquad 0 < \varepsilon \leq 2,$$

si dice *modulo di convessità della norma.*
L'uniforme convessità della norma esprime una proprietà geometrica della palla unitaria: se muoviamo un segmento di lunghezza ε mantenendo gli estremi sul bordo della palla unitaria, il suo punto medio rimane nella palla di raggio $1 - \delta$ per $\delta > 0$ opportuno. La palla unitaria è quindi "rotonda" e in particolare il suo bordo non contiene segmenti.
Se X è uno spazio normato la cui norma è uniformemememente convessa, per estensione anche lo spazio X si dice *uniformemente convesso* anche se l'uniforme convessità è a tutti gli effetti una proprietà della norma e non della topologia di X come risulta dall'esempio seguente.

Esempio 1.74. Nello spazio euclideo $\mathbb{K}^n$ ($n \geq 2$)

(a) la norma euclidea $\|\cdot\|$ è rotonda[6];

[6] Anche le altre norme $\|\cdot\|_p$ ($1 < p <= \infty$ e $p \neq 2$) di $\mathbb{K}^n$ sono uniformemente convesse (Corollario 2.47).

(b) le norme $\|\cdot\|_p$ per $p = 1$ e $p = \infty$ (Esercizio 1.2) non sono rotonde.

Anche le altre norme $\|\cdot\|_p$ $(1 < p <= \infty$ e $p \neq 2)$ di $\mathbb{K}^n$ sono uniformemente convesse

(a) Si ha
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \qquad x, y \in \mathbb{R}^n,$$
per l'identità del parallelogramma e quindi risulta
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leq 1 - \frac{\|x-y\|^2}{4}$$
per ogni x e y con $\|x\| = \|y\| = 1$. Essendo la funzione $\sqrt{1+t}$ concava per $t \geq -1$, si ha
$$\sqrt{1+t} \leq 1 + t/2, \qquad t \geq -1,$$
cosicché, essendo $\|x - y\|^2/4 \leq 1$ per ogni x e y con $\|x\| = \|y\| = 1$, risulta
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \frac{1}{8}\|x-y\|^2$$
per gli stessi x e y. La norma euclidea di $\mathbb{K}^n$ è quindi rotonda con modulo di convessità $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2/8$.

(b) Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Per $p = 1$ e per $x = e_h$ e $y = e_k$ con $h \neq k$ risulta $\|e_h\|_1 = \|e_k\|_1 = 1$ e
$$\|e_h - e_k\|_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\|e_h + e_k\|_1}{2} = 1$$
e quindi la norma $\|\cdot\|_1$ di $\mathbb{K}^n$ non può essere rotonda. Analogamente, per $p = \infty$ e per $x = e_h + e_k$ e $y = e_h - e_k$ con $h \neq k$ risulta $\|e_h \pm e_k\|_\infty = 1$ e
$$\|(e_h + e_k) - (e_h - e_k)\|_\infty = 2\|e_h\|_\infty = 2;$$
$$\frac{\|(e_h + e_k) + (e_h - e_k)\|_p}{2} = \|e_h\|_\infty = 1;$$
e quindi neppure la norma $\|\cdot\|_\infty$ può essere rotonda. □

Teorema 1.75 (D. P. Milman–B. J. Pettis). *Sia X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ con norma uniformemente convessa. Allora, X è riflessivo.*

Dimostrazione. Sia $x_0^{**} \in X^{**}$ con $\|x_0^{**}\| = 1$ un elemento del biduale fissato. Per ogni $n \geq 1$ sia $x_n^* \in X^*$ un funzionale lineare tale che
$$\|x_n^*\| = 1 \qquad \text{e} \qquad |\langle x_0^{**}, x_n^*\rangle| \geq 1 - 1/n$$
e, per il lemma di Helly (Teorema 1.48) applicato ai funzionali lineari $x_1^*, \ldots, x_n^*$, sia $x_n \in X$ un vettore tale che
$$\begin{cases} \|x_n\| \leq 1 + 1/n; \\ \langle x_0^{**}, x_m^*\rangle = \langle x_m^*, x_n\rangle, \quad m = 1, \ldots, n. \end{cases}$$
Si ha allora
$$1 - 1/n \leq |\langle x_0^{**}, x_n^*\rangle| = |\langle x_x^*, x_n\rangle| \leq \|x_n\| \leq 1 + 1/n$$
per ogni n cosicché risulta
$$\lim_{n \to +\infty} \|x_n\| = 1$$
e inoltre, per $n > m \geq 1$ risulta
$$\langle x_m^*, x_n\rangle = \langle x_0^{**}, x_m^*\rangle = \langle x_m^*, x_m\rangle$$
da cui segue
$$(*****) \qquad 2\left(1 - \frac{1}{m}\right) \leq 2|\langle x_0^{**}, x_m^*\rangle| = |\langle x_m^*, x_m + x_n\rangle| \leq \|x_m + x_n\|$$

per ogni $n > m \geq 1$.
Proviamo che la successione $\{x_n\}_n$ è di Cauchy. Se cosí non fosse, esisterebbero $\varepsilon_0 > 0$ e due successioni di interi $\{m_k\}_k$ e $\{n_k\}_k$ con $1 \leq m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \cdots$ per i quali risulterebbe

$$\|x_{n_k} - x_{m_k}\| \geq \varepsilon_0, \qquad k \geq 1.$$

Supposto $\|x_{m_k}\| > 0$ e $\|x_{n_k}\| > 0$ per ogni k, si avrebbe

$$\left\| \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} - \frac{x_{m_k}}{\|x_{m_k}\|} \right\| \geq \|x_{n_k} - x_{m_k}\| - \left| \frac{1}{\|x_{n_k}\|} - 1 \right| \|x_{n_k}\| - \left| \frac{1}{\|x_{m_k}\|} - 1 \right| \|x_{m_k}\| \geq \varepsilon_0/2$$

definitivamente cosicché, denotato con $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon_0/2) > 0$ il δ associato a $\varepsilon_0/2$ dalla uniforme convessità della norma, si avrebbe

$$\left\| \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} + \frac{x_{m_k}}{\|x_{m_k}\|} \right\| \leq 2(1 - \delta_0)$$

definitivamente. Per ogni k si ha come prima

$$\|x_{n_k} + x_{m_k}\| \leq \left\| \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} + \frac{x_{m_k}}{\|x_{m_k}\|} \right\| + \left| \frac{1}{\|x_{n_k}\|} - 1 \right| \|x_{n_k}\| + \left| \frac{1}{\|x_{m_k}\|} - 1 \right| \|x_{m_k}\|$$

e quindi, tenuto conto di $(*****)$, risulterebbe

$$2 \leq \limsup_{k \to +\infty} \|x_{n_k} + x_{m_k}\| \leq 2(1 - \delta_0)$$

che è evidentemente assurdo.
Abbiamo così provato che la successione $\{x_n\}_n$ è di Cauchy. Sia quindi $x_0 \in X$ tale che $x_n \to x_0$ in X per $n \to +\infty$. Si ha $\|x_0\| = 1$ e da

$$\langle x_m^*, x_n \rangle = \langle x_0^{**}, x_m^* \rangle \qquad n \geq m,$$

segue

$$\langle x_m^*, x_0 \rangle = \langle x_0^{**}, x_m^* \rangle$$

per ogni m.
Abbiamo così provato che esiste $x_0 \in X$ tale che

$$(******) \qquad \begin{cases} \|x_0\| = 1; \\ \langle x_n^*, x_0 \rangle = \langle x_0^{**}, x_n^* \rangle, \quad n \geq 1; \end{cases}$$

e proviamo che tale x_0 è unico. Sia infatti $x_0' \in X$ un altro elemento di X con le stesse proprietà. Da

$$\langle x_n^*, x_0 + x_0' \rangle = 2\langle x_0^{**}, x_n^* \rangle, \qquad n \geq 1,$$

segue

$$2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 2|\langle x_0^{**}, x_n^* \rangle| = |\langle x_n^*, x_0 + x_0' \rangle| \leq \|x_0 + x_0'\|$$

per ogni n che implica $\|x_0 + x_0'\| = 2$. Essendo X uniformemente convesso, deve essere $x_0 = x_0'$.
Resta infine da provare che risulta

$$\langle x^*, x_0 \rangle = \langle x_0^{**}, x^* \rangle$$

per ogni $x^* \in X^*$. Consideriamo a tal fine $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| = 1$ e $x^* \neq x_n^*$ per ogni n. Ripetendo le considerazioni precedenti con i funzionali lineari $\{x^*, x_1^*, x_2^*, \ldots\}$, si trova $x_0' \in X$ per cui valgono le proprietà di $(******)$ oltre a

$$\langle x^*, x_0' \rangle = \langle x_0^{**}, x^* \rangle.$$

Per l'unicità di x_0 deve quindi essere $x_0' = x_0$. Abbiamo così provato che risulta $Jx_0 = x_0^{**}$ per ogni $x_0^{**} \in X^{**}$ con $\|x_0^{**}\| = 1$ e questo conclude la dimostrazione. $\square$

L'esempio seguente mostra che la conclusione del teorema di Milman–Pettis non può essere invertita: esistono spazi di Banach riflessivi che non ammettono alcuna norma uniformemente convessa equivalente.

ESEMPIO 1.76. Lo spazio di Banach

$$\ell_p(\{\mathbb{K}^n\}_n) \qquad (1 < p < +\infty)$$

di Esercizio 1.18 ove ogni $\mathbb{K}^n$ è munito della norma del massimo

$$\|b\| = \max_{1\le m\le n} |b_m|, \qquad b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n,$$

è uno spazio di Banach riflessivo che non ammette alcuna norma uniformemente convcessa equivalente.
Infatti, ogni spazio $\mathbb{K}^n$ è riflessivo indipendentemente dalla norma scelta poiché ha dimensione finita e quindi anche $\ell_p(\{\mathbb{K}^n\}_n)$ è tale per $1 < p < +\infty$ (Esercizio 1.18). Supponiamo per assurdo che $|||\cdot|||$ sia una norma uniformemente convessa equivalente alla norma naturale di $\ell_p(\{\mathbb{K}^n\}_n)$ definita da

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n\ge 1} \|x(n)\|^p\right)^{1/p}, \qquad x \in \ell_p(\{\mathbb{K}^n\}_n).$$

e osserviamo che, pur di riscalare la norma $|||\cdot|||$, possiamo supporre che si abbia

$$m\|x\|_p \le |||x||| \le \|x\|_p, \qquad x \in \ell_p(\{\mathbb{K}^n\}_n),$$

per $0 < m < 1$ opportuno[7]. Ricaveremo una contraddizione provando che esistono successioni $\overline{x}_n \in \ell_p(\{\mathbb{K}^n\}_n)$ $(n \ge 2)$ tali che

- $|||\overline{x}_n||| \le 1$ per ogni $n \ge 2$;
- $\lim_{n\to+\infty} \|\overline{x}_n\|_p = +\infty$.

A tal fine, alla luce di Esercizio 1.22, denotiamo con

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left|\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|\right| \,:\, |||x||| = |||y||| \le 1 \text{ e } |||x-y||| \ge \varepsilon\right\}, \qquad 0 < \varepsilon \le 2,$$

il modulo di convessità della norma $|||\cdot|||$ e per ogni n denotiamo con

$$X_n = \{x \in \ell_p(\{\mathbb{K}^n\}_n) : \, x(m) = 0 \text{ per } m \ne n\}$$

il sottospazio di $\ell_p(\{\mathbb{K}^n\}_n)$ isomorfo[8] a $\mathbb{K}^n$. Per $n \ge 2$ consideriamo i due elementi $x^\pm \in X_n$ definiti da

$$x^\pm(n) = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \pm 1)$$

con $\sigma_m \in \{+,-\}$. Indipendentemente dalla scelta dei segni $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, si ha

$$1 = \|x^\pm(n)\| = \|x^\pm\|_p \ge |||x^\pm|||$$

e $x^+(n) - x^-(n) = (0, \dots, 0, 2)$ da cui segue $|||x^+ - x^-||| \ge m\|x^+ - x^-\|_p = 2m$ con $0 < 2m < 2$. Conseguentemente risulta

$$\left|\left|\left|\frac{x^+ + x^-}{2}\right|\right|\right| \le 1 - \delta(2m) \qquad \text{e} \qquad \frac{x^+(n) + x^-(n)}{2} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, 0).$$

Per $n = 2$, scegliamo $\sigma_1 = +$ e definiamo $\overline{x}_2 \in X_2$ ponendo

$$\overline{x}_2(2) = \left(\frac{1}{1-\delta(2m)}, 0\right)$$

cosicché risulta $|||\overline{x}_2||| \le 1$.

[7] Non può essere $m = 1$ poiché la norma $\|\cdot\|_p$ non è uniformemente convessa
[8] Isometricamente isomorfo a $\mathbb{K}^n$ rispetto a $\|\cdot\|_p$.

Per $n \geq 3$ ripetiamo due volte l'argomento precedente scegliendo dapprima $\sigma_{n-1} = +$ e poi $\sigma_{n-1} = -$ così da definire due elementi

$$y^{\pm} = \frac{x^{+} + x^{-}}{2[1 - \delta(2m)]}$$

tali che

- $y^{\pm} \in X_n$ e $|||y^{\pm}||| \leq 1$;
- $y^{\pm}(n) = \left(\frac{\sigma_1}{1 - \delta(2m)}, \ldots, \frac{\sigma_{n-2}}{1 - \delta(2m)}, \frac{\pm 1}{1 - \delta(2m)}, 0\right).$

Come prima si ha

$$y^{+}(n) - y^{-}(n) = \left(0, \ldots, 0, \frac{2}{1 - \delta(2m)}, 0\right)$$

da cui segue

$$|||y^{+} - y^{-}||| \geq m\|y^{+} - y^{-}\|_p = m\|y^{+}(n) - y^{-}(n)\| = \frac{2m}{1 - \delta(2m)} > 2m.$$

Conseguentemente risulta

$$\left|\left|\left|\frac{y^{+} + y^{-}}{2}\right|\right|\right| \leq 1 - \delta(2m)$$

e

$$\frac{y^{+}(n) + y^{-}(n)}{2} = \left(\frac{\sigma_1}{1 - \delta(2m)}, \ldots, \frac{\sigma_{n-2}}{1 - \delta(2m)}, 0, 0\right).$$

Per $n = 3$, scegliamo $\sigma_1 = +$ e definiamo $\overline{x}_3 \in X_3$ ponendo

$$\overline{x}_3(3) = \left(\frac{1}{[1 - \delta(2m)]^2}, 0, 0\right)$$

cosicché risulta $|||\overline{x}_3||| \leq 1$.
Iterando $(n-1)-$volte questo argomento, per ogni $n \geq 2$ si determina un elemento $\overline{x}_n \in X_n$ tale che

$$|||\overline{x}_n||| \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \overline{x}_n(n) = \left(\frac{1}{[1 - \delta(2m)]^{n-1}}, 0, \ldots, 0\right).$$

Si ha così

$$1 \geq |||\overline{x}_n||| \geq m\|\overline{x}_n\|_p = \frac{1}{[1 - \delta(2m)]^{n-1}}, \qquad n \geq 2,$$

e ciò è assurdo. □

Esercizi

1.1. Siano X uno spazio normato e $Y \subset X$ un sottospazio. Provate che

(a) se Y è chiuso e $x_0 \in X \setminus Y$, allora $Z = \operatorname{span}(Y + x_0)$ è un sottospazio chiuso;
(b) se Y ha dimensione finita, allora Y è un sottospazio chiuso[9].

1.2. Provate che

(a) non esiste alcuno spazio di Banach X avente dimensione (algebrica) numerabile;
(b) per ogni numero cardinale α esiste uno spazio normato X con dimensione (algebrica) $\dim X = \alpha$.

[9] Questo fornisce una dimostrazione alternativa di Corollario 1.23.

1.3. Sia $(X, \|\cdot\|)$ un'algebra di Banach con unità u. Provate che esiste una norma $|||\cdot|||$ equivalente a $\|\cdot\|$ tale che risulti $|||u||| = 1$.

1.4. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi normati sul campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Provate che

(a) le funzioni

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{1/p} & 1 \le p < +\infty \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & p = +\infty \end{cases} \qquad (x, y) \in X \times Y,$$

sono norme equivalenti in $X \times Y$;

(b) se X e Y sono spazi di Banach, anche $X \times Y$ con le norme $\|\cdot\|_p$ è tale.

1.5. Sia X uno spazio normato non completo. Provate che esiste uno spazio di Banach $\hat{X}$ ed un operatore lineare $T \in \mathrm{L}(X, \hat{X})$ tale che

(a) T è un'isometria di X in $\hat{X}$;

(b) $\operatorname{im} T$ è denso in $\hat{X}$.

1.6. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio di Banach e Y un sottospazio di X munito di una norma $\|\cdot\|_Y$ con le seguenti proprietà:

(a) $\|y\|_X \le C\|y\|_Y$ per ogni $y \in Y$;

(b) la norma $y \in Y \mapsto \|y\|_Y$ è semicontinua inferiormente in X;

(c) per ogni $x \in X$ si ha:

$$x \in Y \quad \iff \quad \exists\,\{y_n\}_n \subset Y : \begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x \text{ in } X; \\ \bullet\ \sup\limits_n \|y_n\|_Y < +\infty. \end{array}$$

Provate che $(Y, \|\cdot\|_Y)$ è uno spazio di Banach.

1.7. Siano X uno spazio normato, Y uno spazio di Banach e $T_n \in L(X, Y)$ $(n \ge 1)$ una successione di operatori lineari limitati da X in Y tali che

- $\|T_n\| \le M$ per ogni n per qualche $M \ge 0$;
- esiste un insieme D denso in X tale che $\{T_n d\}_n$ converge per ogni $d \in D$.

Provate che $\{T_n x\}_n$ converge per ogni x.

1.8. Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e $M \subset X$ un sottospazio chiuso di X e sia X/M lo spazio vettoriale quoziente. Provate che la funzione

$$\|[x]\|_{X/M} = \inf\left\{\|x + y\| : \ y \in M\right\}, \qquad [x] \in X/M,$$

è ben definita e risulta essere una norma su X/M.

1.9. Siano X uno spazio di Banach e

$$(*) \qquad \sum_{n\ge1} x_n$$

una serie di vettori di X ($x_n \in X$ per $n \ge 1$). Provate che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) la serie $(*)$ converge incondizionatamente;

(b) $\lim\limits_{m\to+\infty} \sup\left\{ \sum\limits_{n\ge m} |\langle x^*, x_n\rangle| : \ x^* \in X^* \text{ e } \|x^*\| \le 1 \right\} = 0;$

(c) $\sum_{n\geq 1} \lambda_n x_n$ converge per ogni successione $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \in \ell_\infty$;

(d) $\sum_{n\geq 1} \sigma_n x_n$ converge per ogni scelta dei segni $\sigma_n \in \{+\,,-\}$;

(e) $\sum_{k\geq 1} x_{n_k}$ converge per ogni successione strettamente crescente $\{n_k\}_{k\geq 1}$.

La condizione in (e) corrisponde a richiedere che tutte le sottoserie di $(*)$ convergano.

1.10. Siano X e Y spazi di Banach e sia $T \in L(X\,,Y)$ un operatore lineare limitato con le seguenti proprietà:

- T iniettivo da X in Y;
- $\mathrm{im}(T)$ denso in Y.

Allora, vale la seguente alternativa: o (i) $\mathrm{im}(T) = Y$; oppure (ii) $\mathrm{im}(T)$ è di prima categoria in Y.

1.11. Siano X e Y spazi di Banach e $T \in \mathcal{L}(X\,,Y)$ un operatore lineare. Provate che T è limitato se e solo se il grafico

$$\Gamma(T) = \big\{(x\,,y) \in X \times Y : \; y = Tx \text{ e } x \in X\big\}$$

è chiuso in $X \times Y$. Questo risultato prende il nome di *teorema del grafico chiuso*.

1.12. Siano c_∞, c_0 e ℓ_p $(1 \leq p \leq +\infty)$ gli spazi normati di Esempio 1.2. Provate che

(a) c_∞, c_0 e ℓ_p $(1 \leq p \leq +\infty)$ sono spazi di Banach;

(b) c_∞ e c_0 sono separabili;

(c) ℓ_p $(1 \leq p < +\infty)$ è separabile ma ℓ_∞ non è separabile.

1.13. Sia $K \subset \ell_p$ $(1 \leq p < +\infty)$ un insieme. Provate che K è compatto se e solo se

- K è chiuso;
- $\sup\big\{|x_m| : \; x = \{x_n\}_n \in K\big\} < +\infty$ per ogni $m \geq 1$;
- per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che

$$x = \{x_n\}_n \in K \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n\geq n_0} |x_n|^p \leq \varepsilon.$$

1.14. Provate che lo spazio di Banach c_∞ e il suo sottospazio c_0 (Esempio 1.2)

(a) sono isomorfi come spazi Banach;

(b) non sono isometricamente isomorfi.

1.15. Sia $\{y_n\}_n$ una successione di elementi di $\mathbb{K}$ e siano $1 \leq p < +\infty$ e $1 < q \leq +\infty$ esponenti coniugati. Provate che

(a) $\sum_{n\geq 1} y_n x_n$ converge per ogni $\{x_n\}_n \in c_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \{y_n\}_n \in \ell_1$;

(b) $\sum_{n\geq 1} y_n x_n$ converge per ogni $\{x_n\}_n \in \ell_p \qquad \Longrightarrow \qquad \{y_n\}_n \in \ell_q$.

1.16. Provate che

(a) il duale c_0^* di c_0 si identifica con ℓ_1: per ogni funzionale lineare limitato $L \in c_0^*$ esiste una e una sola successione $y = \{y_n\}_n \in \ell_1$ tale che
$$Lx = \sum_{n\geq 1} y_n x_n, \qquad x = \{x_n\}_n \in c_0,$$
e per tale y si ha $\|L\| = \|y\|_1$;

(b) il duale di ℓ_1 si identifica isometricamente con ℓ_∞: per ogni funzionale lineare limitato $L \in \ell_1^*$ esiste una e una sola successione $y = \{y_n\}_n \in \ell_\infty$ tale che
$$Lx = \sum_{n\geq 1} y_n x_n, \qquad x = \{x_n\}_n \in \ell_1,$$
e per tale y si ha $\|L\| = \|y\|_\infty$;

(c) se $1 < p, q < +\infty$ sono esponenti coniugati, il duale di ℓ_p si identifica isometricamente con ℓ_q: per ogni funzionale lineare limitato $L \in \ell_p^*$ esiste una e una sola successione $y = \{y_n\}_n \in \ell_q$ tale che
$$Lx = \sum_{n\geq 1} y_n x_n, \qquad x = \{x_n\}_n \in \ell_p,$$
e per tale y si ha $\|L\| = \|y\|_q$;

(d) il duale di ℓ_∞ non si identifica con ℓ_1: esiste $L \in \ell_\infty^*$ che non è della forma
$$Lx = \sum_{n\geq 1} y_n x_n, \qquad x = \{x_n\}_n \in \ell_\infty,$$
per alcuna successione $y = \{y_n\}_n \in \ell_1$.

1.17. Costruite un funzionale lineare limitato definito su un sottospazio di ℓ_1 che ammetta infinite estensioni di eguale norma a tutto ℓ_1.

1.18. Siano B_n $(n \geq 1)$ spazi di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e siano
$$c_0(\{B_n\}_n) = \left\{x\colon \mathbb{N}_+ \to \bigcup\nolimits_n B_n : \ x(n) \in B_n \text{ per ogni } n \text{ e } \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = 0\right\};$$
$$\ell_p(\{B_n\}_n) = \left\{x\colon \mathbb{N}_+ \to \bigcup\nolimits_n B_n : \ x(n) \in B_n \text{ per ogni } n \text{ e } \sum_{n\geq 1} \|x_n\|^p < +\infty\right\};$$
con $1 \leq p < +\infty$ e
$$\ell_\infty(\{B_n\}_n) = \left\{x\colon \mathbb{N}_+ \to \bigcup\nolimits_n B_n : \ x(n) \in B_n \text{ per ogni } n \text{ e } \sup_{n\geq 1} \|x_n\| < +\infty\right\}$$
per $p = \infty$. Provate che

(a) $c_0(\{B_n\}_n)$ e $\ell_p(\{B_n\}_n)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ con le operazioni e le norme naturali denotate con $\|\cdot\|_u$, $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono spazi di Banach;

(b) se ogni B_n è separabile, $c_0(\{B_n\}_n)$ e $\ell_p(\{B_n\}_n)$ $(1 \leq p < +\infty)$ sono separabili;

(c) se $1 \leq p < +\infty$ e $1 < q \leq +\infty$ sono esponenti coniugati, il duale di $\ell_p(\{B_n\}_n)$ si identifica isometricamente con $\ell_q(\{B_n^*\}_n)$;

(d) se ogni B_n è riflessivo, $\ell_p(\{B_n\}_n)$ è riflessivo per $1 < p < +\infty$.

1.19. Sia $X = c_0$ o $X = \ell_1$. Costruite una successione di insiemi F_n $(n \geq 1)$ chiusi e limitati (non vuoti) con le seguenti proprietà:

- $F_{n+1} \subset F_n$ per ogni n;
- $F = \bigcap_n F_n \neq \varnothing$;

tale $\{F_n\}_n$ non tende ad F nella metrica di Hausdorff di X.

1.20. Metodi di convergenza sommabilità.
1.21. Bla, bla, bla ...
1.22. Provate che non esiste nessuna funzione continua e suriettiva da $L(\mathbb{K}, c_0)$ su $L(c_0^*, \mathbb{K}^*)$.
1.23. Sia X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ con norma $\|\cdot\|$ uniformemente convessa e sia

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \,:\, \|x\| = \|y\| = 1 \text{ e } \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}, \qquad 0 < \varepsilon \leq 2,$$

il suo modulo di continuità. Provate che per ogni $0 < \varepsilon \leq 2$ risulta

$$\|x\| = \|y\| \leq 1 \text{ e } \|x-y\| \geq \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon).$$

CAPITOLO 2

Spazi funzionali

Questo capitolo è dedicato all'esame delle due principali famiglie di spazi funzionali: gli spazi di Banach di funzioni continue e gli spazi L_p di funzioni di potenza p integrabili rispetto a una fissata misura positiva. Di tali spazi esamineremo le principali proprietà: densità di sottoclassi particolari e separabilità (teorema di Stone–Weierstrass), caratterizzazione degli insiemi compatti (teoremi di Ascoli–Arzelà e Kolmogorov–Riesz) e descrizione analitica dei rispettivi duali (teoremi di rappresentazione di Riesz).

2.1. Spazi di funzioni continue

Vari tipi di spazi vettoriali di funzioni continue e limitate definite su uno spazio topologico hanno in modo naturale una struttura di spazio di Banach in aggiunta alla struttura topologica associata alla topologia della convergenza puntuale. Introduciamo in questa sezione i due principali esempi di questi tipi di spazi di Banach: gli spazi di funzioni continue su uno spazio topologico di Hausdorff compatto e gli spazi di funzioni continue su uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto che si annullano all'infinito. Di tali spazi esaminiamo le principali proprietà con particolare riguardo alla caratterizzazione degli insiemi compatti e alla separabilità.

Spazi di Banach di funzioni continue. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff compatto e sia $\mathbb{K}$ il campo dei numeri reali o complessi. A meno di casi banali (X finito), l'insieme $C(X)$ delle funzioni continue $f\colon X \to \mathbb{K}$ da X a valori in $\mathbb{K}$ contiene funzioni continue non costanti in grande quantità (Teorema I–2.190) ed è evidentemente una sottoalgebra con unità dell'algebra commutativa $B(X)$ delle funzioni limitate su X con le operazioni definite puntualmente. Nel seguito utilizzeremo lo stesso simbolo $C(X)$ senza distinguere tra i casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e, in assenza di un'esplicita indicazione diversa, tutti i risultati che vedremo valgono senza modifiche per entrambi i casi. Solo quando necessario, scriveremo esplicitamente $C(X, \mathbb{R})$ per risultati che valgono solo nel caso reale.
L'insieme $C(X)$ delle funzioni continue su uno spazio topologico di Hausdorff compatto è quindi un'algebra normata con unità con la norma della convergenza uniforme

$$\|f\|_u = \sup\left\{|f(x)| : x \in X\right\}, \qquad f \in C(X),$$

e una successione di funzioni continue $\{f_n\}_n$ risulta convergente a f in $C(X)$ se e solo se $\{f_n\}_n$ è uniformemente convergente a f su X:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f \text{ in } C(X) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n = f \text{ uniformemente su } X.$$

Con la stessa dimostrazione di Teorema 1.9 si prova che, se X è uno spazio topologico di Hausdorff compatto, $C(X)$ è un'algebra di Banach.

Teorema 2.1. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff compatto. Allora, $C(X)$ con la norma $\|\cdot\|_u$ è un'algebra di Banach commutativa con unità sul campo* $\mathbb{K}$.

Dimostrazione. È sufficiente provare la completezza, essendo le altre affermazioni ovvie e, a tal fine, è sufficiente provare che $C(X)$ è un sottospazio chiuso di $B(X)$ (Teorema 1.9).
Siano dunque $f_n \in C(X)$ $(n \geq 1)$ e $f \in B(X)$ funzioni tali che $f_n \to f$ in $B(X)$ per $n \to +\infty$ e proviamo che anche f appartiene a $C(X)$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che risulti

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|f_n - f\|_u \leq \varepsilon/3$$

e sia $U \in \mathcal{U}(x_0)$ un intorno di x_0 tale che risulti

$$x \in U \qquad \Longrightarrow \qquad |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \varepsilon/3.$$

Per ogni $x \in U$ fissato si ha allora

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq \|f_{n_0} - u\|_u + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \|f_{n_0} - f\|_u \leq \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

e quindi f risulta continua in x_0. Per l'arbitrarietà di x_0, risulta $f \in C(X)$ e questo completa la dimostrazione. □

Se X è uno spazio topologico di Hausdorff non compatto, $C(X)$ può contenere funzioni illimitate (Esercizio I–3.7) e questo preclude la possibilità di renderlo uno spazio normato con la norma della convergenza uniforme considerata prima. Quando in particolare X è uno spazio di Hausdorff localmente compatto, consideriamo in luogo di $C(X)$ i suoi sottospazi vettoriali

$$\begin{aligned} C_c(X) &= \big\{f \in C(X) :\ \operatorname{supp}(f) \text{ compatto}\big\}\,; \\ C_\infty(X) &= \big\{f \in C(X) :\ f \text{ ha limite all'infinito}\big\}\,; \\ C_0(X) &= \big\{f \in C(X) :\ f \text{ tende a zero all'infinito}\big\}\,; \\ C_b(X) &= \big\{f \in C(X) :\ u \text{ limitata}\big\}\,; \end{aligned}$$

formati dalle funzioni continue a supporto compatto, dalle funzioni continue che hanno limite o si annullano all'infinito e dalle funzioni continue e limitate rispettivamente (Sezione I–2.5). Se X è uno spazio di Hausdorff localmente compatto ma non compatto e ∞ denota il punto all'infinito della compattificazione di Aleksandrov (Teorema I–2.199), si ha (Teorema I–2.201)

$$\begin{aligned} f \in C_\infty(X) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad f \in C(X) \text{ e } \exists \lim_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{K}; \\ f \in C_0(X) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad f \in C(X) \text{ e } \lim_{x\to\infty} f(x) = 0. \end{aligned}$$

Come è noto, le funzioni di $C_c(X)$, $C_0(X)$ e $C_\infty(X)$ sono limitate e quindi risulta

$$C_c(X) \subset C_0(X) \subset C_\infty(X) \subset C_b(X) \subset C(X)$$

e tutti questi spazi coincidono quando lo spazio topologico X è compatto ma sono in genere tutti diversi tra loro se invece X è uno spazio di Hausdorff localmente compatto ma non compatto, anche se vi sono spazi di Hausdorff localmente compatti ma non compatti per i quali risulta $C_\infty(X) = C_b(X) = C(X)$ e $C_c(X) = C_0(X)$ (Esercizio **??**).
Gli insiemi $C_c(X)$, $C_0(X)$ e $C_b(X)$ sono sottoalgebre dell'algebra commutativa $B(X)$ delle funzioni limitate su X e risultano prive di unità quando X è localmente compatto ma non compatto (Esercizio 2.1). Anche in questo caso utilizzeremo gli stessi simboli $C_c(X)$, $C_0(X)$ e $C_b(X)$ per entrambi i casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e, salvo diversa esplicita indicazione, tutti i risultati che vedremo valgono senza modifiche per entrambi i casi.

Quando X è uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto, anche $C_0(X)$ risulta essere un'algebra di Banach.

TEOREMA 2.2. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto. Allora,*

(a) *$C_0(X)$ con la norma $\|\cdot\|_u$ è un'algebra di Banach commutativa sul campo $\mathbb{K}$;*

(b) *$C_c(X)$ è denso in $C_0(X)$.*

DIMOSTRAZIONE. (a) È sufficiente provare la completezza, essendo le altre affermazioni ovvie e, a tal fine, è sufficiente provare che $C_0(X)$ è un sottospazio chiuso di $B(X)$ (Teorema 1.9).
Siano dunque $f_n \in C_0(X)$ $(n \geq 1)$ e $f \in B(X)$ funzioni tali che $f_n \to f$ in $B(X)$ per $n \to +\infty$ e proviamo che anche f appartiene a $C_0(X)$. Con la stessa dimostrazione di Teorema 2.1 si prova che f è continua cosicché resta solo da provare che f si annulla all'infinito. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che risulti

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|f_n - f\|_u \leq \varepsilon/2$$

e sia $K_\varepsilon \subset X$ un insieme compatto tale che risulti

$$x \in X \setminus K_\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |f_{n_0}(x)| \leq \varepsilon/2.$$

Per ogni $x \in X \setminus K_\varepsilon$ fissato si ha allora

$$|f(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + |f(x) - f_{n_0}(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + \|f_{n_0} - f\|_u \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

e quindi $f \in C_0(X)$ e questo completa la dimostrazione di (a).
(b) Siano $f \in C_0(X)$ e $\varepsilon > 0$ fissati e sia $K_\varepsilon \subset X$ un insieme compatto tale che risulti

$$x \in X \setminus K_\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x)| \leq \varepsilon.$$

Scelta allora una funzione $\varphi_\varepsilon \in C_c(X)$ (reale) che interpola tra l'insieme compatto K_ε e X (Teorema I–2.190), sia $f_\varepsilon = \varphi_\varepsilon f$. Risulta allora $f_\varepsilon \in C_c(X)$ e $\|f_\varepsilon - f\|_u \leq \varepsilon$ e questo prova l'asserto. □

ESEMPIO 2.3. (a) Sia I un insieme infinito. Allora I munito della topologia discreta è uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto ma non compatto. I corrispondenti spazi normati $C_\infty(I)$ e $C_0(I)$ formati dalle funzioni $x\colon I \to \mathbb{K}$ (continue) che hanno limite o che si annullano all'infinito si denotano con

$$c_\infty(I) = \Big\{x = \{x_i\}_{i \in I} : \exists \lim_{i \to \infty} x_i\Big\};$$
$$c_0(I) = \Big\{x = \{x_i\}_{i \in I} : \lim_{i \to \infty} x_i = 0\Big\};$$

e in particolare per $I = \mathbb{N}_+$ si ha $C_\infty(\mathbb{N}_+) = c_\infty(\mathbb{N}_+) = c_\infty$ e $C_0(\mathbb{N}_+) = c_0(\mathbb{N}_+) = c_0$ (Esempio 1.2 – (c)).
(b) Sia $U \neq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto (non vuoto). Allora U con la topologia euclidea è uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto ma non compatto le considerazioni che abbiamo svolto sopra si applicano in particolare agli spazi

$$C_c(U) = \big\{f \in C(U) : \operatorname{supp}(f) \text{ compatto}\big\}$$
$$C_0(U) = \big\{f \in C(U) : f \text{ tende a zero all'infinito}\big\}.$$

Quando $U \neq \mathbb{R}^N$, per le funzioni $f \in C_0(U)$ si usa la terminologia di *funzioni nulle al bordo*. Infatti ogni funzione $f \in C_0(U)$ è uniformemente continua (Teorema **??**) e quindi ammette un'unica estensione continua alla chiusura $\operatorname{cl}(U)$ di U la quale risulta nulla sui punti di ∂U. □

Teorema di Stone–Weierstrass e separabilità. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff compatto. Esaminiamo in questa parte il problema di determinare sotto quali condizioni una sottoalgebra di $C(X)$ è densa in $C(X)$. Il risultato principale in questa direzione è il celebre teorema di Stone–Weierstrass che ha come conseguenza la densità dei polinomi nello spazio di Banach delle funzioni continue su un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^N$ e la separabilità dello stesso spazio. Anche in questa parte utilizzeremo gli stessi simboli $C(X)$ e $C_c(X)$ per entrambi i casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ salvo specificare la scelta di $\mathbb{K}$ ove necessario.
Il punto di partenza per questa indagine è il seguente *teorema di Stone* relativo alla densità di un reticolo di funzioni nell'algebra $C(X, \mathbb{R})$ delle funzioni continue a valori reali su uno spazio topologico di Hausdorff compatto X.

TEOREMA 2.4 (M. H. Stone). *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff compatto e sia $\mathcal{L}$ un sottospazio di $C(X) = C(X, \mathbb{R})$ (reale) tale che*

(a) $u, v \in \mathcal{L} \quad \Longrightarrow \quad \min\{u, v\}, \max\{u, v\} \in \mathcal{L}$;
(b) *per ogni $x, y \in X$, $x \neq y$ esiste $u \in \mathcal{L}$ tale che $u(x) \neq u(y)$;*
(c) *le funzioni costanti $u_c(x) = c$, $x \in X$ $(c \in \mathbb{R})$ appartengono a $\mathcal{L}$.*

Allora, $\mathcal{L}$ è denso in $C(X, \mathbb{R})$.

Il sottospazio $\mathcal{L}$ è quindi un reticolo di funzioni di $C(X, \mathbb{R})$ che separa i punti di X e che contiene le funzioni costanti.

LEMMA 2.5. *Nelle ipotesi di Teorema 2.4, per ogni coppia di punti $x, y \in X$ e per ogni scelta dei numeri reali $a, b, c \in \mathbb{R}$ esiste $u \in \mathcal{L}$ tale che*

- $x \neq y \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} u(x) = a \\ u(y) = b; \end{cases}$
- $x = y \quad \Longrightarrow \quad u(x) = u(y) = c.$

DIMOSTRAZIONE. Nel caso $x \neq y$ possiamo scegliere per l'ipotesi (b) del teorema una funzione $v \in \mathcal{L}$ tale che risulti $v(x) \neq v(y)$. Posto allora $\alpha = v(x)$ e $\beta = v(y)$ con $\alpha \neq \beta$, consideriamo la funzione definita da

$$u(z) = sv(z) + t, \qquad z \in X,$$

con $s, t \in \mathbb{R}$ la quale appartiene a $\mathcal{L}$ per (c). Poiché risulta $\alpha \neq \beta$, possiamo scegliere s e t in maniera tale che risulti

$$\begin{aligned} u(x) &= sv(x) + t = s\alpha + t = a \\ u(y) &= sv(y) + t = s\beta + t = b \end{aligned}$$

e questo prova l'asserto nel primo caso. Il secondo caso $x = y$ è conseguenza diretta dell'ipotesi (c). □

DIMOSTRAZIONE (TEOREMA 2.4). Sia $u \in C(X)$ e sia $\varepsilon > 0$ fissato. Per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste una funzione $v_{xy} \in \mathcal{L}$ tale che

$$v_{xy}(x) = u(x) \qquad \text{e} \qquad v_{xy}(y) = u(y).$$

Per ogni $x, y \in X$ esiste allora un intorno aperto $U_{xy} \in \mathcal{U}(y)$ di y tale che risulti

$$v_{xy}(x) = u(x) \qquad \text{e} \qquad v_{xy}(z) \leq u(z) + \varepsilon, \qquad \forall\, z \in U_{xy},$$

e per compattezza esiste allora un insieme finito di punti $y_1, \ldots, y_n$ di X tale che risulti

$$X = U_{xy_1} \cup \cdots \cup U_{xy_n}.$$

Posto allora

$$v_x = \min\{v_{xy_1}, \ldots, v_{xy_n}\},$$

risulta $v_x \in \mathcal{L}$ per (a) e per ogni punto $z \in X$ si ha

$$\begin{aligned} z = x \quad &\Longrightarrow \quad v_{xy_m}(x) = u(x) \quad \forall\, m \quad \Longrightarrow \quad v_x(x) = u(x); \\ z \neq x \quad &\Longrightarrow \quad \exists\, m:\ z \in U_{xy_m} \qquad\qquad \Longrightarrow \quad v_x(z) \le v_{xy_m}(z) \le u(z) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Abbiamo così provato che per ogni punto $x \in X$ esiste una funzione $v_x \in \mathcal{L}$ con le seguenti proprietà:

$$v_x(x) = u(x) \qquad \text{e} \qquad v_x(z) \le u(z) + \varepsilon \qquad \forall\, z \in X.$$

Per ogni $x \in X$ esiste allora un intorno aperto $U_x \in \mathcal{U}(x)$ di x tale che risulti

$$v_x(x) = u(x) \qquad \text{e} \qquad v_x(z) \ge u(z) - \varepsilon, \qquad \forall\, z \in U_x,$$

e, come prima, per compattezza esiste un insieme finito di punti $x_1, \ldots, x_k$ di X tale che risulti

$$X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_k}.$$

Posto allora

$$v = \max\{v_{x_1}, \ldots, v_{x_k}\},$$

risulta $v \in \mathcal{L}$ per (a) e per ogni punto $z \in X$ si ha

$$\begin{aligned} \exists\, h:\ v(z) = v_{x_h}(z) \quad &\Longrightarrow \quad v(z) = v_{x_h}(z) \le u(z) + \varepsilon; \\ \exists\, h:\ z \in U_{x_h} \qquad\quad &\Longrightarrow \quad v(z) \ge v_{x_h}(z) \ge u(z) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Abbiamo così provato che per la funzione $v \in \mathcal{L}$ si ha $|v(z) - u(z)| \le \varepsilon$ per ogni $z \in X$ e questo completa la dimostrazione. □

Possiamo ora provare il *teorema di Stone–Weierstrass*.

TEOREMA 2.6 (M. H. Stone–K. Weierstrass). *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff compatto e sia $\mathcal{A}$ una sottoalgebra di $C(X)$ tale che*

(a) *per ogni $x, y \in X$, $x \neq y$ esiste $f \in \mathcal{A}$ tale che $f(x) \neq f(y)$;*

(b) *le funzioni costanti $f_c(x) = c$, $x \in X$ ($c \in \mathbb{K}$) appartengono a $\mathcal{A}$;*

e, qualora sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tale anche che

(c) $f \in \mathcal{A} \quad \Longleftrightarrow \quad f^* \in \mathcal{A}$.

Allora, $\mathcal{A}$ è densa in $C(X)$.

La dimostrazione del teorema di Stone–Weierstrass utilizza un caso particolare del classico *teorema di approssimazione polinomiale di Weierstrass* (Teorema 7.26 in [53]).

TEOREMA 2.7 (K. Weierstrass). *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ una funzione continua. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio $p_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ tale che*

$$\sup_{t \in [a,b]} |p_\varepsilon(t) - f(t)| \le \varepsilon.$$

Nel linguaggio che abbiamo sviluppato l'algebra delle restrizioni a un intervallo chiuso e limitato dei polinomi a valori reali o complessi è densa nello spazio delle funzioni continue a valori reali o complessi definite sullo stesso intervallo.

DIMOSTRAZIONE (TEOREMA 2.6). Proviamo dapprima il teorema nel caso in cui $\mathcal{A}$ sia una sottoalgebra dell'algebra reale $C(X) = C(X, \mathbb{R})$ che verifica le ipotesi (a) e (b).

La chiusura $\mathrm{cl}(\mathcal{A})$ di $\mathcal{A}$ è una sottoalgebra reale di $C(X, \mathbb{R})$ che verifica le ipotesi (b) e (c) del teorema di Stone (Teorema 2.4). Inoltre, per ogni coppia di numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$ risulta

$$\min\{a, b\} = b - (a - b)^- = b - \frac{|a - b| - (a - b)}{2};$$

$$\max\{a\,,b\} = (a-b)^+ + b = \frac{|a-b| + (a-b)}{2} + b;$$

e quindi, supponendo di aver provato che risulti

$$(*) \qquad u \in \mathrm{cl}(\mathcal{A}) \qquad \Longrightarrow \qquad |u| \in \mathrm{cl}(\mathcal{A}),$$

si conclude che l'algebra $\mathrm{cl}(\mathcal{A})$ verifica anche l'ipotesi (a) del teorema di Stone (Teorema 2.4). Conseguentemente risulta $\mathrm{cl}(\mathcal{A}) = C(X\,,\mathbb{R})$ e da ciò segue la tesi.
Per provare $(*)$, consideriamo allora $u \in \mathrm{cl}(\mathcal{A})$ e scegliamo $a\,,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tali che risulti $u(X) \subset [a\,,b]$. Per il teorema di approssimazione polinomiale di Weierstrass (Teorema 2.7) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio reale $p_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che risulti

$$\bigl|p_\varepsilon(t) - |t|\bigr| \le \varepsilon, \qquad t \in [a\,,b],$$

da cui segue

$$\bigl|p_\varepsilon \circ u(x) - |u(x)|\bigr| \le \varepsilon, \qquad x \in X,$$

con $p_\varepsilon \circ u \in \mathrm{cl}(\mathcal{A})$ per ogni $\varepsilon > 0$. Risulta quindi $|u| \in \mathrm{cl}(\mathcal{A})$ e questo completa la dimostrazione nel caso reale.
Passiamo quindi a considerare il caso in cui $\mathcal{A}$ è una sottoalgebra dell'algebra complessa $C(X) = C(X\,,\mathbb{C})$ che verifica le ipotesi (a), (b) e (c).
Si ha

$$\bigl\{\mathrm{Re}(f) :\ f \in \mathcal{A}\bigr\} = \bigl\{\mathrm{Im}(f) :\ f \in \mathcal{A}\bigr\}$$

poiché risulta

$$\begin{aligned} u = \mathrm{Re}(f) \text{ con } f \in \mathcal{A} \qquad &\Longrightarrow \qquad u = \mathrm{Im}(if) \text{ con } if \in \mathcal{A};\\ v = \mathrm{Im}(f) \text{ con } f \in \mathcal{A} \qquad &\Longrightarrow \qquad v = \mathrm{Re}(-if) \text{ con } -if \in \mathcal{A}; \end{aligned}$$

e l'insieme

$$\mathcal{A}' = \bigl\{\mathrm{Re}(f) :\ f \in \mathcal{A}\bigr\} = \bigl\{\mathrm{Im}(f) :\ f \in \mathcal{A}\bigr\}$$

così definito risulta essere una sottoalgebra reale di $C(X\,,\mathbb{R})$. Infatti, per ogni coppia di funzioni $u_j \in \mathcal{A}'$ $(j = 1\,,2)$ si ha $u_j = \mathrm{Re}(f_j) = \mathrm{Im}(g_j)$ con $f_j\,,g_j \in \mathcal{A}$ opportune da cui segue

$$su_1 + tu_2 = \mathrm{Re}(sf_1 + tf_2) \quad \forall\, s\,,t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad u_1u_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\bigl((f_1 + f_2^*)g_2\bigr)\,.$$

L'algebra $\mathcal{A}'$ contiene evidentemente tutte le costanti reali poiché $\mathcal{A}$ contiene tutte le costanti complesse. Inoltre, $\mathcal{A}'$ separa i punti di X. Infatti, se $x\,,y \in X$ sono due punti con $x \neq y$, esiste una funzione $f \in \mathcal{A}$ che li separa, cioè tale che sia $f(x) \neq f(y)$. Posto $f = u + iv$ con $u\,,v \in C(X\,,\mathbb{R})$, deve allora essere $u(x) \neq u(y)$ oppure $v(x) \neq v(y)$ e da $u\,,v \in \mathcal{A}'$ segue l'asserto. Pertanto, $\mathcal{A}'$ è denso in $C(X\,,\mathbb{R})$ per quanto provato nella prima parte della dimostrazione.
Sia ora $f \in C(X\,,\mathbb{C})$ una funzione fissata e siano $u\,,v \in C(X\,,\mathbb{R})$ la sua parte reale e la sua parte immaginaria rispettivamente. Esistono allora due successioni $\{u_n\}_n$ e $\{v_n\}_n$ di funzioni di $\mathcal{A}'$ tali che $u_n \to u$ e $v_n \to v$ per $n \to +\infty$ in $C(X\,,\mathbb{R})$. Siano poi $g_n, h_n \in \mathcal{A}$ funzioni tali che risulti $u_n = \mathrm{Re}(g_n)$ e $v_n = \mathrm{Im}(h_n)$ per ogni n. Risulta allora

$$f_n = u_n + iv_n = \frac{g_n + g_n^*}{2} + i\frac{h_n - h_n^*}{2i} \in \mathcal{A}$$

per ogni n e $f_n = u_n + iv_n \to f$ per $n \to +\infty$ in $C(X\,,\mathbb{C})$ e questo prova la tesi. $\square$

Le ipotesi del teorema di Stone–Weierstrass sono essenzialmente anche necessarie per la sua validità. Se infatti X è uno spazio topologico di Hausdorff compatto contenente almeno due punti, per ogni coppia di punti $x\,,y \in X$ con $x \neq y$ esiste $f \in C(X)$ tale che $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$ (Corollario I–2.167) e quindi, se $\mathcal{D} \subset C(X)$ è un insieme denso in $C(X)$, ogni funzione $d \in \mathcal{D}$ con $\|d - f\|_u < 1/2$ separa x da y. Questo prova che (a) è condizione necessaria per la validità del teorema e anche l'ipotesi (b) è tale nel senso che la tesi non può valere con le sole ipotesi (a) e (c) come si vede considerando la sottoalgebra chiusa di $C(X)$ formata da tutte le funzioni di $C(X)$ che si annullano in un punto $x_0 \in X$ fissato. Sulla necessità dell'ipotesi (c) ritorneremo dopo aver osservato che dal teorema di Stone–Weierstrass segue la versione multidimensionale del teorema di approssimazione polinomiale di Weierstrass.

Teorema 2.8. *Siano $K \subset \mathbb{R}^N$ un insieme compatto e $f \in C(K)$ una funzione continua. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio $p_\varepsilon \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ tale che*

$$\sup_{x\in K} |p_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Dimostrazione. L'algebra $P(\mathbb{R}^N)$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ di $\mathbb{R}^N$ separa i punti di $\mathbb{R}^N$, contiene tutte le costanti ed è stabile per passaggio al complesso coniugato nel caso complesso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pertanto, le restrizioni ad ogni insieme compatto K dei polinomi di $P(\mathbb{R}^N)$ sono dense in $C(K)$. □

Il teorema di approssimazione di Weierstrass (Teorema 2.8) non si estende all'algebra $P(\mathbb{C})$ dei polinomi in una variabile complessa

$$p(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n, \qquad z \in \mathbb{C} \quad (n \geq 0),$$

$(a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_0 \neq 0)$ le cui restrizioni a un insieme compatto $K \subset \mathbb{C}$ non sono in genere dense in $C(K)$.
Se infatti l'insieme compatto $K \subset \mathbb{C}$ è la chiusura di un insieme aperto, connesso e limitato $U \subset \mathbb{C}$, il limite di una successione uniformemente convergente su K di polinomi è una funzione olomorfa in U (Teorema 10.28 in [54]). Poiché certamente esistono funzioni di $C(K)$ che non sono olomorfe in U, non tutte le funzioni di $C(K)$ risultano approssimabili dalle restrizioni di polinomi. Lo stesso può accadere per insiemi compatti con interno vuoto (Esercizio 2.2).
L'algebra dei polinomi in una variabile complessa complessa $P(\mathbb{C})$ non soddisfa l'ipotesi (c) del teorema di Stone–Weierstrass e questo mostra che tale ipotesi è in senso debole necessaria per la validità del teorema stesso.
Esaminiamo infine le conseguenze del teorema di Stone–Weierstrass in termini di separabilità degli spazi di funzioni continue.

Teorema 2.9. *Sia (X, d) uno spazio metrico compatto. Allora, $C(X)$ è un'algebra di Banach separabile.*

Dimostrazione. Sia D un insieme (al più) numerabile e denso in X (Teorema I–3.14) e siano $f_d \colon X \to \mathbb{R}$ le funzioni continue definite da

$$f_d(x) = d(x, d), \qquad x \in X \quad (d \in D).$$

L'insieme

$$\mathcal{F} = \left\{ \prod_{d\in F} f_d : \ F \subset D \text{ finito} \right\}$$

formato dai "monomi" delle funzioni f_d $(d \in D)$ è (al più) numerabile e separa i punti di X: dati due punti $x_i \in X$ $(i = 1, 2)$ con $x_1 \neq x_2$ e scelta una successione $\{d_k\}_k$ di punti di D tale che $d_k \to x_2$ per $k \to +\infty$, risulta

$$\lim_{k\to+\infty} d(x_1, d_k) = d(x_1, x_2) > 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{k\to+\infty} d(x_2, d_k) = d(x_2, x_2) = 0$$

da cui segue $d(x_1, d_k) \neq d(x_2, d_k)$ definitivamente.
Conseguentemente, l'insieme $\mathcal{A}$ delle combinazioni lineari a coefficienti razionali $\mathbb{Q}$ o razionali complessi $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ di funzioni di $\mathcal{F}$ e della funzione costante uguale a uno è un'algebra di $C(X)$ che verifica le ipotesi del teorema di Stone–Weierstrass. Essendo $\mathcal{A}$ evidentemente numerabile, la conclusione segue dal teorema citato. □

TEOREMA 2.10. *Siano $K \subset \mathbb{R}^N$ un insieme compatto e $U \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Allora,*

(a) *$C(K)$ è un algebra di Banach separabile;*
(b) *$C_0(U)$ è un algebra di Banach separabile.*

Benché la prima affermazione sia un caso particolare del teorema precedente, ne diamo qui una dimostrazione diretta basata sul teorema di approssimazione di Weierstarss (Teorema 2.8).

DIMOSTRAZIONE. (a) L'insieme $P_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^N)$ dei polinomi a coefficienti razionali di $\mathbb{R}^N$ è numerabile e ogni polinomio a coefficienti reali si approssima uniformemente su K mediante polinomi a coefficienti razionali. Lo stesso vale per i polinomi a coefficienti complessi di $\mathbb{R}^N$ usando l'insieme numerabile dei polinomi a coefficienti nei razionali complessi $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. La conclusione segue quindi da Teorema 2.8.
(b) Siano K_n $(n \geq 1)$ insiemi compatti tali che

$$K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1}) \quad \forall\, n \qquad \text{e} \qquad \bigcup_n K_n = U,$$

e per ogni n sia $\varphi_n \in C_c(U)$ una funzione continua a supporto compatto che interpola tra K_n e $\operatorname{int}(K_{n+1})$ (Teorema I–2.190). Allora, l'insieme

$$\mathcal{D} = \left\{\varphi_n p :\ p \in P_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^N) \text{ e } n \geq 1\right\}$$

ove $P_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^N)$ denota l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali complessi di $\mathbb{R}^N$ è numerabile ed è contenuto in $C_c(U)$. Proviamo che esso è denso in $C_0(U)$. A tal fine, siano dunque $f \in C_0(U)$ e $\varepsilon > 0$ fissati. Esiste allora n tale che risulti $|f| \leq \varepsilon/2$ in $U \setminus K_n$ ed esiste $p \in P_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^N)$ tale che risulti

$$\|p - f\|_{K_{n+1},u} \leq \varepsilon/2.$$

La funzione $\varphi_n p$ appartiene a $\mathcal{D}$ e risulta

$$\|\varphi_n p - f\|_{U,u} = \max\left\{\|\varphi_n p - f\|_{K_{n+1},u}\,, \|\varphi_n p - f\|_{U\setminus K_{n+1},u}\right\}.$$

Si ha allora

$$\|\varphi_n p - f\|_{U\setminus K_{n+1},\infty} = \|f\|_{U\setminus K_{n+1},u} \leq \varepsilon/2$$

mentre per il restante termine risulta

$$\begin{aligned}\|\varphi_n p - f\|_{K_{n+1},u} &\leq \|\varphi_n p - \varphi_n f\|_{K_{n+1},u} + \|\varphi_n f - f\|_{K_{n+1},u} \leq \\ &\leq \|p - f\|_{K_{n+1},u} + \|f\|_{K_{n+1}\setminus K_n,u} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Risulta dunque $\|\varphi_n p - f\|_{U,u} \leq \varepsilon$ e questo completa la dimostrazione. □

Compattezza. Caratterizziamo in questa parte i sottoinsiemi compatti di $C(X)$ quando X è uno spazio topologico di Hausdorff compatto.

DEFINIZIONE 2.11. Siano X uno spazio topologico di Hausdorff e $x_0 \in X$ un punto. Un insieme $\mathcal{F} \subset C(X)$ si dice *equicontinuo in* x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $U_{x_0} \in \mathcal{U}(x_0)$ intorno di x_0 tale che

$$x \in U_{x_0} \text{ e } f \in \mathcal{F} \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon. \qquad \square$$

Come al solito poi, l'insieme $\mathcal{F} \subset C(X)$ si dice *equicontinuo in* X o più brevemente ancora *equicontinuo* se è tale in ogni punto dello spazio X e, quando $(X\,, d)$ è uno spazio metrico, è chiaro cosa significhi che l'insieme $\mathcal{F}$ è *uniformemente equicontinuo in* X.

LEMMA 2.12. *Siano X uno spazio topologico di Hausdorff compatto e $\mathcal{F} \subset C(X)$ un insieme equicontinuo. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *per ogni* $x \in X$ *esiste* $M_x \geq 0$ *tale che*

$$|f(x)| \leq M_x, \qquad u \in \mathcal{F};$$

(b) *esiste* $M \geq 0$ *tale che*

$$|f(x)| \leq M, \qquad x \in X \text{ e } f \in \mathcal{F}.$$

L'ipotesi (a) corrisponde a richiedere che $\mathcal{F}$ sia un insieme puntualmente limitato su X di funzioni e l'ipotesi (b) che $\mathcal{F}$ sia un insieme uniformemente limitato di funzioni su X ovvero sia un sottoinsieme limitato di $C(X)$. Per un insieme equicontinuo di $C(X)$ con X spazio topologico di Hausdorff compatto la limitatezza puntuale equivale quindi alla limitatezza uniforme.

Dimostrazione. È sufficiente provare che (a) implica (b), essendo l'altra implicazione ovvia. Fissato $\varepsilon = 1$, per ogni $x \in X$, sia $U_x \in \mathcal{U}(x)$ intorno aperto di x tale che

$$y \in U_x \text{ e } f \in \mathcal{F} \qquad \Longrightarrow \qquad |f(y) - f(x)| \leq 1.$$

Per compattezza esistono punti $x_m \in X$ $(m = 1, \ldots, n)$ tali che per i corrispondenti intorni $U_m = U_{x_m}$ risulta

$$X = U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

Scegliamo quindi $M \geq 0$ tale che risulti $|f(x_m)| \leq M$ per ogni m e per ogni $f \in \mathcal{F}$. Allora, per ogni $x \in X$ esiste $m \in \{1, \ldots, n\}$ tale che risulti $x \in U_m$ cosicché risulta

$$|f(x)| \leq |f(x_m)| + |f(x) - f(x_m)| \leq M + 1$$

per ogni $x \in X$ e per ogni $u \in \mathcal{F}$. □

Possiamo ora caratterizzare i sottoinsiemi compatti di $C(X)$ in termini di limitatezza puntuale ed equicontinuità delle funzioni.

Teorema 2.13 (G. Ascoli–C. Arzelà). *Siano X uno spazio topologico di Hausdorff compatto e $\mathcal{K} \subset C(X)$ un insieme. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *$\mathcal{K}$ è chiuso, puntualmente limitato e equicontinuo;*

(b) *$\mathcal{K}$ è compatto in $C(X)$.*

Con le ovvie modifiche si caratterizzano i sottoinsiemi relativamente compatti di $C(X)$.

Dimostrazione. (a) Sia $\varepsilon > 0$ fissato e per ogni $x \in X$ sia V_x un intorno aperto di x tale che

$$y \in V_x \qquad \Longrightarrow \qquad |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall\, f \in \mathcal{K}.$$

Essendo X compatto, esistono punti in numero finito $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che i corrispondenti intorni $V_m = V_{x_m}$ $(m = 1 \ldots, n)$ ricoprono X:

$$X = V_1 \cup \cdots \cup V_n.$$

Siano $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C_c(X)$ una partizione dell'unità di X subordinata al ricoprimento $\{V_1, \ldots, V_n\}$ (Teorema I–2.192) cosicché risulta $\varphi_m \prec V_m$ per ogni m e

$$\varphi_1(x) + \cdots + \varphi_n(x) = 1, \qquad x \in X,$$

e sia M_ε il sottospazio di $C(X)$ di dimensione finita definito da

$$M_\varepsilon = \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}.$$

Per ogni $f \in C(X)$ sia $f_\varepsilon \in M_\varepsilon$ la proiezione di f su M_ε definita da

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{1 \leq m \leq n} f(x_m)\varphi_m(x), \qquad x \in X.$$

Per ogni funzione $f \in \mathcal{K}$ si ha allora

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| \le \left| \sum_{1 \le m \le n} [f(x) - f(x_m)| \, \varphi_m(x) \right|, \qquad x \in X,$$

cosicché, posto $I_x = \{m = 1, \ldots, n : \, x \in V_m\}$ per ogni $x \in X$, si ha

$$\begin{aligned} |f(x) - f_\varepsilon(x)| &\le \left| \sum_{m \in I_x} [f(x) - f(x_m)| \, \varphi_m(x) \right| \le \\ &\le \sum_{m \in I_x} |f(x) - f(x_m)| \varphi_m(x) \le \varepsilon \sum_{m \in I_x} \varphi_m(x) \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Abbiamo così provato che risulta $d(f\,, M_\varepsilon) \le \varepsilon$ per ogni $f \in \mathcal{K}$ e quindi, essendo $\mathcal{K}$ chiuso e limitato (Lemma 2.12), esso è anche compatto in $C(X)$ (Teorema 1.26).

(b) Se $\mathcal{K}$ è compatto, esso è chiuso e limitato e quindi in particolare è puntualmente limitato. Inoltre, fissato $\varepsilon > 0$, esistono funzioni $f_m \in \mathcal{K}$ $(m = 1, \ldots, n)$ tali che risulti

$$\mathcal{K} \subset B_{\varepsilon/3}(f_1) \cup \cdots \cup B_{\varepsilon/3}(f_n)$$

(Teorema I–3.16) e per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno aperto V_x di x tale che si abbia

$$y \in V_x \qquad \Longrightarrow \qquad |f_m(y) - f_m(x)| \le \varepsilon/3 \qquad \forall\, m = 1, \ldots, n.$$

Sia ora $f \in \mathcal{K}$ e sia m tale che risulti $f \in B_{\varepsilon/3}(f_m)$. Allora, per ogni $x \in X$ e per ogni $y \in V_x$ risulta

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\le |f(y) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \le \\ &\le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

e questo prova che $\mathcal{K}$ è un insieme equicontinuo. □

Duale di $C_0(X)$. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e sia $\mu\colon \mathcal{B}(X) \to \mathbb{C}$ una misura di Borel reale o complessa in X con decomposizione polare $\theta = d\mu/d|\mu|$ (Corollario II–4.22). Allora, ogni funzione $f \in C_0(X)$ risulta $\mu-$integrabile e l'integrale rispetto alla misura di Borel reale o complessa μ delle funzioni di $C_0(X)$

$$(**) \qquad L_\mu f = \int_X f \, d\mu = \int_X f\theta \, d|\mu|_{\mathrm{tv}}, \qquad f \in C_0(X),$$

risulta essere un funzionale lineare limitato su $C_0(X)$ con norma $\|L_\mu\|$ non superiore alla variazione totale $\|\mu\|_{\mathrm{tv}} = |\mu|_{\mathrm{tv}}(X)$ poiché si ha

$$|L_\mu f| \le \|\mu\|_{\mathrm{tv}} \|f\|_u, \qquad f \in C_0(X).$$

Se si suppone inoltre che μ sia una misura di Radon complessa in X, la disuguaglianza precedente diviene un'uguaglianza.

Proposizione 2.14. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e siano $\mu\colon \mathcal{B}(X) \to \mathbb{C}$ una misura di Radon reale o complessa in X e $L_\mu \in [C_0(X)]^*$ il funzionale lineare limitato definito da $(**)$. Allora,*

$$\|L_\mu\| = \|\mu\|_{\mathrm{tv}}.$$

Dimostrazione. Per le considerazioni iniziali risulta $\|L_\mu\| \le \|\mu\|_{\mathrm{tv}}$. Per provare la disuguaglianza opposta, essendo $|\mu|_{\mathrm{tv}}$ una misura di Radon in X positiva e finita (Proposizone II–4.14), per Corollario II–3.13 possiamo approssimare la decomposizione polare $\theta\colon X \to \mathbb{C}$ di μ mediante funzioni $\psi_n \in C_{\mathrm{c}}(X)$ $(n \ge 1)$ tali che

- $|\psi_n(x)| \le 1$ per ogni $x \in X$;
- $\psi_n \to \theta^*$ $|\mu|_{\mathrm{tv}}$– quasi ovunque in X per $n \to +\infty$.

Sia quindi $K \subset X$ un insieme compatto e sia $\varphi \in C_{\mathrm{c}}(X)$ una funzione tale che $K \prec \varphi$. Si ha allora

$$
\begin{aligned}
|\mu|_{\mathrm{tv}}(K) \le \int_X \varphi\, d|\mu|_{\mathrm{tv}} &= \lim_{n\to+\infty} \int_X \varphi\psi_n\theta\, d|\mu|_{\mathrm{tv}} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} L(\psi_n\varphi) \le \limsup_{n\to+\infty} \|L_\mu\| \|\psi_n\varphi\|_u \le \|L_\mu\|
\end{aligned}
$$

da cui segue

$$\|\mu\|_{\mathrm{tv}} = |\mu|_{\mathrm{tv}}(X) \le \|L_\mu\|$$

per regolarità interna e questo completa la dimostrazione. □

Pertanto, ogni misura di Radon reale o complessa $\mu \in \mathcal{M}(X)$ determina tramite integrazione un funzionale lineare limitato su $C_0(X)$ la cui norma coincide con la norma della misura μ come elemento dello spazio di Banach $\mathcal{M}(X)$ delle misure di Radon realio o complesse in X. Il *teorema di rappresentazione di Riesz* (anche questo!) che esaminiamo in questa parte stabilisce che ogni funzionale lineare limitato su $C_0(X)$ si ottiene in questo modo e che il duale di $C_0(X)$ si identifica isometricamente con lo spazio di Banach $\mathcal{M}(X)$ delle misure di Radon complesse in X. L'osservazione chiave che consente di passare dal teorema di rappresentazione di Riesz dei funzionali lineari positivi su $C_{\mathrm{c}}(X)$ (Teorema II–3.2) al teorema di rappresentazione di Riesz dei funzionali lineari limitati su $C_0(X)$ è la seguente decomposizione *alla Jordan* dei funzionali lineari limitati su $C_0(X,\mathbb{R})$ nella differenza di due funzionali lineari limitati e positivi.

Teorema 2.15. *Siano X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e $L \in [C_0(X,\mathbb{R})]^*$ un funzionale lineare limitato su $C_0(X,\mathbb{R})$. Allora, esistono due funzionali lineari $L^\pm \in [C_0(X,\mathbb{R})]^*$ tali che*

(a) $L^\pm \ge 0$;
(b) $L = L^+ - L^-$.

Inoltre, se $\Lambda^\pm \in [C_0(X,\mathbb{R})]^*$ sono un'altra coppia di funzionali lineari con le proprietà (a) e (b) risulta

(c) $u \in C_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{R})$ *e* $u \ge 0$ *in* $X \qquad \Longrightarrow \qquad \Lambda^\pm u \ge L^\pm u$.

La condizione di positività in (a) significa che

$$u \in C_0(X,\mathbb{R}) \text{ e } u \ge 0 \qquad \Longrightarrow \qquad L^\pm u \ge 0.$$

Dimostrazione. Definiamo L^+ sul cono $C_0^+(X)$ delle funzioni $u \in C_0(X,\mathbb{R})$ tali che $u(x) \ge 0$ per ogni $x \in X$ ponendo

$$L^+ u = \sup\left\{Lv : \ v \in C_0^+(X) \text{ e } 0 \le v \le u\right\}, \qquad u \in C_0^+(X).$$

Chiaramente risulta

- $0 \le L^+ u \le \|L\|\|u\|_u$ per ogni $u \in C_0^+(X)$;
- $0 \le L^+ u \le L^+ v$ per ogni $u, v \in C_0^+(X)$ con $0 \le u \le v$;
- $L^+(cu) = cL^+ u$ per ogni $u \in C_0^+(X)$ e $c \ge 0$;

e proviamo inoltre che L^+ è anche additivo su $C_0^+(X)$:

- $L^+(u_1 + u_2) = L^+ u_1 + L^+ u_2$ per ogni $u_i \in C_0^+(X)$ $(i = 1, 2)$.

Siano infatti $u_i \in C_0^+(X)$ $(i = 1, 2)$ due funzioni fissate (non entrambe nulle) e siano $v_i \in C_0^+(X)$ funzioni tali che risulti $0 \le v_i \le u_i$ per $i = 1, 2$. Risulta allora $0 \le v_1 + v_2 \le u_1 + u_2$ e

$$Lv_1 + Lv_2 = L(v_1 + v_2) \le L^+(u_1 + u_2)$$

da cui segue $L^+u_1 + L^+u_2 \le L^+(u_1 + u_2)$. Viceversa, sia $v \in C_0^+(X)$ una funzione tale che risulti $0 \le v \le u_1 + u_2$ e, posto $U = \{u_1 + u_2 > 0\}$, siano v_i le funzioni definite da

$$v_i(x) = \begin{cases} \dfrac{u_i(x)v(x)}{u_1(x) + u_2(x)} & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus U \end{cases} \qquad (i = 1, 2).$$

Poiché U è aperto e risulta $0 \le v_i \le u_i$ per costruzione, le funzioni v_i sono continue e non negative e appartengono a $C_0^+(X)$. Da $v_1 + v_2 = v$ e da

$$Lv = L(v_1 + v_2) = Lv_1 + Lv_2 \le L^+(u_1) + L^+(u_2)$$

segue $L^+(u_1 + u_2) \le L^+u_1 + L^+u_2$ e questo prova l'asserto.
Estendiamo ora L^+ da $C_0^+(X)$ a tutto $C_0(X, \mathbb{R})$ ponendo per definizione

$$L^+u = L^+(u^+) - L^+(u^-), \qquad u \in C_0(X, \mathbb{R}),$$

e proviamo che L^+ così definito è lineare su $C_0(X, \mathbb{R})$ oltre che positivo per costruzione. Siano a tal fine $u, v \in C_0(X, \mathbb{R})$ due funzioni fissate. Come nella dimostrazione di Teorema II–2.37 – (b), da

$$(u + v)^+ + u^- + v^- = (u + v)^- + u^+ + v^+$$

segue

$$L^+(u + v)^+ + L^+(u^-) + L^+(v^-) = L^+(u + v)^- + L^+(u^+) + L^+(v^+)$$

che implica

$$L^+(u + v) = L^+u + L^+v.$$

Inoltre, per $u \in C_0(X, \mathbb{R})$ e $c \ge 0$ risulta

$$\begin{aligned} (cu)^\pm &= cu^\pm \qquad &&\Longrightarrow \qquad L^+(cu) = cL^+u; \\ (-u)^\pm &= u^\mp \qquad &&\Longrightarrow \qquad L^+(-u) = -L^+u \end{aligned}$$

e da ciò segue facilmente la linearità dell'estensione di L^+ a tutto $C_0(X, \mathbb{R})$. Infine, risulta

$$|L^+u| \le L^+(u^+) + L^+(u^-) = L^+(|u|) \le \|L\| \|u\|_u, \qquad u \in C_0(X, \mathbb{R}),$$

e quindi $L^+ \in [C_0(X, \mathbb{R})]^*$ con $\|L^+\| \le \|L\|$. Ponendo infine $L^- = L^+ - L$, risulta $L^- \in [C_0(X, \mathbb{R})]^*$ e

$$u \in C_0^+(X) \qquad \Longrightarrow \qquad L(u) \le L^+u \qquad \Longrightarrow \qquad L^-u \ge 0.$$

Quindi anche L^- è un funzionale lineare positivo di $[C_0(X, \mathbb{R})]^*$ e questo completa la dimostrazione di (a) e (b).
Resta infine da provare la minimalità della decomposizione fornita da $L^\pm$. Consideriamo a tal fine due funzionali lineari e positivi $\Lambda^\pm \in [C_0(X, \mathbb{R})]^*$ tali che risulti $L = \Lambda^+ - \Lambda^-$ e due funzioni $u, v \in C_0^+(X)$ con $0 \le v \le u$. Si ha allora

$$Lv = \Lambda^+v - \Lambda^-v \le \Lambda^+v \le \Lambda^+u$$

da cui segue $L^+u \le \Lambda^+u$. Per l'altra disuguaglianza si ha

$$L^-u = L^+u - Lu \le \Lambda^+u - Lu = \Lambda^-u$$

per ogni $u \in C_0^+(X)$ e questo completa la dimostrazione. $\square$

Possiamo ora provare il teorema di rappresentazione del duale di $C_0(X)$ di F. Riesz.

Teorema 2.16 (F. Riesz). *Siano X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e $L \in [C_0(X)]^*$ un funzionale lineare limitato su $C_0(X)$. Allora,*

(a) *esiste una ed una sola misura di Radon a valori in $\mathbb{K}$ $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tale che*
$$Lf = \int_X f\,d\mu, \qquad f \in C_0(X);$$
(b) $\|L\| = \|\mu\|_{\mathrm{tv}}$.

Nel caso particolare in cui $C_0(X) = C_0(X, \mathbb{R})$ sia lo spazio delle funzioni reali e continue su X che si annullano all'infinito e L sia un funzionale $\mathbb{R}-$lineare limitato, la misura di Radon μ che rappresenta L risulta anch'essa reale.

Dimostrazione. Per fissare le idee consideriamo il caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Fissata una funzione $f \in C_0(X)$, si ha $f = u + iv$ con $u, v \in C_0(X, \mathbb{R})$ e quindi risulta
$$Lf = Lu + iLv, \qquad f = u + iv \in C_0(X),$$
cosicché L si ricostruisce a partire dalla sua restrizione
$$J = L_{|C_0(X,\mathbb{R})}$$
al sottospazio reale $C_0(X, \mathbb{R})$ di $C_0(X)$. Tale restrizione J è un funzionale $\mathbb{R}-$lineare a valori complessi che si decompone a sua volta nella somma
$$J = J_1 + iJ_2$$
di due funzionali $\mathbb{R}-$lineari limitati J_h su $C_0(X, \mathbb{R})$ con norma $\|J_h\| \le \|J\| \le \|L\|$ per $h = 1, 2$. Per la decomposizione di Jordan dei funzionali lineari limitati su $C_0(X, \mathbb{R})$ (Teorema 2.15) esistono allora due coppie di funzionali lineari positivi $J_h^\pm \in [C_0(X, \mathbb{R})]^*$ tali che $J_h = J_h^+ - J_h^-$ e per il teorema di rappresentazione di Riesz (Teorema II–3.2) dei funzionali lineari positivi essi determinano altrettante misure di Radon positive e complete $\mu_h^\pm \colon \mathcal{S}_h^\pm \to [0, +\infty]$ in X che li rappresentano su $C_c(X, \mathbb{R})$ tramite le formule
$$(***) \qquad J_h^\pm \varphi = \int_X \varphi\,d\mu_h^\pm, \qquad \varphi \in C_c(X, \mathbb{R}).$$
Dalla dimostrazione di Teorema II–3.2 risulta inoltre
$$\mu_h^\pm(X) = \sup\left\{J_h^\pm\varphi :\ \varphi \prec X\right\} \le \|J_h^\pm\|$$
e quindi le misure $\mu_h^\pm$ risultano misure di Radon regolari e l'uguaglianza in $(***)$ si estende dalle funzioni φ di $C_c(X, \mathbb{R})$ a tutte le funzioni u di $C_0(X, \mathbb{R})$ per continuità e per convergenza dominata.

Le misure $\mu_h \colon \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$ definite da $\mu_h = \mu_h^+ - \mu_h^-$ $(h = 1, 2)$ sulla $\sigma-$algebra di Borel $\mathcal{B}(X)$ sono allora misure di Radon reali in X che rappresentano i funzionali J_h su $C_0(X, \mathbb{R})$ mediante le formule
$$J_h u = J_h^+ u - J_h^- u = \int_X u\,d\mu_h^+ - \int_X u\,d\mu_h^- = \int_X u\,d\mu_h, \qquad u \in C_0(X, \mathbb{R}),$$
e conseguentemente $\mu \colon \mathcal{B}(X) \to \mathbb{C}$ definita da $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ risulta essere a sua volta una misura di Radon complessa in X tale che, per ogni funzione $f = u + iv \in C_0(X)$ con $u, v \in C_0(X, \mathbb{R})$, si ha
$$\begin{aligned} Lf = Ju + iJv &= J_1 u + iJ_2 u + i[J_1 v + iJ_2 v] = \\ &= \int_X u\,d\mu_1 + i\int_X u\,d\mu_2 + i\left[\int_X v\,d\mu_1 + i\int_X v\,d\mu_2\right] = \\ &= \int_X f\,d\mu_1 + i\int_X f\,d\mu_2 = \int_X f\,d\mu. \end{aligned}$$

Questo prova l'esistenza di μ e l'unicità segue da (b) che non è altro che l'uguaglianza di Proposizione 2.14. □

Dal teorema di Riesz si ricava che il duale di $C_0(X)$ si identifica isometricamente con lo spazio di Banach $\mathcal{M}(X)$ delle misure di Radon reali o complesse in X munito della norma della variazione totale (Esempio 1.2 – (e)).

COROLLARIO 2.17. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto. La funzione*

$$\mu \in \mathcal{M}(X) \mapsto L_\mu \in [C_0(X)]^*$$

ove L_μ è definito da $(**)$ è un isomorfismo isometrico di $\mathcal{M}(X)$ su $[C_0(X)]^*$.

2.2. Spazi L_p

Ad ogni misura positiva su una σ – algebra di insiemi di un insieme astratto si associano in maniera naturale vari spazi di funzioni integrabili. I più importanti spazi di questo tipo sono gli spazi di funzioni di potenza p integrabili che esaminiamo in questa sezione nel caso di funzioni a valori reali o complessi.
Come al solito in tutta la sezione denotiamo con $\mathbb{K}$ il campo dei numeri reali o complessi.

Spazi L_p. Sia $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva su una σ – algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di un insieme astratto (non vuoto) X che supponiamo fissata in tutta questa parte e sia $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ lo spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ delle funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili $f\colon X \to \mathbb{K}$ (Sezione II–2.5). Come per gli spazi di funzioni continue, nel seguito utilizzeremo lo stesso simbolo $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ senza distinguere tra i casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e, in assenza di un'esplicita indicazione diversa, tutti i risultati che vedremo valgono senza modifiche per entrambi i casi. La stessa considerazione si applica a tutti gli spazi di funzioni che definiremo in questa sezione.
A ogni funzione $f \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ e a ogni indice $1 \le p \le +\infty$ associamo il numero reale esteso non negativo

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left(\int_X |f|^p \, d\lambda \right)^{1/p} \in [0, +\infty], && 1 \le p < +\infty; \\ \|f\|_\infty &= \inf \big\{ t \ge 0 : \ \lambda\big(\{ |f| > t \} \big) = 0 \big\} \in [0, +\infty], && p = +\infty. \end{aligned}$$

Le proprietà della funzione $\| \cdot \|_p\colon \mathcal{L}(\mathcal{S}) \to [0, +\infty]$ $(1 \le p \le +\infty)$ così definita sono elencate nella proposizione seguente.

PROPOSIZIONE 2.18. *Sia $1 \le p \le +\infty$ e siano $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ funzioni $\mathcal{S}$ – misurabili. Allora,*

(a) $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ *λ – quasi ovunque in X;*
(b) $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$ *per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$;*
(c) $\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

In (b) adottiamo la usuale convenzione per cui $0 \cdot \infty = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Per $1 \le p < +\infty$ le proprietà (a) e (b) sono ben note proprietà dell'integrale e la disuguaglianza in (c) non è altro che la disuguaglianza di Minkowski (Teorema II–2.29). Per $p = +\infty$ si ha

$$\{ |f| > 0 \} = \bigcup_n \{ |f| > 1/n \}$$

e quindi $\|f\|_\infty = 0$ implica $f = 0$ $\lambda-$quasi ovunque in X. Il viceversa è ovvio e lo stesso dicasi per (b). Infine, per ogni $s, t > 0$ risulta

$$\{|f+g| > s+t\} \subset \{|f| > s\} \cup \{|g| > t\}$$

e quindi, nel caso sia $\|f\|_\infty < +\infty$ e $\|g\|_\infty < +\infty$, per $s > \|f\|_\infty$ e $t > \|g\|_\infty$ risulta $\|f+g\|_\infty \le s+t$ e la conclusione segue passando all'estremo inferiore al variare di $s > \|f\|_\infty$ e $t > \|g\|_\infty$. □

Denotiamo con

$$\mathcal{L}_p(\lambda) = \{f \in \mathcal{L}(\mathcal{S}) : \|f\|_p < +\infty\}$$

l'insieme delle funzioni $\mathcal{S}-$misurabili f a valori in $\mathbb{K}$ per le quali $\|f\|_p$ risulta finito. Per $1 \le p < +\infty$ gli elementi di $\mathcal{L}_p(\lambda)$ sono le funzioni $\mathcal{S}-$misurabili che sono $\lambda-$integrabili su X alla potenza $p \in [1, +\infty)$ mentre per $f \in \mathcal{L}_\infty(\lambda)$, risulta

$$\{|f| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_{n\ge 1} \left\{|f| > \|f\|_\infty + \frac{1}{n}\right\}$$

da cui segue

$$(*) \qquad |f(x)| \le \|f\|_\infty \qquad \text{per } \lambda-\text{q.o. } x \in X$$

e quindi $\mathcal{L}_\infty(\lambda)$ si riduce all'insieme delle funzioni $\mathcal{S}-$misurabili che sono $\lambda-$quasi ovunque limitate in X:

$$f \in \mathcal{L}_\infty(\lambda) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ è } \lambda-\text{quasi ovunque limitata in } X.$$

Gli insiemi $\mathcal{L}_p(\lambda)$ $(1 \le p \le +\infty)$ sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ (Proposizione 2.18) e la restrizione di $\|\cdot\|_p$ a $\mathcal{L}_p(\lambda)$ verifica tutte le proprietà di una norma ad eccezione della proprietà di unicità dell'annullamento della norma in corrispondenza della funzione nulla[1].

Poiché la funzione $\|\cdot\|_p$ non distingue tra funzioni di $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ che sono $\lambda-$quasi ovunque uguali in X, è possibile considerare tale funzione come effettivamente definita sulle classi di equivalenza di funzioni $\mathcal{S}-$misurabili che sono $\lambda-$quasi ovunque uguali tra loro invece che sulle funzioni $\mathcal{S}-$misurabili stesse e, come abbiamo fatto già per $L(\lambda)$ in Sezione II–2.5, considerare gli spazi vettoriali

$$L_p(\lambda) = \mathcal{L}_p(\lambda)/N \qquad (1 \le p \le +\infty)$$

definiti come quozienti di $\mathcal{L}_p(\lambda)$ rispetto al sottospazio N delle funzioni di $\mathcal{L}_p(\lambda)$ che sono $\lambda-$quasi ovunque nulle in X.

Gli elementi di $L_p(\lambda)$ $(1 \le p \le +\infty)$ sono quindi le classi d'equivalenza di funzioni $\mathcal{S}-$misurabili f da X a valori in $\mathbb{K}$ con $\|f\|_p < +\infty$ che sono $\lambda-$quasi ovunque uguali tra loro. Come abbiamo già illustrato in Sezione II–2.5 per lo spazio vettoriale $L(\lambda)$, nel seguito identificheremo sistematicamente gli elementi di $L_p(\lambda)$ con funzioni $\mathcal{S}-$misurabili e parleremo di essi come di funzioni $\mathcal{S}-$misurabili piuttosto che come classi di equivalenza di funzioni $\mathcal{S}-$misurabili uguali $\lambda-$quasi ovunque relegando l'identificazione precedente ad una tacita convenzione. Coerentemente con quanto già stabilito, qualora sia necessario considerare in luogo della classe di equivalenza $f \in L_p(\lambda)$ una specifica funzione $f \in \mathcal{L}_p(\lambda)$ definita puntualmente su X, ci riferiremo ad essa come ad un rappresentativo della classe di equivalenza $f \in L_p(\lambda)$. Rinviamo alla Sezione II–2.5 per ulteriori considerazioni su questa identificazione. Con questa convenzione risulta

$$L_p(\lambda) = \{f \in L(\mathcal{S}) : \|f\|_p < +\infty\} \qquad (1 \le p \le +\infty)$$

e gli spazi normati $(L_p(\lambda), \|\cdot\|_p)$ $(1 \le p \le +\infty)$ così definiti si dicono *spazi* L_p.

[1] La funzione $\|\cdot\|_p$ è una seminorma nel senso della definizione della successiva Sezione 4.2.

Esempio 2.19. Sia I un insieme infinito munito della misura del conteggio $\#$ definita sull'insieme delle parti di I. Ogni funzione $x\colon I \to \mathbb{K}$ è misurabile e risulta

$$\int_X |x(i)|^p \, d\#(i) = \sum_{i\in I} |x(i)|^p$$

per ogni $1 \le p < +\infty$ (Esempio II–2.35). Poiché la misura del conteggio è priva di insiemi trascurabili non banali, lo spazio vettoriale delle (classi di equivalenza di) funzioni $p-$integrabili su I rispetto alla misura del conteggio è in effetti formato dalle funzioni $x\colon I \to \mathbb{K}$ tali che

$$\sum_{i\in I} |x(i)|^p < +\infty$$

per ogni $1 \le p < +\infty$. Tale spazio si denota con $\ell_p(I)$ in luogo di $L_p(\#)$.
Analogamente, per $p = +\infty$, lo spazio delle (classi di equivalenza di) funzioni $\#-$quasi ovunque limitate è formato dalle funzioni $x\colon I \to \mathbb{K}$ limitate. Tale spazio si denota con $\ell_\infty(I)$ in luogo di $L_\infty(\#)$ e risulta $\ell_\infty(I) = B(I)$.
Per $I = \mathbb{N}_+$ si ritrovano gli spazi ℓ_p delle successioni $p-$sommabili ($1 \le p < +\infty$) o limitate ($p = +\infty$) di Esempio 1.2. □

Evidenziamo nei risultati seguenti alcune proprietà elementari degli spazi L_p la più importante delle quali è la completezza (Teorema 2.24). Ulteriori proprietà sono esaminate negli esercizi (Esercizi **??**,...,**??**).

Proposizione 2.20. *Siano $1 \le p, q \le +\infty$ esponenti coniugati. Allora,*

$$f \in L_p(\lambda) \text{ e } g \in L_q(\lambda) \qquad \Longrightarrow \qquad fg \in L_1(\lambda) \text{ e } \|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q .$$

La dimostrazione è ovvia: per $1 < p, q < +\infty$ la tesi segue dalla disuguaglianza di Hölder (Teorema II–2.28) e per $p = 1$ e $q = +\infty$ (o viceversa) segue da $(*)$ e dalle proprietà dell'integrale.
Esaminiamo ora le relazioni insiemistiche tra $L_p(\lambda)$ e $L_q(\lambda)$: per $p \ne q$ risulta in genere $L_p(\lambda) \triangle L_q(\lambda) \ne \varnothing$ come illustrato nell'esempio seguente.

Esempio 2.21. In $(0, +\infty)$ con la misura di Lebesgue, siano

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha} 1_{(0,1]}(x) \qquad \text{e} \qquad g_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha} 1_{[1,+\infty)}(x)$$

per $x > 0$ ($\alpha > 0$). Per $1 \le p < q < +\infty$ risulta

$$\begin{aligned} p < 1/\alpha \le q \qquad &\Longrightarrow \qquad f_\alpha \in L_p(0, +\infty) \text{ e } f_\alpha \notin L_q(0, +\infty); \\ p \le 1/\alpha < q \qquad &\Longrightarrow \qquad g_\alpha \notin L_p(0, +\infty) \text{ e } g_\alpha \in L_q(0, +\infty). \end{aligned}$$

Per la misura di Lebesgue in $(0, +\infty)$ risulta quindi $L_p \setminus L_q \ne \varnothing$ e viceversa per ogni $1 \le p < q < +\infty$. □

La situazione illustrata nell'esempio precedente per la misura di Lebesgue non è specifica di tale misura ma è paradigmatica di tutte le misure illimitate con l'esclusione di situazioni particolari (Esercizio 2.14). Per ogni funzione $f \in L(\lambda)$ e per ogni $1 \le p < +\infty$ si ha infatti

$$\int_X |f|^p \, d\lambda = \int_{\{|f|\le 1\}} |f|^p \, d\lambda + \int_{\{|f|>1\}} |f|^p \, d\lambda$$

e quindi, se f non appartiene a $L_p(\lambda)$, deve presentarsi uno dei due casi seguenti

$$\int_{\{|f|\le 1\}} |f|^p \, d\lambda = +\infty \qquad \text{o} \qquad \int_{\{|f|>1\}} |f|^p \, d\lambda = +\infty$$

o eventualmente entrambi. Nel primo caso deve essere $\lambda(\{0 < |f| \le 1\}) = +\infty$ e f non appartiene a $L_p(\lambda)$ perché, qualora anche f assuma valori sempre più piccoli,

essi non vanno a zero sufficientemente velocemente in relazione alla misura degli insiemi su cui sono assunti. Nel secondo caso deve essere $\lambda(\{|f| > 1\}) > 0$ e, qualora anche tale insieme abbia misura finita, i valori di f crescono troppo velocemente in relazione alla misura degli insiemi su cui sono assunti.
Per una funzione f fissata, al crescere di p migliora quindi l'integrabilità del primo termine e peggiora quella del secondo o, in altri termini, per $p < q$ le funzioni di L_p possono divergere più rapidamente delle funzioni in L_q e viceversa le funzioni di L_q possono essere più sparse in X di quelle in L_p. Con l'esclusione di situazioni particolari, questo diverso comportamento dei due termini al crescere di p è all'origine della mancanza di monotonia degli spazi L_p rispetto all'esponente di integrazione.
I risultati seguenti indagano ulteriormente le relazioni tra spazi L_p in dipendenza dell'esponente di integrazione.

PROPOSIZIONE 2.22. *Siano* $1 \le p < q < r \le +\infty$. *Allora,*

$$L_p(\lambda) \cap L_r(\lambda) \subset L_q(\lambda) \subset L_p(\lambda) + L_r(\mu)$$

e risulta

$$\|f\|_q \le \|f\|_p^{\varepsilon} \|f\|_r^{1-\varepsilon}, \qquad f \in L_p(\lambda) \cap L_r(\lambda),$$

con $0 < \varepsilon < 1$ *definito da* $1/q = \varepsilon/p + (1-\varepsilon)/r$ *e*

$$\inf \big\{ \|g\|_p + \|h\|_r : \ f = g + h \ e \ g \in L_p(\lambda) \ e \ h \in L_r(\lambda) \big\} \le 2\|f\|_q$$

per ogni $f \in L_p(\lambda) + L_r(\lambda)$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo dapprima il caso $r < +\infty$.
Sia $f \in L_p(\lambda) \cap L_r(\lambda)$ e sia $t \in (0,1)$ definito da $q = tr + (1-t)p$. Dalla disuguaglianza di Hölder con esponenti coniugati $1/(1-t)$ e $1/t$ segue

$$\int_X |f|^q \, d\lambda = \int_X |f|^{(1-t)p} |f|^{tr} \, d\lambda \le \left(\int_X |f|^p \, d\lambda \right)^{(1-t)} \left(\int_X |f|^r \, d\lambda \right)^t < +\infty$$

e, passando alla radice $q-$esima, risulta

$$\|f\|_q \le \|f\|_p^{p(1-t)/q} \|f\|_r^{rt/q}.$$

Ponendo $\varepsilon = p(1-t)/q$, da $q = tr + (1-t)p$ segue $rt/q = 1 - \varepsilon$ con

$$\frac{\varepsilon}{p} + \frac{1-\varepsilon}{r} = \frac{1-t}{q} + \frac{t}{q} = \frac{1}{q}$$

e questo prova l'asserto per $f \in L_p(\lambda) \cap L_r(\lambda)$.
Sia quindi $f \in L_q(\lambda)$. Si ha allora

$$f = f 1_{\{|f|>1\}} + f 1_{\{|f|\le 1\}} = g + h$$

con ovvio significato dei simboli e risulta

$$\begin{aligned} |f|^q &\ge |f|^p \text{ in } \{|f| > 1\} &\implies& \quad g \in L_p(\lambda); \\ |f|^q &\ge |f|^r \text{ in } \{|f| \le 1\} &\implies& \quad h \in L_r(\lambda); \end{aligned}$$

da cui segue $L_q(\lambda) \subset L_p(\lambda) + L_r(\lambda)$. Per provare la disuguaglianza rimanente, consideriamo $f \in L_q(\lambda)$, supponiamo dapprima che sia $\|f\|_q = 1$ e definiamo g ed h come prima. Per la disuguaglianza di Chebychev (Teorema II–2.25) si ha allora

$$\lambda\big(\{|f| > 1\}\big) \le \int_{\{|f|>1\}} |f|^q \, d\lambda \le \|f\|_q^q = 1$$

e quindi, per la disuguaglianza di Hölder con esponenti coniugati q/p e $q/(q-p)$, per la funzione g risulta

$$\int_X |g|^p \, d\lambda = \int_{\{|f|>1\}} |f|^p \, d\lambda \le \big(\lambda\big(\{|f| > 1\}\big)\big)^{(q-p)/q} \left(\int_{\{|f|>1\}} |f|^q \, d\lambda \right)^{p/q} \le 1$$

da cui segue $\|g\|_p \leq 1$. Banalmente per h si ha

$$\int_X |h|^r \, d\lambda = \int_{\{|f|\leq 1\}} |f|^r \, d\lambda = \int_{\{|f|\leq 1\}} |f|^q |f|^{r-q} \, d\lambda \leq \int_{\{|f|\leq 1\}} |f|^q \, d\lambda \leq 1$$

da cui segue $\|h\|_r \leq 1$. Avendo così provato che risulta $\|g\|_p + \|h\|_r \leq 2$ per $f \in L_q(\lambda)$ con $\|f\|_q = 1$, il caso generale segue per omogeneità e questo completa la dimostrazione per $r < +\infty$.
Consideriamo infine il caso $r = +\infty$. Per $f \in L_p(\lambda) \cap L_\infty(\lambda)$ risulta

$$\int_X |f|^q \, d\lambda \leq \|f\|_\infty^{q-p} \, d\lambda \int_X |f|^p \, d\lambda$$

da cui segue $\|f\|_q \leq \|f\|_p^{p/q} \|f\|_\infty^{1-p/q}$ che è la disuguaglianza cercata poiché risulta $\lambda = p/q$.
Per $f \in L_q(\lambda)$, procediamo come nel caso $r < +\infty$ supponendo dapprima che sia $\|f\|_q = 1$ e definendo g e h come sopra. Con le stesse considerazioni del caso $r < +\infty$ risulta $\|g\|_p \leq 1$ mentre la disuguaglianza $\|h\|_\infty \leq 1$ vale per definizione. Risulta quindi $\|g\|_p + \|h\|_\infty \leq 2$ per $f \in L_q(\lambda)$ con $\|f\|_q = 1$ e il caso generale segue per omogeneità. □

Il quadro descritto nel risultato precedente si semplifica notevolemente nel caso di spazi $L_p(\lambda)$ con misura λ finita e lo stesso risultato vale per gli spazi $l_p(I)$ (Esercizio 2.15).

PROPOSIZIONE 2.23. *Sia* $\lambda(X) < +\infty$ *e siano* $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. *Allora,*

$$\|f\|_p \leq \big[\lambda(X)\big]^{1/p-1/q} \|f\|_q, \qquad f \in L_q(\lambda).$$

Se $q = +\infty$ si intende come al solito $1/q = 1/(+\infty) = 0$. Pertanto, quando λ è una misura positiva finita, vale l'inclusione $L_q(\lambda) \subset L_p(\lambda)$ per $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ e l'operatore lineare d'immersione $\mathrm{id} \in \mathcal{L}(L_q(\lambda), L_p(\lambda))$ risulta limitato con norma $\|\,\mathrm{id}\,\| = [\lambda(X)]^{1/p-1/q}$.

DIMOSTRAZIONE. Se è $q < +\infty$, dalla disuguaglianza di Hölder con esponenti coniugati $r = q/p$ e $s = (q-p)/q$ segue

$$\int_X |f|^p \, d\lambda \leq \big[\lambda(X)\big]^{1-p/q} \left(\int_X |f|^q \, d\lambda\right)^{p/q}$$

da cui si ricava la tesi passando alla radice $p-$esima di ambo i membri. Per $q = +\infty$ la conclusione segue da $(*)$. □

Concludiamo questa parte con la dimostrazione della completezza degli spazi L_p.

TEOREMA 2.24. *Gli spazi* $L_p(\lambda)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ *sono spazi di Banach sul campo* $\mathbb{K}$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $f_n \in L_p(\lambda)$ $(n \geq 1)$ gli elementi di una successione che verifica la condizione di Cauchy in $L_p(\lambda)$ e per ogni $n \geq 1$ denotiamo con $f_n \in \mathcal{L}_p(\lambda)$ un rappresentativo di f_n.
Consideriamo dapprima il caso $1 \leq p < +\infty$. Per la disuguaglianza di Chebychev (Teorema II–2.25) si ha

$$\lambda\big(\{|f_n - f_m| \geq \eta\}\big) \leq \frac{1}{\eta^p} \int_X |f_n - f_m|^p \, d\lambda, \qquad m, n \geq 1,$$

per ogni $\eta > 0$. La successione $\{f_n\}_n$ verifica quindi la condizione di Cauchy in misura su X cosicché esiste una funzione $\mathcal{S}-$misurabile $f\colon X \to \mathbb{K}$ tale che $f_n \to f$ in misura su X per $n \to +\infty$ per il teorema di Riesz (Teorema II–2.81) ed esiste allora una sottosuccessione $f_k = f_{n_k}$ $(k \geq 1)$ tale che $f_k \to f$ $\lambda-$quasi ovunque su

X per $k \to +\infty$ (Corollario II–2.74 e Proposizione II–2.64). Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ in modo che risulti

$$m, n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon$$

e scegliamo quindi $k_0 = k_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che sia $n_k \geq n_0$ per $k \geq k_0$ cosicché risulta

$$k \geq k_0, n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|f_n - f_{n_k}\|_p \leq \varepsilon.$$

Per il lemma di Fatou (Teorema II–2.22) per ogni $n \geq n_0$ risulta allora

$$\int_X |f_n - f|^p \, d\lambda \leq \liminf_{k \to +\infty} \int_X |f_n - f_k|^p \, d\lambda \leq \varepsilon^p$$

e quindi in particolare risulta $f \in \mathcal{L}_p(\lambda)$ e $\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$.
Abbiamo così provato che la successione $\{f_n\}_n$ che verifica la condizione di Cauchy in $L_p(\lambda)$ ha una sottosuccessione $\{f_k\}_k$ che converge a una funzione f in $L_p(\lambda)$ e questo implica che tutta la successione $\{f_n\}_n$ converge a f in $L_p(\lambda)$.
Consideriamo infine il caso $p = +\infty$. Per ogni n e per ogni coppia m e n siano $T_n \in \mathcal{S}$ e $T_{m,n} \in \mathcal{S}$ insiemi $\lambda-$trascurabili tali che risulti

$$\begin{aligned} &|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty && x \in X \setminus T_n; \\ &|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty && x \in X \setminus T_{m,n}. \end{aligned}$$

Allora, l'insieme

$$T = \left(\bigcup_n T_n \right) \cup \left(\bigcup_{m,n} T_{m,n} \right) \in \mathcal{S}$$

è $\lambda-$trascurabile e le funzioni $g_n \colon X \to \mathbb{K}$ definite da

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{se } x \in X \setminus T \\ 0 & \text{se } x \in T \end{cases} \qquad n \geq 1,$$

sono $\mathcal{S}-$misurabili (Proposizione II–2.11 – (b)) e limitate e la successione $\{g_n\}_n$ verifica la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme su X. Esiste allora una funzione limitata e $\mathcal{S}-$misurabile $g \colon X \to \mathbb{K}$ tale che $g_n \to g$ uniformemente su X per $n \to +\infty$. Allora, la classe di equivalenza di funzioni $f \in L(\lambda)$ corrispondente a g appartiene a $L_\infty(\lambda)$ e $f_n \to f$ in $L_\infty(\lambda)$ per $n \to +\infty$. □

La dimostrazione del teorema precedente contiene due risultati che meritano di essere evidenziati separatamente.

Teorema 2.25. *Sia $1 \leq p < +\infty$ e siano $f_n \in L_p(\lambda)$ $(n \geq 1)$ e $f \in L_p(\lambda)$ funzioni tali che $f_n \to f$ in $L_p(\lambda)$ per $n \to +\infty$. Allora,*

(a) *$f_n \to f$ in misura su X per $n \to +\infty$;*
(b) *esiste una sottosuccessione $f_k = f_{n_k}$ $(k \geq 1)$ tale che $f_k \to f$ λ – quasi ovunque in X per $k \to +\infty$.*

La convergenza in norma $L_p(\lambda)$ implica quindi la convergenza in misura per ogni valore di p (per $p = +\infty$ è ovvio!) ma la convergenza in misura e la convergenza in norma L_p nonsono in genere equivalenti né in genere si può evitare di passare ad una sottosuccessione in (b) come risulta dagli esempi seguenti.

Esempio 2.26. (a) Sia $1 \leq p < +\infty$ e siano $f_n \in L_p([0,1])$ $(n \geq 1)$ le funzioni definite da

$$f_n(t) = n^{1/p} 1_{[0,1/n]}(t), \qquad t \in [0,1] \quad (n \geq 1).$$

Allora, $f_n \to 0$ in misura per $n \to +\infty$ ma $\|f_n\|_p = 1$ per ogni n.
(b) Si può ripetere l'esempio degli intervalli mobili di $[0,1)$ (Esempio II–2.75) con la misura di Lebesgue. Le funzioni $\{f_k\}_k$ convergono a zero in norma $L_p([0,1))$ per

ogni $1 \leq p < +\infty$ ma la successione $\{f_k(t)\}_k$ non tende a zero per $k \to +\infty$ per alcun valore $0 \leq t < 1$. $\square$

Densità in L_p. Esaminiamo in questa parte alcuni risultati relativi alla densità delle funzioni semplici e, nel caso di misure di Radon su spazi topologici di Hausdorff localmente compatti, delle funzioni continue a supporto compatto negli spazi L_p $(1 \leq p < +\infty)$ con applicazione alla separabilità degli stessi.
Denotiamo in questa parte con $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva (non nulla) su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di un insieme astratto (non vuoto) X.

Teorema 2.27. *Lo spazio vettoriale*

$$\Sigma_p(\lambda) = \begin{cases} \big\{s \in L(\lambda) : \ s \text{ semplice con } \lambda(\{s \neq 0\}) < +\infty\big\} & \text{se } 1 \leq p < +\infty \\ \big\{s \in L(\lambda) : \ s \text{ semplice}\big\} & \text{se } p = +\infty \end{cases}$$

è denso in $L_p(\lambda)$ per $1 \leq p \leq +\infty$.

Dimostrazione. Sia dapprima $1 \leq p < +\infty$. Risulta evidentemente $\Sigma_p(\lambda) \subset L_p(\lambda)$ per ogni $1 \leq p < +\infty$. Sia $f \in L_p(\lambda)$ e siano $s_n \in L(\lambda)$ $(n \geq 1)$ funzioni semplici e $\mathcal{S}-$misurabili con le seguenti proprietà:

- $|s_n| \leq |f|$ $\lambda-$quasi ovunque per ogni n;
- $s_n \to f$ $\lambda-$quasi ovunque in X per $n \to +\infty$;

come in Corollario II–2.10. Risulta allora $s_n \in L_p(\lambda)$ per ogni n e quindi deve essere $s_n \in \Sigma_p(\lambda)$ per ogni n. Risulta inoltre

$$|s_n - f|^p \leq 2^{p-1}\left(|s_n|^p + |f|^p\right) \leq 2^p |f|^p$$

$\lambda-$quasi ovunque in X per ogni n e quindi $s_n \to f$ in $L_p(\lambda)$ per $n \to +\infty$ per il teorema di convergenza dominata.
Sia infine $p = +\infty$. Risulta allora $\Sigma_\infty(\lambda) \subset L_\infty(\lambda)$ e la conclusione segue facilmente da Teorema II–2.9. $\square$

Consideriamo quindi la densità in L_p delle funzioni continue a supporto compatto di uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto. Se X è uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ è una misura positiva di Radon in X, ogni funzione $\varphi \in C_{\mathrm{c}}(X)$ risulta $\lambda-$integrabile alla potenza p:

$$\int_X |\varphi|^p \, d\lambda < +\infty, \qquad \varphi \in C_{\mathrm{c}}(X).$$

Conseguentemente $C_{\mathrm{c}}(X)$ si identifica con un sottospazio di $L_p(\lambda)$ ed è facile verificare che tale sottospazio è linearmente isomorfo a $C_{\mathrm{c}}(X)$ se e solo se risulta $\lambda(V) > 0$ per ogni insieme aperto e non vuoto V di X ovvero se e solo se risulta $\operatorname{supp}(\lambda) = X$ (Esercizio II–3.7). Altrimenti funzioni continue a supporto compatto distinte possono dare luogo al medesimo elemento di $L_p(\lambda)$.

Teorema 2.28. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e sia $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva di Radon in X con* $\operatorname{supp}(\lambda) = X$. *Allora, $C_{\mathrm{c}}(X)$ è denso in $L_p(\lambda)$ per $1 \leq p < +\infty$.*

Dimostrazione. Con le notazioni di Teorema 2.27, fissato $\varepsilon > 0$, sia $s \in \Sigma_p(\lambda)$ una funzione tale che

$$\|s - f\|_p \leq \varepsilon/2.$$

Essendo $\lambda(\{s \neq 0\}) < +\infty$, per il teorema di Luzin (Teorema II–3.12) esiste $\varphi \in C_{\mathrm{c}}(X)$ tale che

- $|\varphi(x)| \leq \|s\|_\infty$ per ogni $x \in X$;

- $\lambda(\{\varphi \neq s\}) \leq \left(\dfrac{\varepsilon}{4\|s\|_\infty}\right)^p$.

Si ha allora
$$\int_X |\varphi - s|^p \, d\lambda \leq (2\|s\|_\infty)^p \lambda(\{\varphi \neq s\}) \leq (\varepsilon/2)^p$$
e da ciò segue
$$\|f - \varphi\|_p \leq \|f - s\|_p + \|s - \varphi\|_p \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$
e questo prova l'asserto. □

Corollario 2.29. *Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto (non vuoto). Allora, $C_c(U)$ è denso in $L_p(U)$ per $1 \leq p < +\infty$.*

Questo risultato non vale per $p = +\infty$ (Esercizio 2.18 – (b)).
Passiamo quindi a considerare il problema della separabilità degli spazi L_p

Teorema 2.30. *Sia $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva separabile. Allora, gli spazi di Banach $L_p(\lambda)$ sono separabili per $1 \leq p < +\infty$.*

A parte casi banali, questo risultato è falso per $p = +\infty$ (Esercizi 1.12 e 2.18 – (a)).

Dimostrazione. Sia $\mathcal{D}$ un insieme numerabile e denso dello spazio metrico $S(\lambda)$ (Sezione II–2.5) e sia
$$\mathcal{D}' = \left\{D \in \mathcal{D} :\ \lambda(D) < +\infty\right\}.$$
Proviamo che lo spazio vettoriale numerabile $\Sigma'(\lambda)$ formato dalle combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di elementi di $\mathcal{D}'$ con coefficienti in $\mathbb{Q}$ o in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ a seconda che sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ è denso in $L_p(\lambda)$.
A tal fine, in conseguenza e con le notazioni di Teorema 2.27, è sufficiente provare che è possibile approssimare in norma L_p ogni funzione semplice di $\Sigma_p(\lambda)$ mediante funzioni di $\Sigma'(\lambda)$. Sia quindi $s \in \Sigma_p(\lambda)$ una funzione della forma
$$s = \sum_{1 \leq h \leq k} \alpha_h 1_{E_h}$$
con $\alpha_h \in \mathbb{K}$ e con $E_h \in \mathcal{S}$ e $0 < \lambda(E_h) < +\infty$ $(h = 1, \ldots, k)$ e sia $\varepsilon > 0$ fissato. Scelto $A > |\alpha_h|$ per ogni h, esistono insiemi $D_h \in \mathcal{D}'$ e coefficienti $\alpha'_h \in \mathbb{Q}$ o in $\alpha'_h \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ a seconda che sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ tali che risulti

- $|\alpha'_h| \leq A$ e $|\alpha_h - \alpha'_h| \leq \dfrac{\varepsilon}{[2\lambda(E_h)]^{1/p}\, k}$;
- $\lambda(E_h \triangle D_h) \leq \dfrac{\varepsilon^p}{4k^p A^p}$;

per ogni h. Risulta allora $D_h \in \mathcal{D}'$ per ogni h e quindi la funzione
$$s' = \sum_{1 \leq h \leq k} \alpha'_h 1_{D_h}$$
appartiene a $\Sigma'(\lambda)$. Si ha
$$\|s - s'\|_p \leq \sum_h \|\alpha_h 1_{E_h} - \alpha'_h 1_{D_h}\|_p$$
e per ogni addendo risulta
$$\begin{aligned}\|\alpha_h 1_{E_h} - \alpha'_h 1_{D_h}\|_p^p = |\alpha_h - \alpha'_h|^p \lambda(E_h \cap D_h) + |\alpha_h|^p \lambda(E_h \setminus D_h) + |\alpha'_h|^p \lambda(D_h \setminus E_h) \leq \\ \leq \frac{\varepsilon^p}{2k\lambda(E_h)} \mu(E_h \cap D_h) + 2A^p \lambda(D_h \triangle E_h) \leq \\ \leq \frac{\varepsilon^p}{2k^p} + \frac{\varepsilon^p}{2k^p} = \frac{\varepsilon^p}{k^p}\end{aligned}$$

da cui segue $\|s - s'\|_p \leq \varepsilon$. Abbiamo così provato che $\Sigma'(\lambda)$ è denso in $L_p(\lambda)$ e questo completa la dimostrazione. $\square$

Il limite all'utilità del risultato precedente risiede nel fatto che l'unico criterio di cui disponiamo per la separabilità di una misura positiva consiste nel richiedere che essa sia finita oltre che definita su una $\sigma-$algebra generata da una famiglia numerabile di insiemi (Teorema II–4.29). Tuttavia, gli spazi L_p continuano ad essere separabili anche nel caso di una misura $\sigma-$finita definita su una $\sigma-$algebra generata da una famiglia numerabile di insiemi pur non essendo in tal caso la misura necessariamente separabile (Esempio II–4.30).

Corollario 2.31. *Siano*

- $\mathcal{C}$ *una famiglia numerabile di insiemi di* X*;*
- $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{C})$ *la* σ *–algebra generata da* $\mathcal{C}$*;*
- $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ *una misura positiva* σ *–finita su* $\mathcal{S}$*.*

Allora, gli spazi di Banach $L_p(\lambda)$ *sono separabili per* $1 \leq p < +\infty$*.*

Dimostrazione. Siano $X_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ insiemi tra loro disgiunti tali che risulti $\lambda(X_n) < +\infty$ per ogni n e $\bigcup_n X_n = X$. Data $f \in L_p(\lambda)$, sia $f_n = f1_{X_n}$ per ogni n cosicché risulta

$$\|f - (f_1 + \cdots + f_n)\|_p^p = \int_{X\setminus(X_1\cup\cdots\cup X_n)} |f|^p \, d\lambda \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Per ogni n, la restrizione $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}(X_n)$ della $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ a X_n è generata da $\mathcal{C} \cap X_n$ (Esercizio II–1.3) e la restrizione λ_n di λ a $\mathcal{S}_n$ è una misura finita e quindi separabile. Esiste allora un insieme numerabile $\mathcal{D}_n$ che è denso in $L_p(\lambda_n)$. Identificando gli elementi di ogni insieme $\mathcal{D}_n$ con le funzioni di $L_p(\lambda)$ che sono $\lambda-$quasi ovunque nulle fuori da X_n, ogni funzione f_n si approssima in $L_p(\lambda)$ mediante funzioni di $\mathcal{D}_n$ e quindi l'insieme

$$\mathcal{D} = \big\{d_1 + \cdots + d_n : \, d_m \in D_m \text{ per } m = 1, \ldots, n \text{ e } n \geq 1\big\}$$

risulta numerabile e denso in $L_p(\lambda)$. $\square$

Come caso particolare del teorema precedente ricaviamo la separabilità degli spazi L_p con la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$.

Corollario 2.32. *Sia* $E \subset \mathbb{R}^N$ *un insieme Lebesgue misurabile. Allora, gli spazi di Banach* $L_p(E)$ *sono separabili per* $1 \leq p < +\infty$*.*

Dimostrazione. Basta considerare il caso $E = \mathbb{R}^N$, applicare il corollario precedente alla restrizione agli insiemi di Borel della $\sigma-$algebra di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$ che è generata da una famiglia numerabile di aperti e osservare che gli spazi L_p rispetto alla misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$ e rispetto alla sua restrizione agli insiemi di Borel coincidono. $\square$

A conclusione di queste considerazioni sulla separabilità degli spazi L_p osserviamo che $L_\infty(\lambda)$ non è mai separabile non appena lo spazio metrico $\mathcal{S}(\lambda)$ (Teorema II–4.28) sia infinito.

Compattezza in L_p. Esaminiamo in questa parte quale forma assume la nozione di compattezza in L_p $(1 \leq p < +\infty)$ con particolare risguardo al caso della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$.

Consideriamo dapprima il caso generale di una misura positiva $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ (non nulla) su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di un insieme astratto (non vuoto) X e consideriamo la collezione di tutte le famiglie finite $\mathcal{E}$ di insiemi tali che

$(**)$ $\qquad \mathcal{E}$ famiglia finita di insiemi $E \in \mathcal{S}$ disgiunti con $0 < \lambda(E) < +\infty$

che ordiniamo per raffinamento:

$$\mathcal{E} \leq \mathcal{F} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, E \in \mathcal{E} \quad \exists\, F_1, \ldots, F_j \in \mathcal{F} \,:\, E = F_1 \cup \cdots \cup F_j.$$

L'insieme di tutte le famiglie $\mathcal{E}$ siffatte con l'ordinamento così definito è evidentemente un insieme filtrante.
Per ogni ogni collezione $\mathcal{E}$ di insiemi come in $(**)$ sia

$$(***) \qquad M_{\mathcal{E}} = \operatorname{span}\{1_E \,:\, E \in \mathcal{E}\}$$

il sottospazio di dimensione finita di $L_p(\lambda)$ generato dalle funzioni caratteristiche degli insiemi di $\mathcal{E}$ e per ogni funzione $f \in L_p(\lambda)$ $(1 \leq p < +\infty)$ sia $f_{\mathcal{E}} \in \Sigma(\lambda)$ la funzione semplice e $\mathcal{S}-$misurabile definita da

$$f_{\mathcal{E}} = \sum_{E \in \mathcal{E}} [f]_E 1_E$$

ove

$$[f]_E = \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f\, d\lambda, \qquad E \in \mathcal{E}, \quad 0 < \lambda(E) < +\infty,$$

denota la media di f sull'insieme E. Con queste notazioni vale allora il risultato seguente.

Lemma 2.33. *Sia $f \in L_p(\lambda)$ $(1 \leq p + \infty)$. Allora,*

(a) $\big|[f]_E\big|^p \leq [|f|^p]_E$ *per ogni $E \in \mathcal{S}$ con $0 < \lambda(E) < +\infty$;*
(b) $\|f_{\mathcal{E}}\|_p \leq \|f\|_p$ *per ogni $\mathcal{E}$ come in $(**)$;*
(c) $\lim\limits_{\mathcal{E}} f_{\mathcal{E}} = f$ *in $L_p(\lambda)$.*

Ragionando come in ... si può costruire poi una sottosuccessione cofinale (?) $\mathcal{E}_n$ $(n \geq 1)$ della successione generalizzata $\{f_{\mathcal{E}}\}_{\mathcal{E}}$ tale che $f_{\mathcal{E}_n} \to f$ in $L_p(\lambda)$ per $n \to +\infty$.

Dimostrazione. (a) Nel caso reale, è la disuguaglianza di Jensen per la funzione f e per la funzione convessa $t \in \mathbb{R} \mapsto |t|^p$ mentre nel caso complesso per la stessa disuguaglianza applicata a $|f|$ si ha

$$\big|[f]_E\big|^p \leq \big([|f|]_E\big)^p \leq [|f|^p]_E.$$

(b) Sgue facilmente da (a).
(c) Per fissare le idee consideriamo il caso di funzioni a valori complessi. Sia $f \in L_p(\lambda)$, $f = u + iv$ con u e v parte reale e parte immaginaria di f e sia $\varepsilon > 0$ fissato. Esiste allora un insieme $E \in \mathcal{S}$ con $0 < \lambda(E) < +\infty$ tale che risulti

- $|f(x)| \leq M$ per $\lambda-$q.o. $x \in E$;
- $\displaystyle\int_{X \setminus E} |f|^p\, d\lambda \leq \varepsilon^p / 2^{p+1}$;

per qualche $M > 0$ opportuno. Ragionando quindi come nella dimostrazione di Teorema II–2.9 sulla parte reale u e sulla parte immaginaria v di f, si determina una famiglia finita $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_k\}$ come in $(**)$ formata da insiemi E_h contenuti in E tali che

$$\max\{|u(x) - u(y)|, |v(x) - v(y)|\} \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{2^p - 1}{2^{p+1}\lambda(E)}\right)^{1/p}$$

per $\lambda-$q.o. $x, y \in E_h$ per ogni h da cui segue

$$\big|u(x) - [u]_{E_h}\big| \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{2^p - 1}{2^{p+1}\lambda(E)}\right)^{1/p} \quad \text{e} \quad \big|v(x) - [v]_{E_h}\big| \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{2^p - 1}{2^{p+1}\lambda(E)}\right)^{1/p}$$

per $\lambda-$q.o. $x \in E_h$. Da $[f]_{E_h} = [u]_{E_h} + i[v]_{E_h}$ segue

$$\left|f(x) - [f]_{E_h}\right| \leq \left|u(x) - [u]_{E_h}\right| + \left|v(x) - [v]_{E_h}\right| \leq \varepsilon \left(\frac{2^p - 1}{2^{p+1}\lambda(E)}\right)^{1/p}$$

per $\lambda-$q.o. $x \in E_h$ e integrando si trova

$$\int_X |f - f_{\mathcal{E}}|^p \, d\lambda = \int_E |f - f_{\mathcal{E}}|^p \, d\lambda + \int_{X\setminus E} |f|^p \, d\lambda \leq$$
$$\leq \sum_h \int_{E_h} \left|f - [f]_{E_h}\right|^p \, d\lambda + \frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}} \leq \varepsilon^p \frac{2^p - 1}{2^{p+1}} + \frac{\varepsilon^p}{2^{p+1}} \leq \varepsilon^p/2.$$

Consideriamo quindi una collezione di insiemi $\mathcal{E}'$ come in $(**)$ tale che $\mathcal{E}' \geq \mathcal{E}$. Si ha allora

$$\int_X |f - f_{\mathcal{E}'}|^p \, d\lambda = \int_E |f - f_{\mathcal{E}'}|^p \, d\lambda + \int_{X\setminus E} |f - f_{\mathcal{E}'}|^p \, d\lambda.$$

Per il primo addendo, da $f_{\mathcal{E}} = f_{\mathcal{E}'}$ su E si ricava che risulta

$$\int_E |f - f_{\mathcal{E}'}|^p \, d\lambda = \int_E |f - f_{\mathcal{E}}|^p \, d\lambda \leq \varepsilon^p/2$$

per quanto provato sopra mentre per il secondo addendo, ragionando come in (a), si ha

$$\int_{X\setminus E} |f - f_{\mathcal{E}'}|^p \, d\lambda \leq 2^{p-1} \left(\int_{X\setminus E} |f|^p \, d\lambda + \int_{X\setminus E} |f_{\mathcal{E}'}|^p \, d\lambda\right) \leq$$
$$\leq 2^p \int_{X\setminus E} |f|^p \, d\lambda \leq \varepsilon^p/2.$$

Abbiamo così provato che risulta $\|f - f_{\mathcal{E}'}\|_p \leq \varepsilon$ per ogni $\mathcal{E}'$ con $\mathcal{E}' \geq \mathcal{E}$ e questo prova la tesi. $\square$

Possiamo ora caratterizzare gli insiemi compatti di L_p in termini di uniformità dell'approssimazione fornita dal lemma precedente.

Teorema 2.34. *Sia $\mathcal{K} \subset L_p(\lambda)$ $(1 \leq p < +\infty)$ un insieme. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *$\mathcal{K}$ è chiuso e limitato in $L_p(\lambda)$ e si ha*

$$\lim_{\mathcal{E}} f_{\mathcal{E}} = f \qquad \text{in } L_p(\lambda)$$

uniformemente rispetto a $f \in \mathcal{K}$;

(b) *$\mathcal{K}$ è compatto in $L_p(\lambda)$.*

In maniera analoga si caratterizzano gli insiemi relativamente compatti di $L_p(\lambda)$.

Dimostrazione. (a) Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\mathcal{E}$ una famiglia di insiemi come in $(**)$ tale che risulti

$$\|f - f_{\mathcal{E}}\|_p \leq \varepsilon, \qquad f \in \mathcal{K},$$

e sia $M_\varepsilon = M_{\mathcal{E}}$ il sottospazio di $L_p(\lambda)$ di dimensione finita ad essa associato da $(***)$. Poiché $f_{\mathcal{E}} \in M_\varepsilon$, risulta allora

$$d_{L_p}(f\,, M_\varepsilon) \leq \varepsilon, \qquad f \in \mathcal{K}.$$

e quindi, essendo $\mathcal{K}$ chiuso e limitato, la conclusione segue dalla caratterizzazione degli insiemi compatti negli spazi di Banach (Teorema 1.26).

(b) Occorre solo provare che $f_{\mathcal{E}} \to f$ in $L_p(\lambda)$ uniformemente rispetto a $f \in \mathcal{K}$. Fissato $\varepsilon > 0$, siano $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{K}$ funzioni tali che

$$\mathcal{K} \subset B_{\varepsilon/3}(f_1) \cup \cdots \cup B_{\varepsilon/3}(f_n)$$

e sia $\mathcal{E}_0$ una famiglia di insiemi come in $(**)$ tale che risulti $\|f_m - (f_m)_{\mathcal{E}}\|_p \leq \varepsilon/3$ per ogni collezione di insiemi $\mathcal{E}$ come in $(**)$ con $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_0$ e per ogni $m = 1, \ldots, n$ (Lemma 2.33 – (c)). Data $f \in \mathcal{K}$, sia m tale che risulti $\|f - f_m\|_p < \varepsilon/3$. Si ha allora

$$\begin{aligned}\|f - f_{\mathcal{E}}\|_p &\leq \|f - f_m\|_p + \|f_m - (f_m)_{\mathcal{E}}\|_p + \|(f_m)_{\mathcal{E}} - f_{\mathcal{E}}\|_p \leq \\ &\leq 2\|f - f_m\|_p + \|f_m - (f_m)_{\mathcal{E}}\|_p \leq 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\end{aligned}$$

per $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_0$ e questo completa la dimostrazione. □

Il criterio di compattezza fornito dal teorema precedente è estremamente generale ma risulta essere in realtà di scarsa utilità in ragione della evidente difficoltà di calcolare il limite che compare nell'ipotesi (a) in casi concreti. Tuttavia, nel caso particolare di $L_p(\mathbb{R}^N)$ così come nel caso già esaminato di ℓ_p (Esercizio 1.13), la condizione di uniforme approssimabilità del teorema precedente può essere sostituita da condizioni di più agevole formulazione.
Data una funzione $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p < +\infty)$, per ogni $y \in \mathbb{R}^N$ sia

$$\tau_y f(x) = f(x+y), \qquad \text{per Lebesgue q.o. } x \in \mathbb{R}^N \quad (y \in \mathbb{R}^N)$$

la y – *traslazione di* f o brevemente *traslazione di* f (Esercizio II–5.24) le cui proprietà riassumiamo nel risultato seguente.

Proposizione 2.35. *Sia $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p < +\infty)$ una funzione. Allora,*

(a) *risulta $\tau_y f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ con $\|\tau_y f\|_p = \|f\|_p$ per ogni $y \in \mathbb{R}^N$;*
(b) *la funzione $y \in \mathbb{R}^N \mapsto \tau_y f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ è uniformemente continua.*

Inoltre, per ogni $y \in \mathbb{R}^N$ la traslazione τ_y come funzione da $L_p(\mathbb{R}^N)$ in sè è un isomorfismo isometrico di $L_p(\mathbb{R}^N)$ su se stesso.

Dimostrazione. (a) Per $y \in \mathbb{R}^N$ fissato, la traslazione $\tau_y f$ è ben definita come classe di equivalenza di funzioni Lebesgue misurabili in $\mathbb{R}^N$ che sono Lebesgue quasi ovunque uguali (Esercizio II–5.24) e risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tau_y f(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p \, dx$$

per l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue.
(b) Per $\varepsilon > 0$ fissato, sia $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon/3$ (Corollario 2.29) e sia $K \subset \mathbb{R}^N$ un insieme compatto tale che risulti $\operatorname{supp}(\varphi) + B_1[0] \subset K$. Essendo φ uniformemente continua in $\mathbb{R}^N$, esiste $\delta = \delta(\varepsilon)$ con $0 < \delta \leq 1$ tale che risulti

$$y \in \mathbb{R}^N \text{ e } \|y\| \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\varphi(x) - \varphi(x+y)| \leq \frac{\varepsilon}{3|K|^{1/p}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$$

cosicché per ogni coppia di punti $y_i \in \mathbb{R}^N$ $(i = 1, 2)$ con $\|y_1 - y_2\| \leq \delta$ si ha

$$\begin{aligned}\|\tau_{y_2}\varphi - \tau_{y_1}\varphi\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x+y_2) - \varphi(x+y_1)|^p \, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x) - \varphi(x + (y_1 - y_2))|^p \, dx \leq (\varepsilon/3)^p\end{aligned}$$

poiché risulta $x + (y_1 - y_2) \in \operatorname{supp}(\varphi) + B_1[0] \subset K$ per ogni $x \in \operatorname{supp}(\varphi)$. Si ha infine per gli stessi y_i

$$\begin{aligned}\|\tau_{y_2} f - \tau_{y_1} f\|_p &\leq \|\tau_{y_2} f - \tau_{y_2}\varphi\|_p + \|\tau_{y_2}\varphi - \tau_{y_1}\varphi\|_p + \|\tau_{y_1}\varphi - \tau_{y_1} f\|_p \leq \\ &\leq 2\|f - \varphi\|_p + \|\tau_{y_2}\varphi - \tau_{y_1}\varphi\|_p \leq 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\end{aligned}$$

e quasto completa la dimostrazione. □

Possiamo ora riformulare il criterio di compattezza del Teorema 2.34 nel seguente *teorema di Kolmogorov–Riesz.*

TEOREMA 2.36 (A. Kolmogorov–M. Riesz). *Sia* $\mathcal{K} \subset L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p < +\infty)$ *un insieme. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) $\mathcal{K}$ *è chiuso e limitato in* $L_p(\mathbb{R}^N)$ *e, posto* $B_R = B_R[0]$ *per* $R > 0$*, si ha*

- $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{B_R^c} |f(x)|^p \, dx = 0 \qquad \forall\, R > 0;$
- $\displaystyle\lim_{y\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p \, dx = 0;$

uniformemente rispetto a $f \in \mathcal{K}$*;*

(b) $\mathcal{K}$ *è compatto in* $L_p(\mathbb{R}^N)$*.*

La seconda condizione in (a) equivale a richiedere che l'insieme di funzioni

$$\big\{y \in \mathbb{R}^N \mapsto \tau_y f \, : \, f \in \mathcal{K}\big\}$$

sia uniformemente equicontinuo da $\mathbb{R}^N$ in $L_p(\mathbb{R}^N)$.
Anche in questo caso con le ovvie modifiche si ottiene la caratterizzazione degli insiemi relativamente compatti di $L_p(\mathbb{R}^N)$.

DIMOSTRAZIONE. Utilizziamo le notazioni di Capitolo II–5 e in particolare denotiamo la misura di Lebesgue di un insieme Lebesgue misurabile E con $|E|$.
(a) Fissato $\varepsilon > 0$, siano $R = R(\varepsilon) > 0$ e $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tali che per ogni $y \in \mathbb{R}^N$ con $\|y\| \leq \delta$ risulti

$$\int_{B_R^c} |f(x)|^p \, dx \leq \frac{\varepsilon^p}{2} \qquad \text{e} \qquad \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p \, dx \leq \frac{\varepsilon^p}{2^{N+1}}$$

per ogni funzione $f \in \mathcal{K}$. Fissato $0 < l \leq \delta/2\sqrt{N}$, ricopriamo la palla B_R con cubi semiaperti e disgiunti $Q_m = Q[x_m]$ ($x_m \in \mathbb{R}^N$ per $m = 1, \ldots, n$) di semilato l. Poniamo $\mathcal{Q} = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$ e denotiamo con $M_\varepsilon = M_{\mathcal{Q}}$ il sottospazio di $L_p(\lambda)$ di dimensione finita ad essa associato da $(***)$ e con

$$f_{\mathcal{Q}}(x) = \sum_{1\leq m\leq n} [f]_{Q_m} 1_{Q_m}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

la proiezione di $f \in L_p(\lambda)$ su M_ε. Posto $\square = Q_1 \cup \cdots \cup Q_n$, per ogni funzione $f \in \mathcal{K}$ risulta allora

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |f - f_{\mathcal{Q}}|^p &= \int_{\square} |f - f_{\mathcal{Q}}|^p + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\square} |f|^p \leq \\ &\leq \sum_m \int_{Q_m} \left| \frac{1}{|Q_m|} \int_{Q_m} [f(x) - f(z)] \, dz \right|^p dx + \frac{\varepsilon^p}{2} \leq \\ &\leq \sum_m \frac{1}{|Q_m|} \int_{Q_m} \left(\int_{Q_m} |f(x) - f(z)|^p \, dz \right) dx + \frac{\varepsilon^p}{2}\end{aligned}$$

per la disuguaglianza di Jensen. Per q. o. $x \in Q_m$ operiamo il cambio di variabili definito dalla traslazione $y \in Q_m - x \mapsto z = x + y \in Q_m$ e denotiamo per brevità con $Q = Q_l[0]$ e $2Q = Q_{2l}[0]$ i cubi compatti con centro nell'origine di semilato l e $2l$ rispettivamente. Si ha allora

$$\begin{aligned}\int_{Q_m} |f(x) - f(z)|^p \, dz &= \int_{Q_m - x} |f(x+y) - f(x)|^p \, dy \leq \\ &\leq \int_{2Q} |f(x+y) - f(x)|^p \, dy\end{aligned}$$

per q. o. $x \in Q_m$ poiché risulta $Q_m - x \subset 2Q$ per ogni $x \in Q_m$. La funzione

$$(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto f(x+y) - f(x)$$

è ben definita a meno di insiemi Lebesgue trascurabili in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ ed è Lebesgue misurabile in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ (Esercizio II–5.25) cosicché, essendo $\|y\| \le \delta$ per ogni $y \in 2Q$ per la scelta di l, per il teorema di Fubini–Tonelli (Teorema II–5.40) risulta

$$\sum_m \frac{1}{|Q_m|} \int_{Q_m} \left(\int_{2Q} |f(x+y) - f(x)|^p \, dy \right) dx =$$

$$= \frac{1}{|Q|} \int_{2Q} \left(\sum_m \int_{Q_m} |f(x+y) - f(x)|^p \, dx \right) dy \le$$

$$\le \frac{1}{|Q|} \int_{2Q} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p \, dx \right) dy \le \frac{|2Q|}{|Q|} \frac{\varepsilon^p}{2^{N+1}} = \frac{\varepsilon^p}{2}$$

poiché si ha $|2Q|/|Q| = 2^N$. Abbiamo così provato che risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f - f_{\mathcal{Q}}|^p \le \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p$$

da cui segue

$$d_{L_p}(f\,, M_\varepsilon) \le \varepsilon, \qquad f \in \mathcal{K},$$

e quindi, essendo $\mathcal{K}$ chiuso e limitato in $L_p(\lambda)$, esso è anche compatto (Teorema 1.26).

(b) Se $\mathcal{K}$ è compatto, esso è chiuso e limitato e, fissato $\varepsilon > 0$, esistono funzioni $f_m \in \mathcal{K}$ ($m = 1, \dots, n$) tali che per ogni $f \in \mathcal{K}$ risulti

$$\min_{1 \le m \le n} \|f - f_m\|_p \le \varepsilon/2$$

(Teorema 3.16). Sia quindi $R = R(\varepsilon) > 0$ tale che risulti

$$\int_{B_R^c} |f_m|^p \le (\varepsilon/2)^p, \qquad m = 1, , \dots, n$$

cosicché risulta

$$\int_{B_R^c} |f|^p \le 2^{p-1} \left(\int_{B_R^c} |f - f_m|^p + \int_{B_R^c} |f_m|^p \right) \le 2^{p-1} \left(\frac{\varepsilon^p}{2^p} + \frac{\varepsilon^p}{2^p} \right) = \varepsilon^p$$

per ogni funzione $f \in \mathcal{K}$. Infine, utilizzando Proposizione 2.35 si prova in maniera del tutto analoga che $\tau_y f \to f$ in $L_p(\mathbb{R}^N)$ per $y \to 0$ uniformemente rispetto a $f \in \mathcal{K}$. $\square$

Nel caso di un insieme aperto Ω diverso da $\mathbb{R}^N$, il teorema di Kolmogorov–Riesz assume la forma seguente.

Teorema 2.37. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e sia $\mathcal{K} \subset L_p(\Omega)$ $(1 \le p < +\infty)$ un insieme. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *$\mathcal{K}$ è chiuso e limitato in $L_p(\Omega)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ ha le seguenti proprietà:*

- *$\exists\ H \subset \Omega$ compatto $\int_{\Omega \setminus H} |f|^p \le \varepsilon$ per ogni $f \in \mathcal{K}$;*
- *per ogni $K \subset \Omega$ compatto esiste $0 < \delta < d(K\,, \Omega^c)$ tale che*

$$\|y\| \le \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_K |f(x+y) - f(x)|^p \, dx \le \varepsilon \qquad \forall\, f \in \mathcal{K}.$$

(b) *$\mathcal{K}$ è compatto in $L_p(\Omega)$.*

Dimostrazione. Proviamo solo che (a) implica (b) e utilizziamo la norma $\|\cdot\|_\infty$ di $\mathbb{R}^N$ e la associata distanza d_∞ tra vettori e insiemi e tra insiemi.

Fissato $\varepsilon > 0$, sia $H \subset \Omega$ un insieme compatto tale che

$$\int_{\Omega \setminus H} |f|^p \le \lambda \varepsilon^p, \qquad f \in \mathcal{K},$$

con $\lambda > 0$ da specificare. Sia $0 < d < d_\infty(H, \Omega^c)/3$ e sia K l'insieme compatto definito da

$$K = H + Q_d[0] = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \, d_\infty(x, H) \leq d\right\}.$$

Sia quindi $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ con $0 < \delta < d$ tale che risulti

$$\|y\| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_K |f(x+y) - f(x)|^p \, dx \leq \lambda^p \varepsilon \qquad \forall \, f \in \mathcal{K},$$

con $\lambda > 0$ da specificare. Scegliamo quindi $0 < l \leq \delta/2$ e ricopriamo K con cubi semiaperti e disgiunti $Q_m = Q[x_m)$ di semilato l ($x_m \in \Omega$ per $m = 1, \ldots, n$) in modo che si abbia $K \cap Q_m \neq \varnothing$ per ogni m e $K \subset Q_1 \cup \cdots \cup Q_n = \square$. Verifichiamo che risulta

- $d_\infty(\square, \Omega^c) > d$;
- $x \in \square \setminus K$ e $\|y\|_\infty \leq 2l \quad \Longrightarrow \quad x + y \in \Omega \setminus H$.

Per la prima disuguaglianza, per $x \in \square$ si ha $x \in Q_m$ per m opportuno e quindi esiste $z' \in K \cap Q_m$ della forma $z' = z'' + u$ con $z'' \in H$ e $\|u\|_\infty \leq d$ cosicché risulta da cui segue

$$\begin{aligned} d_\infty(x, \Omega^c) &\geq d_\infty(H, \Omega^c) - d_\infty(H, z') - d_\infty(z', x) > \\ &> 3d - \|u\|_\infty - 2l \geq 2d - 2l > 2d - \delta > d. \end{aligned}$$

Per l'altra implicazione, per ogni $x \in \square \setminus K$ risulta $d_\infty(x, H) > d$ altrimenti sarebbe $x \in K$ per la definizione di K e, se fosse $x + y \in H$, si avrebbe

$$2l \geq \|y\|_\infty = \|(x+y) - x\|_\infty \geq d_\infty(x, H) > d$$

e questo è assurdo poiché è $2l < \delta < d$. Inoltre, per $x \in \square$ si ha $d_\infty(\square, \Omega^c) > d$ per la prima disuguaglianza e quindi, se fosse $x + y \notin \Omega$, si avrebbe come prima

$$2l \geq \|y\|_\infty = \|(x+y) - x\|_\infty \geq d_\infty(x, H) > d$$

e questo completa la dimostrazione della seconda implicazione.
Procediamo ora come nella dimostrazione del caso in cui Ω è tutto $\mathbb{R}^N$: poniamo $\mathcal{Q} = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$ e denotiamo con $M_\varepsilon = M_\mathcal{Q}$ il sottospazio di $L_p(\Omega)$ di dimensione finita ad essa associato da $(*{*}*)$ e con $f_\mathcal{Q}$ la proiezione di $f \in L_p(\Omega)$ su M_ε. Con le stesse notazioni e gli stessi calcoli risulta

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f - f_\mathcal{Q}|^p \, dx &\leq \int_\square |f - f_\mathcal{Q}|^p \, dx + \lambda \varepsilon^p \leq \\ &\leq \frac{1}{|Q|} \int_{2Q} \left(\int_\square |f(x+y) - f(x)|^p \, dx \right) dy + \lambda \varepsilon^p \end{aligned}$$

e per ogni $y \in 2Q$ si ha

$$\begin{aligned} &\int_\square |f(x+y) - f(x)|^p \, dx \leq \\ &\qquad \leq \int_K |f(x+y) - f(x)|^p \, dx + \\ &\qquad\qquad + 2^{p-1} \left(\int_{\square \setminus K} |f(x+y)|^p \, dx + \int_{\square \setminus K} |f(x)|^p \, dx \right). \end{aligned}$$

Il primo integrale a destra è maggiorato da $\lambda \varepsilon^p$ poiché per ogni $y \in 2Q$ si ha $\|y\|_\infty \leq 2l < \delta$ e lo stesso vale per i restanti due integrali poiché per $\square \setminus K \subset \Omega \setminus H$ e per (ii) si ha

$$\int_{\square \setminus K} |f(x+y)|^p \, dx \leq \int_{\Omega \setminus H} |f(x)|^p \, dx \leq \lambda \varepsilon^p.$$

Si ha pertanto
$$\int_\Omega |f - f_{\mathcal{Q}}|^p \, dx \le \Big[2^n \left(2^p + 1\right) + 1 \Big] \lambda \varepsilon^p$$
per ogni $f \in \mathcal{K}$ da cui segue $d_{L_p}(f\,, M_\varepsilon) \le \varepsilon$ per ogni $f \in \mathcal{K}$ per $\lambda > 0$ opportuno e questo completa la dimostrazione. □

Duale di L_p. Sia $\lambda \colon X \to [0, +\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di un insieme astratto (non vuoto) X e siano $1 \le p\,, q \le +\infty$ esponenti coniugati. Per la disuguaglianza di Hölder (Proposizione 2.20), ogni funzione $g \in L_q(\lambda)$ definisce tramite la formula

$$(****) \qquad L_g f = \int_X f g \, d\lambda, \qquad f \in L_p(\lambda),$$

un funzionale lineare limitato su $L_p(\lambda)$ avente norma $\|L_g\| \le \|g\|_q$. Sotto la condizione che per $q = +\infty$ la misura positiva λ sia semifinita, la disuguaglianza precedente risulta essere in effetti un'uguaglianza.

Proposizione 2.38. *Siano $1 \le p\,, q \le +\infty$ esponenti coniugati tali che valga una delle seguenti ipotesi:*

- $1 < p \le +\infty$ *e* $1 \le q < +\infty$*;*
- $p = 1$ *e* $q = +\infty$ *con λ misura positiva semifinita;*

e siano $g \in L_q(\lambda)$ e $L_g \in [L_p(\lambda)]^*$ il funzionale lineare limitato su $L_p(\lambda)$ definito da $(****)$*. Allora,*
$$\|L_g\| = \|g\|_q.$$
Se $g \in L_\infty(\lambda)$ e λ non è semifinita può essere $\|L_g\| < \|g\|_\infty$ (Esercizio 2.20).

Dimostrazione. Consideriamo per fissare le idee il caso di funzioni complesse e supponiamo $g \ne 0$ altrimenti la conclusione è ovvia.
Sia dapprima $q = 1$ e conseguentemente sia $p = +\infty$. La funzione $f = \operatorname{sgn}(g)$ è $\mathcal{S}-$misurabile e appartiene a $L_\infty(\lambda)$ con $\|f\|_\infty = 1$. Si ha allora
$$\int_X |g| \, d\lambda = \int_X f g \, d\lambda = L_g f = |L_g f| \le \|L_g\|$$
e questo prova l'asserto nel caso considerato.
Sia quindi $1 < q < +\infty$ e conseguentemente sia $1 < p < +\infty$. La funzione
$$f = |g|^{q-1} \operatorname{sgn}(g)$$
è $\mathcal{S}-$misurabile e appartiene a $L_p(\lambda)$ poiché da $p(q-1) = q$ segue
$$|f|^p = |g|^{p(q-1)} = |g|^q.$$
Risulta allora
$$\int_X |g|^q \, d\lambda = \int_X f g \, d\lambda = L_g f = |L_g f| \le \|L_g\| \|f\|_p = \|L_g\| \left(\int_X |g|^q \, d\lambda \right)^{1/p}$$
e da $1 - 1/p = 1/q$ segue $\|g\|_q \le \|L_g\|$.
Siano infine $q = +\infty$ e $p = 1$ e consideriamo l'insieme $\{|g| > \|L_g\|\}$. Essendo in questo caso λ semifinita per ipotesi, se fosse
$$\lambda(\{|g| > \|L_g\|\}) > 0,$$
l'insieme $\{|g| > \|L_g\|\}$ conterrebbe un insieme $\mathcal{S}-$misurabile E con $0 < \lambda(E) < +\infty$ e la funzione
$$f = \frac{\operatorname{sgn}(g)}{\lambda(E)} 1_E,$$

sarebbe $\mathcal{S}-$misurabile e apparterrebbe a $L_1(\lambda)$ con $\|f\|_1 = 1$ poiché si avrebbe $g \neq 0$ $\lambda-$quasi ovunque in E. Si avrebbe allora

$$\|L_g\| = \|L_g\|\|f\|_1 \geq |L_g f| = \left|\int_X f g \, d\lambda\right| = \frac{1}{\lambda(E)} \int_E |g| \, d\lambda > \|L_g\|$$

e ciò è assurdo. Risulta quindi $|g| \leq \|L_g\|$ $\lambda-$quasi ovunque in X e questo completa la dimostrazione. □

Ogni funzione $g \in L_q(\lambda)$ definisce quindi un funzionale lineare limitato su $L_p(\lambda)$ ed è naturale chiedersi se tutti gli elementi del duale di $L_p(\lambda)$ siano di tale forma. La risposta a queste domande è fornita dal *teorema di rappresentazione di Riesz*. Per $1 < p < +\infty$ la risposta è affermativa e lo stesso vale anche per $p = 1$ pur di evitare misure λ patologiche. Per $p = +\infty$, la risposta è invece negativa: ci sono funzionali lineari limitati su $L_\infty(\lambda)$ che non sono rappresentabili mediante funzioni $\lambda-$integrabili e, come vedremo, il duale di $L_\infty(\lambda)$ risulta essere in genere molto più grande di $L_1(\lambda)$.

Teorema 2.39 (F. Riesz). *Siano $1 \leq p < +\infty$ e $1 < q \leq +\infty$ esponenti coniugati con λ misura σ–finita se $p = 1$ e sia $L \in [L_p(\lambda)]^*$ un funzionale lineare limitato su $L_p(\lambda)$. Allora,*

(a) *esiste una ed una sola funzione $g \in L_q(\lambda)$ tale che*

$$Lf = \int_X f \, d\lambda, \qquad f \in L_p(\lambda);$$

(b) $\|L\| = \|g\|_q$.

Nel caso particolare della misura del conteggio su un insieme I qualunque, i funzionali lineari limitati su $\ell_1(I)$ si identificano mediante integrazione con elementi di $\ell_\infty(I)$ anche se I non è numerabile e la relativa misura del conteggio non è dunque $\sigma-$finita (Esercizio 2.21).

Dimostrazione. Se $g \in L_q(\lambda)$ rappresenta il funzionale lineare L mediante integrazione come in (a), l'uguaglianza in (b) è conseguenza di Proposizione 2.38 e da essa segue l'unicità di g.
Proviamo quindi l'esistenza della funzione g dividendo la dimostrazione nei tre casi seguenti.
Caso 1: $\lambda(X) < +\infty$.
Proviamo che la funzione $\mu \colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ definita da

$$\mu(E) = L(1_E), \qquad E \in \mathcal{S},$$

è una misura reale o complessa su $\mathcal{S}$. Per $E, F \in \mathcal{S}$ con $E \cap F = \varnothing$ risulta

$$\mu(E \cup F) = L(1_{E \cup F}) = L(1_E + 1_F) = L(1_E) + L(1_F) = \mu(E) + \mu(F)$$

e quindi μ è finitamente additiva su $\mathcal{S}$. Per una famiglia numerabile di insiemi $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ disgiunti, posto $E = \bigcup_n E_n$, si ha

$$\left|\mu(E) - \sum_{1 \leq m \leq n} \mu(E_m)\right| = \left|\mu\left(\bigcup_{m \geq n+1} E_m\right)\right| \leq \|L\| \left[\lambda\left(\bigcup_{m \geq n+1} E_m\right)\right]^{1/p} \to 0$$

per $n \to +\infty$ poiché $1 \leq p < +\infty$ e $\lambda(X) < +\infty$ e quindi μ risulta essere una misura reale o complessa su $\mathcal{S}$. Inoltre, evidentemente risulta anche $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$. Per il teorema di Radon–Nikodym (Teorema II–4.21) esiste allora una funzione $g \colon X \to \mathbb{K}$ $\lambda-$integrabile tale che sia

$$L(1_E) = \mu(E) = \int_E g \, d\lambda, \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Sia ora $s\colon X \to \mathbb{K}$ la funzione semplice e $\mathcal{S}-$misurabile definita da

$$s = \alpha_1 1_{E_1} + \cdots \alpha_k 1_{E_k}$$

con $E_h \in \mathcal{S}$ insiemi disgiunti e coefficienti $\alpha_h \in \mathbb{K}$ $(h = 1, \ldots, k)$. Per linearità si ha allora

$$Ls = \sum_{1 \le h \le k} \alpha_h L(1_{E_h}) = \int_X sg\, d\lambda$$

e la stessa uguaglianza si estende alle funzioni di $L_\infty(\lambda)$. Se $f \in L_\infty(\lambda)$, esiste infatti una successione di funzioni semplici e $\mathcal{S}-$misurabili $s_k\colon X \to \mathbb{K}$ $(k \ge 1)$ tali che $s_k \to f$ in $L_\infty(\lambda)$ per $k \to +\infty$ (Teorema II–2.9). Quindi, $s_k \to f$ in $L_p(\lambda)$ per $k \to +\infty$ poiché $\lambda(X) < +\infty$ e da ciò segue

$$Lf = \lim_{k \to +\infty} Ls_k = \lim_{k \to +\infty} \int_X s_k g\, d\lambda = \int_X fg\, d\lambda$$

per il teorema di convergenza dominata. Essendo $\lambda(X) < +\infty$ per ipotesi, $L_\infty(\lambda)$ è denso in $L_p(\lambda)$ per ogni $1 \le p < +\infty$ e quindi resta solo da provare che risulta $g \in L_q(\lambda)$ mostrando che si ha

$$\int_X |g|^q\, d\lambda \le \|L\|^q$$

e ciò si può fare ripetendo con poche modifiche le considerazioni di Proposizione 2.38. Sia dapprima $p = 1$. Se fosse $\lambda\left(\{|g| > \|L\|\}\right) > 0$, posto $E = \{|g| > \|L\|\} \in \mathcal{S}$ e

$$f = \frac{\operatorname{sgn}(g)}{\lambda(E)} 1_E,$$

si avrebbe $f \in L_\infty(\lambda)$ e risulterebbe anche $f \in L_1(\lambda)$ in conseguenza di $\lambda(X) < +\infty$ e $\|f\|_1 = 1$ in conseguenza di $|g| > \|L\|$ su E e si avrebbe quindi

$$\|L\| = \|L\|\|f\|_1 \ge |Lf| = \left|\int_X fg\, d\lambda\right| = \frac{1}{\lambda(E)} \int_E |g|\, d\lambda > \|L\|$$

che è assurdo. Risulta allora $|g(x)| \le \|L\|$ per $\lambda-$q.o. $x \in X$ da cui segue $g \in L_\infty(\lambda)$. Consideriamo quindi il caso $1 < p < +\infty$ (che implica $1 < q < +\infty$) e poniamo

$$E_n = \{|g| \le n\} \in \mathcal{S} \qquad \text{e} \qquad f_n = |g|^{q-1} \operatorname{sgn}(g) 1_{E_n}$$

per ogni n. Risulta allora $f_n \in L_\infty(\lambda)$ e $|f_n|^p = |g|^q 1_{E_n}$ poiché $p(q-1) = q$. Si ha quindi

$$\int_{E_n} |g|^q\, d\lambda = \int_X f_n g\, d\lambda = Lf_n \le \|L\|\|f_n\|_p = \|L\| \left(\int_{E_n} |g|^q\, d\lambda\right)^{1/p}$$

da cui segue

$$\int_{E_n} |g|^q\, d\lambda \le \|L\|^q$$

per ogni n. Passando al limite per $n \to +\infty$ si conclude che risulta $g \in L_q(\lambda)$ e questo completa la dimostrazione nel caso $\lambda(X) < +\infty$.

Caso 2: $\lambda(X) = +\infty$ con λ misura $\sigma-$finita.

Sia $w\colon X \to [0, +\infty)$ una funzione $\lambda-$integrabile in X con

$$w(x) > 0 \quad \forall\, x \in X \qquad \text{e} \qquad \int_X w\, d\lambda < +\infty$$

(Teorema II–2.27) e sia

$$\lambda'(E) = \int_E w\, d\lambda, \qquad E \in \mathcal{S},$$

l'integrale indefinito di w rispetto a λ. Essendo $w(x) > 0$ per ogni $x \in X$, risulta $\mathcal{N}(\lambda') = \mathcal{N}(\lambda)$ e da ciò segue $L(\lambda') = L(\lambda)$. Per il medesimo motivo risulta anche

$L_\infty(\lambda') = L_\infty(\lambda)$ e $\|f\|_{\infty,\lambda'} = \|f\|_{\infty,\lambda}$ per ogni $f \in L_\infty(\lambda') = L_\infty(\lambda)$ con ovvio significato dei simboli.
Per $1 \le p < +\infty$ si ha

$$\int_X |f|^p \, d\lambda' = \int_X |f|^p w \, d\lambda, \qquad f \in L(\lambda) = L(\lambda'),$$

e quindi la funzione

$$f \in L_p(\lambda') \mapsto w^{1/p} f \in L_p(\lambda)$$

risulta essere un isomorfismo isometrico di $L_p(\lambda')$ su $L_p(\lambda)$. Conseguentemente la funzione

$$L'f = L(w^{1/p} f), \qquad f \in L_p(\lambda'),$$

risulta essere a sua volta un elemento di $L' \in [L_p(\lambda')]^*$ con norma $\|L'\| = \|L\|$.
Essendo $\lambda'(X) < +\infty$, per quanto provato nella prima parte esiste allora una funzione $g' \in L_q(\lambda')$ tale che

$$L'f = \int_X f g' \, d\lambda' \quad \forall\, f \in L_p(\lambda') \qquad \text{e} \qquad \|L'\| = \|g'\|_{q,\lambda'}.$$

Consideriamo allora la funzione $g \in L(\lambda)$ definita da $g = g'$ se $p = 1$ e $q = +\infty$ e da $g = w^{1/q} g'$ se $1 < p, q < +\infty$. Nel primo caso si ha $g \in L_\infty(\lambda)$ e $\|g\|_{\infty,\lambda} = \|g'\|_{\infty,\lambda'}$ e nell'altro caso si ha

$$\int_X |g|^q \, d\lambda = \int_X |g'|^q w \, d\lambda = \int_X |g'| \, d\lambda'$$

da cui segue $\|g\|_{\infty,\lambda} = \|L\|$. Infine, per $p = 1$ e $q = +\infty$ si ha

$$\int_X fg \, d\lambda = \int_X (f/w) g' w \, d\lambda = \int_X (f/w) g' \, d\lambda' = L'(f/w) = Lf$$

per ogni $f \in L_1(\lambda)$ e analogamente per $1 < p, q < +\infty$ si ha

$$\int_X fg \, d\lambda = \int_X (f/w^{1/p}) g' w \, d\lambda = \int_X (f/w^{1/p}) g' \, d\lambda' = L'(f/w^{1/p}) = Lf$$

per ogni $f \in L_p(\lambda)$. Questo prova che vale (a) e completa la dimostrazione nel caso di una misura $\sigma-$finita.

Caso 3: λ misura qualunque ma $1 < p < +\infty$.

Sia $E \in \mathcal{S}$ con $\lambda(E) = +\infty$ un insieme $\sigma-$finito per la misura λ e sia λ_E la restrizione di λ alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}(E)$ dei sottoinsiemi $\mathcal{S}-$misurabili di E. Identificando mediante un isomorfismo isometrico $L_p(\lambda_E)$ con il sottospazio chiuso delle funzioni di $L(\lambda)$ che sono $\lambda-$quasi ovunque nulle in $X \setminus E$, per quanto provato nel caso precedente ad ogni insieme E siffatto si associa una ed una sola funzione $g_E \in L_q(\lambda)$ con $g_E = 0$ $\lambda-$quasi ovunque in $X \setminus E$ tale che si abbia

$$Lf = \int_X f g_E \, d\lambda$$

per ogni funzione $f \in L_p(\lambda)$ con $f = 0$ $\lambda-$quasi ovunque in $X \setminus E$. Per tale funzione g_E risulta inoltre $\|g_E\|_q \le \|L\|$ e, se $E, F \in \mathcal{S}$ sono insiemi $\sigma-$finiti per λ, risulta $g_E = g_F$ $\lambda-$quasi ovunque in $E \cap F$ per le considerazioni sull'unicità svolte all'inizio della dimostrazione.
Consideriamo quindi il $\sigma-$anello $\mathcal{R}_\sigma$ degli insiemi $\mathcal{S}-$misurabili e $\sigma-$finiti di X e la misura positiva su $\mathcal{R}_\sigma$ definita da

$$\mu(E) = \int_X |g_E|^q \, d\lambda, \qquad E \in \mathcal{R}_\sigma.$$

Risulta evidentemente $\mu(E) \le \|L\|^q$ per ogni $E \in \mathcal{R}_\sigma$ e quindi, scelta una successione crescente di insiemi $X_n \in \mathcal{R}_\sigma$ $(n \ge 1)$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(X_n) = \sup\big\{\mu(E) :\ E \in \mathcal{R}_\sigma\big\}$$

e posto $X_\sigma = \bigcup_n X_n \in \mathcal{R}_\sigma$, risulta

$$\mu(X_\sigma) = \max\big\{\mu(E) :\ E \in \mathcal{R}_\sigma\big\} \le \|L\|^q.$$

Dalla massimalità di X_σ per la misura limitata μ si ricava che, per ogni insieme $E \in \mathcal{R}_\sigma$, deve essere $\mu(E \setminus X_\sigma) = 0$ cosicché la funzione $g_E \in L_q(\lambda)$ associata a E deve essere nulla $\lambda-$quasi ovunque in $E \setminus X_\sigma$.
Denotiamo quindi con $g = g_{X_\sigma} \in L_q(\lambda)$ la funzione associata a X_σ che rappresenta la restrizione di L alle funzioni di $L_p(\lambda)$ che sono $\lambda-$quasi ovunque nulle fuori da X_σ e proviamo che tale g è la funzione cercata. Data $f \in L_p(\lambda)$, l'insieme $E = \{f \ne 0\}$ è $\sigma-$finito e si ha

$$Lf = L(f1_E) = L(f1_{E\cap X_\sigma} + f1_{E\setminus X_\sigma}) = L(f1_{E\cap X_\sigma}) + L(f1_{E\setminus X_\sigma})$$

cosicché, denotata con $g_E \in L_q(\lambda)$ la funzione associata a E, risulta

$$L(f1_{E\setminus X_\sigma}) = \int_X f1_{E\setminus X_\sigma} g_E \, d\lambda = \int_{E\setminus X_\sigma} f g_E \, d\lambda = 0$$

poiché g_E è $\lambda-$quasi ovunque nulla in $E \setminus X_\sigma$. Abbiamo così provato che risulta $Lf = L(f1_{E\cap X_\sigma})$ e da ciò segue

$$Lf = L(f1_{E\cap X_\sigma}) = \int_X f1_{E\cap X_\sigma} g \, d\lambda = \int_X fg \, d\lambda, \qquad f \in L_p(\lambda),$$

poiché f è $\lambda-$quasi ovunque nulla in $X \setminus E$ e g è $\lambda-$quasi ovunque nulla in $X \setminus X_\sigma$. Questo prova (a) e completa la dimostrazione del teorema. □

Nel caso $p = 1$ con misura positiva arbitraria, può accadere che non tutti i funzionali lineari limitati di L_1 possano essere rappresentati mediante integrazione contro elementi di L_∞ come prova l'esempio seguente.

Esempio 2.40. Sia $\mathcal{S}$ la $\sigma-$algebra formata dagli insiemi di $\mathbb{R}$ al più numerabili o conumerabili (Esempio II–1.9 – (b)) e sia $\lambda = \#$ la misura del conteggio ristretta alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ (Esempio II–1.21 – (a)). La funzione

$$g(x) = \frac{x}{1+|x|}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

è limitata ma non è $\mathcal{S}-$misurabile (Esercizio II–2.5). Poiché f appartiene a $L_1(\#)$ se e solo se risulta

$$\sum_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < +\infty$$

(Esempio II–2.35), la funzione fg è $\mathcal{S}-$misurabile ed appartiene a $L_1(\#)$ per ogni $f \in L_1(\#)$ e il funzionale lineare L su $L_1(\#)$ definito da

$$Lf = \int_{\mathbb{R}} fg \, d\# = \sum_{x\in\mathbb{R}} \frac{xf(x)}{1+|x|}, \qquad f \in L_1(\#),$$

è limitato e dunque è un elemento del duale di $L_1(\#)$. Se esistesse $h \in L_\infty(\#)$ che permette di rappresentare L mediante la formula

$$Lf = \int_{\mathbb{R}} fh \, d\# = \sum_{x\in\mathbb{R}} f(x)h(x), \qquad f \in L_1(\#),$$

si avrebbe

$$\int_{\mathbb{R}} f(g-h) \, d\# = \sum_{x\in\mathbb{R}} f(x)[g(x) - h(x)] = 0$$

per ogni $f \in L_1(\#)$ da cui, scegliendo $f = 1_{\{x\}}$ al variare di $x \in \mathbb{R}$, seguirebbe $g = h$ e ciò è assurdo. $\square$

Nelle ipotesi del teorema di rappresentazione di Riesz, il duale di $L_p(\lambda)$ si identifica con $L_q(\lambda)$ con q esponente coniugato di p e tutti gli spazi $L_p(\lambda)$ per $1 < p < +\infty$ sono riflessivi.

Corollario 2.41. *Siano* $1 \leq p < +\infty$ *e* $1 < q \leq +\infty$ *esponenti coniugati con* λ *misura* σ *–finita se* $p = 1$*. Allora,*

(a) *la funzione*

$$g \in L_q(\lambda) \mapsto L_g \in [L_p(\lambda)]^*$$

ove L_g *è definito da* $(****)$ *è un isomorfismo isometrico di* $L_q(\lambda)$ *su* $[L_p(\lambda)]^*$*.*

(b) $L_p(\lambda)$ *è riflessivo per* $1 < p < +\infty$*.*

Dimostrazione. È necessario provare solo (b) poiché (a) è ovvio. Denotiamo a tal fine con

$$\Phi\colon g \in L_q(\lambda) \mapsto \Phi(g) = L_g \in [L_p(\lambda)]^*;$$
$$\Psi\colon f \in L_p(\lambda) \mapsto \Psi(f) = L_f \in [L_q(\lambda)]^*;$$

gli isomorfismi isometrici suriettivi definiti in (a) cosicché risulta

$$\langle \Phi(g), f \rangle = \int_X gf \, d\lambda, \qquad f \in L_p(\lambda);$$

per ogni $g \in L_q(\lambda)$ e

$$\langle \Psi(f), g \rangle = \int_X fg \, d\lambda, \qquad g \in L_q(\lambda);$$

per ogni $f \in L_p(\lambda)$ e consideriamo un elemento fissato $L^{**} \in [L_p(\lambda)]^{**}$ del biduale di $L_p(\lambda)$. La funzione $L^* = L^{**} \circ \Phi$ è un elemento del duale di $L_q(\lambda)$ con norma $\|L^*\| = \|L^{**}\|$. Esiste allora una ed una sola funzione $f \in L_p(\lambda)$ tale che $\Psi(f) = L^*$ per la quale si ha

$$\langle L^{**}, \Phi(g) \rangle = \langle L^*, g \rangle = \langle \Psi(f), g \rangle = \int_X fg \, d\lambda = \langle \Phi(g), f \rangle = \langle Jf, \Phi(g) \rangle$$

per ogni $g \in L_q(\lambda)$ ove $J\colon L_p(\lambda) \to [L_p(\lambda)]^{**}$ denota l'immersione canonica di $L_p(\lambda)$ nel suo biduale. Per la suriettività di Φ su $[L_p(\lambda)]^*$ risulta allora $L^{**} = Jf$ e questo completa la dimostrazione. $\square$

Duale di L_∞. Sia $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva (non nulla) su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di un insieme astratto (non vuoto) X. Con l'esclusione di casi banali, il duale di $L_\infty(\lambda)$ non si identifica con $L_1(\lambda)$: esistono funzionali lineari limitati definiti su $L_\infty(\lambda)$ che non sono della forma

$$Lf = \int_X fg \, d\lambda \qquad f \in L_\infty(\lambda),$$

per alcuna funzione $g \in L_1(\lambda)$ (Esercizio 2.22). Il duale di $L_\infty(\lambda)$ risulta essere in genere più grande di $L_1(\lambda)$ ed i suoi elementi si possono rappresentare come integrali rispetto a opportune misure finitamente additive complesse e limitate. Conseguentemente, $L_1(\lambda)$ non risulta essere uno spazio di Banach riflessivo. Illustriamo in questa parte l'identificazione degli elementi del duale di $L_\infty(\lambda)$ con le misure citate. Sia $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di un insieme astratto (non vuoto) X che supponiamo fissata in tutta questa parte e, con la terminologia e le notazioni di Sezione II–4.4, denotiamo con $\mathcal{M}_{\text{ba}}(\mathcal{S})$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ delle misure reali o complesse finitamente additive e limitate su $\mathcal{S}$ e poniamo

$$\begin{aligned} \|\mu\|_{\mathrm{sv}} &= |\mu|_{\mathrm{sv}}(X), \\ \|\mu\|_{\mathrm{tv}} &= |\mu|_{\mathrm{tv}}(X), \end{aligned} \qquad \mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{S}),$$

ove $|\mu|_{\mathrm{sv}}$ e $|\mu|_{\mathrm{tv}}$ denotano la semivariazione e la variazione totale di μ. Le funzioni $\|\cdot\|_{\mathrm{sv}}\colon \mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{S}) \to [0,+\infty)$ e $\|\cdot\|_{\mathrm{tv}}\colon \mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{S}) \to [0,+\infty)$ così definite risultano essere norme equivalenti su $\mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{S})$ che prendono anche in questo caso il nome di norma della semivariazione e della variazione totale rispettivamente e rispetto alle quali $\mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{S})$ risulta essere uno spazio di Banach complesso (Teorema II–4.39). Inoltre, il sottospazio

$$\mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\lambda) = \big\{\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{S}) : \mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)\big\}$$

risulta essere un sottospazio chiuso di $\mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\mathcal{S})$ e quindi risulta essere a sua volta uno spazio di Banach con la norma della variazione totale.

Sia ora $g\colon X \to \mathbb{K}$ una funzione $\mathcal{S}-$misurabile e limitata tale che $g = 0$ $\lambda-$quasi ovunque in X. Risulta allora

$$\int_X g\,d\mu = 0, \qquad \mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\lambda),$$

poiché si ha $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$ per ogni misura $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\lambda)$ e quindi, per ogni siffatta misura μ fissata, possiamo definire l'integrale di una funzione $f \in L_\infty(\lambda)$ rispetto alla misura finitamente additiva e reale o complessa μ

$$\int_E f\,d\mu, \qquad E \in \mathcal{S},$$

mediante un qualsiasi rappresentativo limitato di $f \in L_\infty(\lambda)$. In conseguenza di ciò, ogni misura μ in $\mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\lambda)$ definisce allora tramite la formula

$$L_\mu(f) = \int_X f\,d\mu, \qquad f \in L_\infty(\lambda),$$

un funzionale lineare su $L_\infty(\lambda)$ che risulta essere limitato con norma pari alla variazione totale di μ.

TEOREMA 2.42. *Sia $\mu \in \mathcal{M}_{ba}(\lambda)$ una misura fissata e sia*

$$L_\mu(f) = \int_X f\,d\mu, \qquad f \in L_\infty(\lambda).$$

Allora,

(a) $L_\mu \in [L_\infty(\lambda)]^*$;
(b) $\|L_\mu\| = \|\mu\|_{\mathrm{tv}}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mu \neq 0$ altrimenti non c'è nulla da provare. Per le proprietà dell'integrale di funzioni $\mathcal{S}-$misurabili e limitate rispetto a misure complesse finitamente additive e limitate si ha

$$|L_\mu(f)| = \left|\int_X f\,d\mu\right| \le \int_X |f|\,d|\mu| \le |\mu|_{\mathrm{tv}}(X)\|f\|_\infty, \qquad f \in L_\infty(\lambda),$$

e quindi L_μ risulta essere un funzionale lineare limitato con $\|L_\mu\| \le \|\mu\|_{\mathrm{tv}}$. Viceversa, scelto $0 < \varepsilon < \|\mu\|_{\mathrm{tv}} = |\mu|_{\mathrm{tv}}(X)$, sia $\{E_1, \dots, E_n\}$ una partizione $\mathcal{S}-$misurabile di X tale che risulti

$$(*****) \qquad \sum_m |\mu(E_m)| \ge |\mu|_{\mathrm{tv}}(X) - \varepsilon > 0$$

e sia $f \in L_\infty(\lambda)$ la funzione semplice definita

$$f = \sum_m \operatorname{sgn}\big(\mu(E_m)\big)\, 1_{Em}.$$

Da $(*****)$ si ricava che deve essere $\mu(E_m) \neq 0$ per qualche m cosicché, essendo $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$, risulta $\lambda(E_m) > 0$ per lo stesso m e ciò implica che sia $\|f\|_\infty = 1$. Si ha allora

$$\|L_\mu\| \geq |L_\mu(f)| = \sum_m |\mu(E_m)| \geq |\mu|_{\mathrm{tv}}(X) - \varepsilon$$

e dall'arbitrarietà di $0 < \varepsilon < \|\mu\|_{\mathrm{tv}} = |\mu|_{\mathrm{tv}}(X)$ segue l'asserto. $\square$

Possiamo infine provare che ogni elemento del duale di $L_\infty(\lambda)$ si identifica con l'integrale rispetto a una misura μ di $\mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\lambda)$.

TEOREMA 2.43. *Sia $L \in [L_\infty(\lambda)]^*$ un funzionale lineare limitato su $L_\infty(\lambda)$. Allora,*

(a) *esiste una ed una sola misura $\mu \in \mathcal{M}_{ba}(\lambda)$ tale che*

$$Lf = \int_X f\,d\mu, \qquad f \in L_\infty(\lambda);$$

(b) $\|L\|_{\mathrm{tv}} = \|\mu\|$.

Questo risultato permette di descrivere analiticamente anche il duale dello spazio di Banach $B(\Omega)$ delle funzioni limitate definite su un insieme (non vuoto) Ω (Teorema 1.9). Sia infatti $\lambda = \#$ la misura del conteggio sulla $\sigma-$algebra delle parti di Ω. Da $\mathcal{N}(\lambda) = \{\varnothing\}$ segue che risulta $B(\Omega) = l_\infty(\Omega)$ e anche le relative norme coincidono:

$$\|f\|_u = \|f\|_\infty, \qquad f \in \mathcal{B}(\Omega).$$

Quindi, il duale di $\mathcal{B}(\Omega)$ si identifica isometricamente con lo spazio delle misure complesse finitamente additive limitate su $\mathcal{P}(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. La funzione d'insiemi $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ definita da

$$\mu(E) = L(1_E), \qquad E \in \mathcal{S},$$

è una misura reale o complessa finitamente additiva su $\mathcal{S}$. Inoltre, essa è limitata poiché si ha $|\mu_{\mathrm{tv}}(E)| \leq \|L\|$ per ogni $E \in \mathcal{S}$ e chiaramente risulta $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$. Quindi, $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\lambda)$.
Sia ora $f \in L_\infty(\lambda)$ e siano $s_n\colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ gli elementi di una successione di funzioni semplici e $\mathcal{S}-$misurabili che approssimano f come in Teorema II–2.9. Si ha allora

$$Lf = \lim_{n\to+\infty} Ls_n = \lim_{n\to+\infty} \int_X s_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$$

e questo prova l'esistenza di $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{ba}}(\lambda)$. L'uguaglianza in (b) è conseguenza di Teorema 2.42 da cui segue anche l'unicità di μ. $\square$

Concludiamo questa parte caratterizzando gli elementi di $[L_\infty(\lambda)]^*$ che possono essere rappresentati mediante funzioni di $L_1(\lambda)$.

TEOREMA 2.44. *Siano $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva $\sigma-$finita (non nulla) e $L \in [L_\infty(\lambda)]^*$ un funzionale lineare limitato su $L_\infty(\lambda)$ e sia $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ la misura reale o complessa finitamente additiva su $\mathcal{S}$ definita da*

$$(******) \qquad \mu(E) = L(1_E), \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) *μ è numerabilmente additiva;*

(b) *esiste $g \in L_1(\lambda)$ tale che*

$$L(f) = \int_X fg\,d\lambda, \qquad f \in L_\infty(\lambda).$$

Nel linguaggio di Sezione 1.4, gli elementi del biduale di $L_1(\lambda)$ che sono immagine di elementi di $L_1(\lambda)$ mediante l'immersione canonica di $L_1(\lambda)$ nel biduale sono i funzionali lineari L di $[L_1(\lambda)]^{**}$ che mediante la formula $(******)$ danno luogo ad una misura numerabilmente additiva complessa su $\mathcal{S}$. Inoltre, nelle ipotesi del teorema, la funzione g è univocamente individuata come elemento di $L_1(\lambda)$ e risulta

$$\|L\| = \|g\|_1.$$

Dimostrazione. La funzione $\mu\colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ definita da $(******)$ è una misura complessa tale che $\mathcal{N}(\lambda) \subset \mathcal{N}(\mu)$. Per il teorema di Radon–Nikodym (Teorema II–4.21) esiste quindi una funzione $g \in L_1(\lambda)$ per la quale risulta

$$L(1_E) = \mu(E) = \int_E g\, d\lambda, \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Si ha allora

$$L(s) = \int_X sg\, d\lambda$$

per ogni funzione semplice $s \in \Sigma_\infty(\lambda)$ e quindi la stessa formula vale per densità con $f \in L_\infty(\lambda)$ in luogo di s (Teorema 2.27). □

Uniforme convessità di L_p $(1 < p < +\infty)$. Proviamo in questa parte che la norma degli spazi L_p è uniformemente convessa per $1 < p < +\infty$. Consideriamo a tal fine una misura positiva $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di un insieme astratto (non vuoto) X che supponiamo fissata in tutta questa parte e proviamo preliminarmente le seguenti disuguaglianze elementari tra numeri complessi.

Lemma 2.45. *Siano $1 < p, q < +\infty$ esponenti coniugati. Allora, per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ha*

$$\text{(a)} \qquad 1 < p \le 2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &(\mathrm{a}_1) \quad |z+w|^q + |z-w|^q \le 2\left(|z|^p + |w|^p\right)^{1/(p-1)}; \\ &(\mathrm{a}_2) \quad |z+w|^p + |z-w|^p \ge 2^{p-1}\left(|z|^p + |w|^p\right); \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad 2 \le p < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &(\mathrm{b}_1) \quad |z+w|^q + |z-w|^q \ge 2\left(|z|^p + |w|^p\right)^{1/(p-1)}; \\ &(\mathrm{b}_2) \quad |z+w|^p + |z-w|^p \le 2^{p-1}\left(|z|^p + |w|^p\right). \end{aligned}$$

Per $p = q = 2$ tutte le disuguaglianze precedenti si riducono a un caso particolare della familiare identità del parallelogramma

$$\|z+w\|^2 + \|z-w\|^2 = 2\left(\|z\|^2 + \|w\|^2\right), \qquad z, w \in \mathbb{K}^N.$$

Dimostrazione. Siano $p, q \ne 2$ altrimenti non c'è nulla da provare e procediamo provando (a_1), (b_2), (b_1) e (a_2) nell'ordine.

(a_1) Per $z = 0$ o $w = 0$ la disuguaglianza si riduce ad un'ovvia uguaglianza. Essendo la disuguaglianza simmetrica in z e w, possiamo quindi supporre che sia $0 < |w| \le |z|$ e porre $w/z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ con $0 < r \le 1$ e $|\theta| \le \pi$ cosicché (a_1) si riduce a

$$\left|1 + r\mathrm{e}^{i\theta}\right|^q + \left|1 - r\mathrm{e}^{i\theta}\right|^q \le 2\left(1 + r^p\right)^{1/(p-1)}, \qquad |\theta| \le \pi, \qquad 0 < r \le 1.$$

Si ha $\left|1 \pm r\mathrm{e}^{i\theta}\right|^q = \left(1 \pm 2r\cos\theta + r^2\right)^{q/2}$ e, per $0 < r \le 1$ fissato, calcoliamo il massimo della funzione continua

$$\varphi_r(\theta) = \left(1 + 2r\cos\theta + r^2\right)^{q/2} + \left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right)^{q/2}, \qquad |\theta| \le \pi.$$

Essendo $\varphi_r(\theta) = \varphi_r(-\theta)$ e $\varphi_r(\pi - \theta) = \varphi_r(\theta)$ per $0 \le \theta \le \pi/2$, è sufficiente calcolare il massimo di φ_r solo sull'intervallo $[0, \pi/2]$. La derivata di φ_r è

$$\varphi_r'(\theta) = -rq \operatorname{sen}\varphi\left[\left(1 + 2r\cos\theta + r^2\right)^{q/2-1} + \left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right)^{q/2-1}\right]$$

per ogni $0 < \theta \leq \pi/2$ e quindi, essendo $q/2-1>0$, φ_r' risulta negativa in $(0,\pi/2]$ da cui segue che φ_r è strettamente decrescente in tutto l'intervallo $[0,\pi/2]$. Si ha pertanto

$$\left|1+r\mathrm{e}^{i\theta}\right|^q + \left|1-r\mathrm{e}^{i\theta}\right|^q = \varphi_r(\theta) \leq \varphi_r(0) = (1+r)^q + (1-r)^q$$

per ogni $|\theta| \leq \pi$ e per concludere la dimostrazione di (a_1) resta da provare solo che risulta

$$(1+r)^q + (1-r)^q \leq 2\left(1+r^p\right)^{1/(p-1)}, \qquad 0 \leq r \leq 1.$$

Benché elementare, la dimostrazione di questa disuguaglianza è laboriosa e per questo motivo rinviamo a [30], Lemma 15.6, per la sua dimostrazione.

(b_2) In questo caso si ha $2 < p < +\infty$ e $1 < q < 2$ e quindi per (a_1) con esponenti p e q scambiati risulta

$$|z+w|^p + |z-w|^p \leq 2\left(|z|^q + |w|^q\right)^{1/(q-1)} = 2\left(|z|^q + |w|^q\right)^{p/q}$$

per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ poiché $1/(q-1) = p/q$. Per la disuguaglianza di Hölder con esponenti coniugati $r = p/q > 1$ e $s = p/(p-1)$, si ha poi

$$|z|^q + |w|^q \leq 2^{1-q/p}\left(|z|^p + |w|^p\right)^{q/p}$$

per ogni z e w da cui segue

$$|z+w|^p + |z-w|^p \leq 2 \cdot 2^{p/q(1-q/p)}\left(|z|^p + |w|^p\right) = 2^{p/q}\left(|z|^p + |w|^p\right)$$

sempre per ogni z e w e questo completa la dimotrazione di (b_2) poiché risulta $p/q = p-1$.

(b_1) Anche in questo caso si ha $2 < p < +\infty$ e $1 < q < 2$ e scrivendo (a_1) per

$$\xi = \frac{z+w}{2} \qquad \text{e} \qquad \eta = \frac{z-w}{2},$$

con esponenti p e q scambiati risulta

$$|z|^p + |w|^p \leq 2\left(\left|\frac{z+w}{2}\right|^q + \left|\frac{z+w}{2}\right|^q\right)^{1/(q-1)} = 2^{-(p-1)}\left(|z+w|^q + |z-w|^q\right)$$

poiché si ha $1/(q-1) = p-1$ e $1 - q/(q-1) = -(p-1)$.

(a_2) In questo caso si ha $1 < p < 2$ e $2 < q < +\infty$ e quindi per (b_1) con esponenti p e q scambiati si ha

$$|z+w|^p + |z-w|^p \geq 2\left(|z|^q + |w|^q\right)^{1/(q-1)} = 2\left(|z|^q + |w|^q\right)^{p/q}$$

per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ poiché risulta $1/(q-1) = p/q$. Per la disuguaglianza di Hölder rovesciata con esponenti coniugati $r = p/q < 1$ e $s = r/(r-1) < 0$ (Teorema 2.30), si ha poi

$$|z|^q + |w|^q \geq 2^{1-q/p}\left(|z|^p + |w|^p\right)^{q/p}$$

per ogni z e w. Procedendo come al Passo 2 si ottiene poi

$$\begin{aligned}|z+w|^p + |z-w|^p &\geq 2 \cdot 2^{p/q(1-q/p)}\left(|z|^p + |w|^p\right) = \\ &= 2^{p/q}\left(|z|^p + |w|^p\right) = 2^{p-1}\left(|z|^p + |w|^p\right)\end{aligned}$$

e questo completa la dimostrazione. $\square$

TEOREMA 2.46 (J. A. Clarkson). *Siano* $1 < p, q < +\infty$ *esponenti coniugati e siano* $f, g \in L_p(\lambda)$ *due funzioni. Allora,*

$$\text{(a)}\quad 1 < p \le 2 \implies \begin{cases} (\mathrm{a}_1) & \|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \le 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{1/(p-1)}; \\ (\mathrm{a}_2) & \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \ge 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right); \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad 2 \le p < +\infty \implies \begin{cases} (\mathrm{b}_1) & \|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \ge 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{1/(p-1)}; \\ (\mathrm{b}_2) & \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \le 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right). \end{cases}$$

Queste disuguaglianze prendono il nome di *disuguaglianze di Clarkson* e nel caso $p = q = 2$ si riducono all'uguaglianza

$$\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2\left(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2\right), \qquad f, g \in L_2(\lambda),$$

che generalizza alle funzioni di $L_2(\lambda)$ l'uguaglianza del parallelogramma valida per i vettori di $\mathbb{K}^N$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $p, q \ne 2$ altrimenti non c'è nulla da provare e proviamo solo (a_1) e (b_1) poiché (a_2) e (b_2) si ottengono integrando le corrispondenti disuguaglianze di Lemma 2.45.

(a_1) Si ha $p = q(p-1)$ e $q/p = 1/(p-1)$ e quindi risulta

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q &= \\ &= \left(\int_X |f+g|^p \, d\lambda\right)^{q/p} + \left(\int_X |f-g|^p \, d\lambda\right)^{q/p} = \\ &= \left(\int_X |f+g|^{q(p-1)} \, d\lambda\right)^{1/(p-1)} + \left(\int_X |f-g|^{q(p-1)} \, d\lambda\right)^{1/(p-1)} \le \end{aligned}$$

cosicché, per la disuguaglianza di Minkowski rovesciata con esponente $0 < p-1 < 1$ (Teorema 2.31) si ha

$$\le \left(\int_X \left[|f+g|^q + |f-g|^q\right]^{(p-1)} d\lambda\right)^{1/(p-1)}.$$

Per la corrispondente disuguaglianza (a_1) di Lemma 2.45 si ha

$$|f+g|^q + |f-g|^q \le 2\left(|f|^p + |g|^p\right)^{1/(p-1)}$$

$\lambda-$quasi ovunque in X e quindi dalla catena di disuguaglianze precedente si ottiene

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q &\le \left(\int_X \left[|f+g|^q + |f-g|^q\right]^{(p-1)} d\lambda\right)^{1/(p-1)} \le \\ &\le 2\left(\int_X \left[|f|^p + |g|^p\right] d\lambda\right)^{1/(p-1)} = 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{1/(p-1)} \end{aligned}$$

che è la disuguaglianza cercata.

(b_1) Per la disuguaglianza (a_1) di di Lemma 2.45 con $z = (f+g)/2$ e $w = (f-g)/2$ e con esponenti p e q scambiati si ha

$$|f|^p + |g|^p \le 2\left(\left|\frac{f+g}{2}\right|^q + \left|\frac{f-g}{2}\right|^q\right)^{1/(q-1)} = 2^{1-p}\left(|f+g|^q + |f-g|^q\right)^{p-1}$$

$\lambda-$quasi ovunque in X poiché si ha $1 - q/(q-1) = 1 - p$ e $1/(q-1) = p-1$. Integrando ambo i membri della disuguaglianza precedente e utilizzando questa volta la disuguaglianza di Minkowski con esponente $p-1>1$ si trova

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p+\|g\|_p^p &\le 2^{1-p}\left\| |f+g|^q+|f-g|^q\right\|_{p-1}^{p-1} \le \\ &\le 2^{1-p}\left(\left\| |f+g|^q\right\|_{p-1}+\left\| |f-g|^q\right\|_{p-1}\right)^{p-1}.\end{aligned}$$

Risulta ora

$$\begin{aligned}\left\| |f\pm g|^q\right\|_{p-1} &= \left(\int_X |f\pm g|^{q(p-1)}\,d\lambda\right)^{1/(p-1)} = \\ &= \left(\int_X |f\pm g|^{p}\,d\lambda\right)^{q/p} = \|f\pm g\|_p^q\end{aligned}$$

poiché si ha $q(p-1)=p$ e $1/(p-1)=q/p$ e quindi dalla catena di disuguaglianze precedente si ottiene

$$\|f\|_p^p+\|g\|_p^p \le 2^{1-p}\left(\|f+g\|_p^q+\|f-g\|_p^q\right)^{p-1}$$

che, passando alle radici, è la disguaglianza cercata. □

Corollario 2.47. *Siano $1<p,q<+\infty$ esponenti coniugati e siano $f,g\in L_p(\lambda)$ due funzioni tali che $\|f\|_p=\|g\|_p=1$ e $\|f-g\|_p\ge\varepsilon$ per qualche $\varepsilon\in(0,2]$. Allora,*

$$\text{(a)}\qquad 1<p\le 2 \qquad\Longrightarrow\qquad \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \le \left(1-\frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{1/p};$$

$$\text{(b)}\qquad 2\le p<+\infty \qquad\Longrightarrow\qquad \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \le \left(1-\frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{1/q}.$$

Conseguentemente la norma degli spazi $L_p(\lambda)$ con $1<p<+\infty$ è uniformemente convessa. Facili esempi mostrano che ciò è falso per $p=1$ e $p=+\infty$. Lo stesso vale in particolare per le norme di indice p di $\mathbb{K}^n$.

Dimostrazione. Seguono rispettivamente dalle disuguaglianze di Clarkson (a_1) e (b_2). □

Spazi L_p $(0<p<1)$. Sia $\lambda\colon\mathcal{S}\to[0,+\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di un insieme astratto (non vuoto) X che supponiamo fissata in tutta questa parte.
Come nel caso $p\ge 1$ già esaminato, per ogni $0<p<1$ fissato e per ogni funzione $\mathcal{S}-$misurabile $f\colon X\to\mathbb{K}$ poniamo

$$\|f\|_p=\left(\int_X |f|^p\,d\lambda\right)^{1/p}\in[0,+\infty]$$

e denotiamo con

$$\mathcal{L}_p(\lambda)=\left\{f\in\mathcal{L}(\mathcal{S}):\ \|f\|_p<+\infty\right\}$$

l'insieme delle funzioni $\mathcal{S}-$misurabili di potenza $p-$integrabili e con

$$L_p(\lambda)=\mathcal{L}_p(\lambda)/N$$

l'insieme quoziente formato dalle classi equivalenza di funzioni di $\mathcal{L}_p(\lambda)$ che sono $\lambda-$quasi ovunque uguali in X. Valgono anche in questo caso le considerazioni e convenzioni relative agli elementi di $L_p(\lambda)$ che abbiamo già illustrato per $p\ge 1$.
Le proprietà della funzione $\|\cdot\|_p\colon\mathcal{L}(\mathcal{S})\to[0,+\infty]$ per $0<p<1$ sono elencate nella proposizione seguente.

Proposizione 2.48. *Sia $0<p<1$ e siano $f,g\in L(\mathcal{S})$ funzioni $\mathcal{S}-$misurabili. Allora,*

(a) $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$;
(b) $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$ *per ogni* $\alpha \in \mathbb{K}$;
(c) $\|f+g\|_p^p \le \|f\|_p^p + \|g\|_p^p$.

Le prime due affermazioni sono evidenti e la terza è conseguenza della disuguaglianza

$$(a+b)^p \le a^p + b^p, \qquad a\,,b \ge 0 \quad (0<p<1)$$

che è stretta per $a\,,b>0$.
Conseguentemente $L_p(\lambda)$ $(0<p<1)$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ ma $\|\cdot\|_p$ non è una norma in $L_p(\lambda)$ per $0<p<1$ a meno di casi banali[2]. Se infatti $E\,,F \in \mathcal{S}$ sono insiemi disgiunti con $0<\lambda(E)\,,\lambda(F)<+\infty$, si ha $1_E\,,1_F \in L_p(\lambda)$ e

$$\|1_E+1_F\|_p = \big(\lambda(E)+\lambda(F)\big)^{1/p} > \big(\lambda(E)\big)^{1/p} + \big(\lambda(F)\big)^{1/p} = \|1_E\|_p + \|1_F\|_p.$$

Anche se $\|\cdot\|_p$ non è una norma, è possibile dare agli spazi L_p con $0<p<1$ una naturale struttura di spazio metrico.

Teorema 2.49. *Sia* $0<p<1$ *e sia*

$$d_p(f\,,g) = \int_X |f-g|^p\,d\lambda, \qquad f\,,g \in L_p(\lambda).$$

Allora,

(a) d_p *è una metrica tale che*
$$d_p(f+h\,,g+h) = d_p(f\,,g), \qquad f\,,g\,,h \in L_p(\lambda);$$
(b) *le operazioni di spazio vettoriale*
$$(f\,,g) \in L_p(\lambda)\times L_p(\lambda) \mapsto f+g \in L_p(\lambda)$$
$$(\alpha\,,f) \in \mathbb{K}\times L_p(\lambda) \mapsto \alpha f \in L_p(\lambda)$$
sono continue;
(c) $(L_p(\lambda)\,,d_p)$ *è uno spazio metrico completo.*

Alla proprietà di d_p espressa da (a) si fa riferimento dicendo che d_p è una metrica *invariante*. Gli spazi L_p con $0<p<1$ sono esempi di spazi quasinormati (Definizione 4.31), un tipo di spazio che esamineremo nella successiva Sezione 4.1.

Dimostrazione. (a) Le proprietà (D1) e (D2) della definizione di metrica sono evidenti e (D3) segue da Proposizione 2.48 – (c). Anche l'invarianza è ovvia.
(b) Siano $f_n\,,g_n \in L_p(\lambda)$ $(n\ge 1)$ e $f\,,g \in L_p(\lambda)$ funzioni tali che $f_n \to f$ e $g_n \to g$ in $L_p(\lambda)$ per $n\to+\infty$. Si ha allora

$$d_p(f_n+g_n\,,f+g) \le d_p(f_n+g_n\,,f+g_n)+d_p(f+g_n\,,f+g) = d_p(f_n\,,f)+d_p(g_n\,,g) \to 0$$

per $n\to+\infty$ e questo prova la continuità della somma. Inoltre, per $\alpha_n \in \mathbb{K}$ $(n\ge1)$ e $\alpha\in\mathbb{K}$ tali che $\alpha_n\to\lambda$ in $\mathbb{K}$ per $n\to+\infty$ si ha $|\alpha|\le C$ per ogni n e

$$\begin{aligned} d_p(\lambda_n f_n\,,\lambda f) &\le d_p(\lambda_n f\,,\lambda_n f) + d_p(\lambda_n f\,,\lambda f) \le \\ &\le C^p d_p(f_n\,,f) + |\alpha_n-\alpha|^p d_p(f\,,0) \to 0 \end{aligned}$$

per $n\to+\infty$ e questo prova l'asserto.
(c) Si ripete la dimostrazione di Teorema 2.24. □

Concludiamo questa parte evidenziando una proprietà che differenzia in modo significativo gli spazi L_p con $0<p<1$ da quelli con $p\ge1$.

Teorema 2.50. *Siano*

[2] Anche se $\|\cdot\|_p$ non è una norma in $L_p(\lambda)$ per $0<p<1$, manteniamo la notazione consueta per analogia con la definizione di $\|\cdot\|_p$ per $p\ge1$.

- $\lambda\colon \mathcal{S} \to [+\infty]$ *misura positiva continua;*
- $V \subset L_p(\lambda)$ $(0 < p < 1)$ *insieme non vuoto, aperto e convesso.*

Allora $V = L_p(\lambda)$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché la metrica d_p è invariante, le traslazioni

$$f \in L_p(\lambda) \mapsto f + g \in L_p(\lambda)$$

($g \in L_p(\lambda)$ fissata) sono omeomorfismi e quindi non è restrittivo supporre che sia $0 \in V$. Allora, $B_r = B_r(0) \subset V$ per $r > 0$ opportuno.
Sia quindi $f \in L_p(\lambda)$ e sia $n \geq 1$ tale che

$$\frac{1}{n^{1-p}} d_p(f\,, 0) < r.$$

La misura positiva finita $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ definita da

$$\mu(E) = \int_E |f|^p \, d\lambda, \qquad E \in \mathcal{S},$$

è continua (Esercizio II–2.3) con $\mu(X) = d_p(f\,, 0)$ e quindi risulta $\mu(\mathcal{S}) = [0, \mu(X)]$ (Teorema II–1.33). Esistono allora n insiemi disgiunti $X_m \in \mathcal{S}$ $(m = 1, \ldots, n)$ tali che

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_n \qquad \text{e} \qquad \mu(X_m) = \mu(X)/n, \qquad m = 1, \ldots, n$$

e le funzioni $f_n \in L_p(\lambda)$ definite da $f_m = nf1_{X_m}$ per ogni m appartengono a V poiché risulta

$$d_p(f_m\,, 0) = n^p \int_{X_m} |f|^p \, d\lambda = \frac{1}{n^{1-p}} \mu(X) = \frac{1}{n^{1-p}} d_p(f\,, 0).$$

Da $f = (f_1 + \cdots + f_n)/n$ segue $f \in V$ e questo completa la dimostrazione. □

COROLLARIO 2.51. *Nelle ipotesi di Teorema 2.50 sia* $L\colon L_p(\lambda) \to \mathbb{K}$ $(0 < p < 1)$ *un funzionale lineare continuo. Allora* $L = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme $V_\varepsilon = \{f \in L_p(\lambda) : |Lf| < \varepsilon\}$ è non vuoto, aperto e convesso. Quindi, $|Lf| < \varepsilon$ per ogni $f \in L_p(\lambda)$ e $\varepsilon > 0$ e questo prova la tesi. □

2.3. Convoluzioni e approssimazioni

L'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$ e conseguentemente degli integrali consente di definire un'operazione tra coppie di funzioni integrabili che misura – in un certo senso – il grado di sovrapposizione dei grafici delle due funzioni al variare della traslazione di una di esse. Questa operazione ha un effetto di regolarizzazione poiché, a meno di un fattore di normalizzazione, effettua una sorta di "media" sui valori di una funzione rispetto all'altra. Essa prende il nome di *convoluzione*. Ne esaminiamo in questa sezione le principali proprietà con particolare riguardo alla possibilità di approssimare funzioni integrabili mediante funzioni piú regolari nel senso che sarà precisato in seguito.
Poiché in questa sezione interverrà solo la misura di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$, conveniamo per brevità che ogni riferimento a misura, misurabilità e integrazione sia riferito alla misura ed alla σ-algebra di Lebesgue di $\mathbb{R}^N$.
Denotiamo inoltre come al solito con $\mathbb{K}$ il campo dei numeri reali o complessi.

Convoluzione. Siano $f\,, g \in L(\mathbb{R}^N)$ due (classi di equivalenza di) funzioni misurabili. Se la funzione

$$y \in \mathbb{R}^N \mapsto f(x - y)g(y)$$

risulta integrabile per ogni $x \in \mathbb{R}^N \setminus T$ per qualche insieme trascurabile T, la funzione $f * g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ definita da

$$(*) \qquad f * g(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus T \\ 0 & \text{se } x \in T \end{cases}$$

si dice *convoluzione di f e g* e con abuso di notazione si scrive

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

La funzione $f * g$ così definita dipende solo dalle classi di equivalenza f e g e, in particolare, ciò vale per l'insieme $\mathbb{R}^N \setminus T$ degli x per cui $f * g(x)$ è effettivamente definita come integrale.
Il risultato seguente fornisce condizioni sufficienti sulle funzioni f e g che garantiscono la possibilità di definirne la convoluzione.

Teorema 2.52 (W. H. Young). *Siano $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p \le +\infty)$. Allora,*

(a) *esiste $T \subset \mathbb{R}^N$ insieme trascurabile tale che la funzione*

$$y \in \mathbb{R}^N \mapsto f(x-y)g(y)$$

è integrabile per ogni $x \in \mathbb{R}^N \setminus T$;

(b) *per la funzione $f * g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ definita da $(*)$ risulta $f * g \in L_p(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Per ogni funzione $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ fissata, la funzione $g \in L_p(\mathbb{R}^N) \mapsto f * g \in L_p(\mathbb{R}^N)$ è chiaramente lineare e quindi, per la disuguaglianza in (b), la convoluzione con una fissata funzione $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ risulta essere un operatore lineare limitato da $L_p(\mathbb{R}^N)$ in sè con norma non superiore a $\|f\|_1$. La disuguaglianza in (b) prende il nome di *disuguaglianza di Young.*

Dimostrazione. Consideriamo il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ da cui il caso complesso segue facilmente e denotiamo con (x, y) i vettori di $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ $(x, y \in \mathbb{R}^N)$.
La funzione

$$y \in \mathbb{R}^N \mapsto f(x-y)g(y),$$

è misurabile in $\mathbb{R}^N$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ fissato e che la funzione

$$(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto f(x-y)g(y)$$

è misurabile in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ (Esercizio II–5.25). Conseguentemente le funzioni

$$(**) \qquad \begin{aligned} x \in \mathbb{R}^N &\mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\,dy \in [0, +\infty]; \\ x \in \mathbb{R}^N &\mapsto \int_{\mathbb{R}^N} [f(x-y)g(y)]^{\pm}\,dy \in [0, +\infty]; \end{aligned}$$

sono misurabili per il teorema di Fubini–Tonelli (Teorema II–5.40).
Sia dapprima $p = 1$. Per il teorema di Fubini–Tonelli per funzioni non negative (Teorema II–5.40) e per l'invarianza per traslazioni dell'integrale, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\,d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)\,dx \right) |g(y)|\,dy = \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty. \end{aligned}$$

Questo prova la validità di (a) per $p = 1$ e dal teorema di Fubini–Tonelli per funzioni integrabili (Teorema II–5.41) si deduce che $f * g$ appartiene a $L_1(\mathbb{R}^N)$ e che vale la disuguaglianza $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$.

Consideriamo quindi il caso $1 < p < +\infty$. A tal fine, denotato con $1 < q < +\infty$ l'esponente coniugato di p, per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\,dy &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^{1/q}|f(x-y)|^{1/p}|g(y)|\,dy \leq \\ &\leq \|f\|_1^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p\,dy\right)^{1/p}\end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Elevando ambo i membri alla potenza p, integrando rispetto a x e scambiando nuovamente l'ordine di integrazione (Teorema II–5.40), per l'invarianza per traslazioni dell'integrale risulta

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\,dy\right)^p dx &\leq \|f\|_1^{p/q}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p\,dy\right) dx = \\ &= \|f\|_1^{p/q}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,dx\right)|g(y)|^p dy = \\ &= \|f\|_1^{p/q+1}\|g\|_p^p\end{aligned}$$

da cui segue

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\,dy < +\infty$$

per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ e, come nel caso precedente, questo prova la validità di (a) per $1 < p < +\infty$. Dalla misurabilità della seconda coppia di funzioni in $(**)$ segue che $f*g$ è misurabile e quindi dalla disuguaglianza ottenuta sopra si deduce che $f*g$ appartiene a $L_p(\mathbb{R}^N)$ e, passando alla radice $p-$esima, che vale la disuguaglianza $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$.

Infine, per $p = +\infty$, sempre per l'invarianza per traslazioni dell'integrale si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\,dy \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Questo prova la validità di (a) per $p = +\infty$ e con le stesse considerazioni già svolte per $1 < p < +\infty$ si conclude che risulta $f*g \in L_\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$. □

Le proprietà algebriche della convoluzione sono riassunte nel risultato seguente.

Proposizione 2.53. *Siano* $f, g \in L_1(\mathbb{R}^N)$ *e* $h \in L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$. *Allora,*

(a) $g*h = h*g$;
(b) $(f*g)*h = f*(g*h)$;
(c) $(\lambda f + \mu g)*h = \lambda(f*h) + \mu(g*h)$ *per ogni* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

In particolare, $L_1(\mathbb{R}^N)$ risulta essere un'algebra di Banach commutativa rispetto all'operazione di convoluzione.

Dimostrazione. Occorre provare solo (a) e (b) poiché (c) è ovvia.

(a) Per effetto del cambio di variabili definito da $y \in \mathbb{R}^N \mapsto x - y$ (Teorema II–5.52) l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^N$ per cui la funzione $y \in \mathbb{R}^N \mapsto g(x-y)h(y)$ è integrabile coincide con l'insieme degli x per cui la funzione $y \in \mathbb{R}^N \mapsto h(x-y)g(y)$ è integrabile e per lo stesso motivo per tali x si ha

$$g*h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} g(x-y)h(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} g(y)h(x-y)\,dy = h*g(x).$$

(b) Sia X l'insieme con $|X^c| = 0$ tale che le funzioni

$$y \in \mathbb{R}^N \mapsto (f*g)(x-y)h(y) \qquad \text{e} \qquad z \in \mathbb{R}^N \mapsto |f(x-z)|(|g|*|h|)(z)$$

siano integrabili in $\mathbb{R}^N$ per ogni $x \in X$ e sia Y l'insieme con $|Y^c| = 0$ tale che la funzione

$$z \in \mathbb{R}^N \mapsto f(u-z)g(z)$$

sia integrabile per ogni $u \in Y$. Per $x \in X$ si ha allora

$$\begin{aligned}(f*g)*h(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} (f*g)(x-y)h(y)\,dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y-z)g(z)\,dz \right) h(y)\,dy.\end{aligned}$$

Per ogni x come sopra e per ogni y tale che $u = x - y \in Y$, operando il cambio di variabili definito da $z \in \mathbb{R}^N \mapsto z - y$, risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y-z)g(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-z)g(z-y)\,dz$$

da cui segue

$$(f*g)*h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-z)g(z-y)\,dz \right) h(y)\,dy$$

cosicché, se assumiamo di poter scambiare l'ordine di integrazione nei due integrali che compaiono a destra dell'uguaglianza precedente, risulta

$$\begin{aligned}(f*g)*h(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x-z) \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(z-y)h(y)\,dy \right) dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x-z)(g*h)(z)\,dz = \\ &= f*(g*h)(x)\end{aligned}$$

poiché la funzione $z \in \mathbb{R}^N \mapsto f(x-z)(g*h)(z)$ è integrabile per ogni $x \in X$ per la scelta di X.

Resta dunque da provare la validità dello scambio dell'ordine di integrazione tra y e z. A tal fine osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ la funzione

$$(y,z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto f(x-z)g(z-y)h(y)$$

è misurabile in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ (Esercizio II–5.25) e quindi per il teorema di Fubini–Tonelli (Teorema II–5.40) si ha con l'usuale abuso di notazione

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} |f(x-z)g(z-y)h(y)|\,d\mathcal{L}^{2N}(y,z) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-z)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(z-y)h(y)|\,dy \right) dz = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-z)|(|g|*|h|)(z)\,dz < +\infty$$

per ogni $x \in X$ per la scelta di X cosicché risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-z)g(z-y)\,dz \right) h(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-z) \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(z-y)h(y)\,dy \right) dy$$

per gli stessi x per il teorema di Fubini–Tonelli (Teorema II–5.41) e questo completa la dimostrazione. □

Ulteriori proprietà della convoluzione sono elencate nella proposizione seguente.

Proposizione 2.54. *Siano $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p \le +\infty)$. Allora,*

(a) $\tau_z(f*g) = (\tau_z f)*g = f*(\tau_z g)$ *per ogni* $z \in \mathbb{R}^N$*;*
(b) $\operatorname{supp}(f*g) \subset \operatorname{cl}(\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g))$.

Ricordiamo che il supporto di una funzione di $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ è definito come il supporto della misura di Radon data dal suo integrale indefinito $(\dots)$.

DIMOSTRAZIONE. (a) Sia $z \in \mathbb{R}^N$ fissato e sia $x \in \mathbb{R}^N$ tale che la funzione

$$y \in \mathbb{R}^N \mapsto f(x+z-y)g(y)$$

sia integrabile. Si ha allora

$$\tau_z(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x+z-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} \tau_z f(x-y)g(y)\,dy = (\tau_z f)*g(x).$$

Infine, per effetto del cambio di variabili $y \in \mathbb{R}^N \mapsto y+z$, anche la funzione

$$y \in \mathbb{R}^N \mapsto f(x-y)g(y+z)$$

è integrabile e risulta

$$\tau_z(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x+z-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y+z)\,dy = f*(\tau_z g)(x)$$

e questo completa la dimostrazione.
(b) Sia V un insieme aperto tale che $V \cap \mathrm{cl}(\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g))$ cosicché risulta in particolare $V \cap (\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)) = \varnothing$. Per ogni $x \in V$ risulta allora $(x - \mathrm{supp}(f)) \cap \mathrm{supp}(g) = \varnothing$ da cui segue $f*g(x) = 0$ e questo implica che sia $\mathrm{supp}(f*g) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g))$. □

Concludiamo questa parte esaminando le proprietà della convoluzione di funzioni integrabili e funzioni continue.

TEOREMA 2.55. *Siano $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in C_b(\mathbb{R}^N)$. Allora,*

(a) *la convoluzione $f*g(x)$ è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}^N$;*
(b) *$f*g$ è limitata e uniformemente continua e si ha*

$$\|f*g\|_u \le \|f\|_p \|g\|_u.$$

DIMOSTRAZIONE. (a) La funzione $y \in \mathbb{R}^N \mapsto f(x-y)g(y)$ è integrabile per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ fissato poiché si ha

$$|f(x-y)g(y)| \le |f(x-y)|\|g\|_u, \qquad y \in \mathbb{R}^N,$$

per ogni x e quindi la convoluzione $f*g(x)$ è ben definita da $(*)$ con $T = \varnothing$.
(b) Per lo stesso motivo di (a) si ha

$$|f*g(x)| \le \|f\|_1\|g\|_u, \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

da cui segue che $f*g$ è limitata. Relativamente all'uniforme continuità, si ha

$$|f*g(x_2) - f*g(x_1)| \le \|f(x_2 - \cdot) - f(x_1 - \cdot)\|_1 \|g\|_u, \qquad x_i \in \mathbb{R}^N \quad (i = 12),$$

con ovvio significato dei simboli e la conclusione segue da Proposizione 2.35. □

COROLLARIO 2.56. *Siano $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Allora,*

(a) *la convoluzione $f*g(x)$ è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}^N$;*
(b) *$f*g \in C_0(\mathbb{R}^N)$ e si ha*

$$\|f*g\|_u \le \|f\|_1\|g\|_u.$$

DIMOSTRAZIONE. Occorre provare soltanto che $f*g$ si annulla all'infinito. A tal fine, supponiamo senza perdita di generalitá che sia $\|f\|_1 > 0$ e $\|g\|_u > 0$ e, tenuto conto della commutatività della convoluzione, osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$ si ha

$$\begin{aligned} |f*g(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)||g(x-y))|\,dy = \\ &= \left(\int_{B_r} + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r}\right) |f(y)||g(x-y))|\,dy \le \end{aligned}$$

$$\leq \int_{B_r} |g(x-y)||f(y)|\,dy + \|g\|_u \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} |f|$$

con ovvio significato. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste allora $r = r(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} |f| \leq \frac{\varepsilon}{2\|g\|_u}$$

e inoltre, essendo $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$, esiste anche $R = R(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\|x\| \geq R \qquad \Longrightarrow \qquad |g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|_1}.$$

Allora, per $\|x\| \geq R + r$ risulta $\|x - y\| \geq R$ per ogni $y \in B_r$ cosicché per le disuguaglianze ottenute si ha

$$|f * g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|_1} \int_{B_r} |f|\,dy + \|g\|_u \frac{\varepsilon}{2\|g\|_u} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e questo completa la dimostrazione. □

Nuclei di sommabilità. Una successione di funzioni $K_n \in L_1(\mathbb{R}^N)$ $(n \geq 1)$ tali che

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} K_n = 1$ per ogni n;
- $\displaystyle\sup_n \|K_n\|_1 < +\infty$;
- per ogni $r > 0$, posto $B_r = B_r[0]$, si ha

$$(***) \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} |K_n| = 0;$$

si dice *nucleo di sommabilità.* Un nucleo di sommabilità $\{K_n\}_n$ si dice *positivo* se risulta $K_n(x) \geq 0$ per quasi ogni x e n.
La condizione $(***)$ forza le funzioni K_n a concentrarsi attorno all'origine per $n \to +\infty$.
Le convoluzioni con le funzioni di un nucleo di sommabilità costituiscono una approssimazione dell'operatore identità su $C_0(\mathbb{R}^N)$ e su $L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p < +\infty)$ nel senso espresso dal teorema seguente.

Teorema 2.57. *Sia $\{K_n\}_n$ un nucleo di sommabilità. Allora,*

(a) $f \in C_0(\mathbb{R}^N) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \|K_n * f - f\|_u = 0$;
(b) $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p < +\infty) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \|K_n * f - f\|_p = 0.$

Dimostrazione. Supponiamo senza perdita di generalità che sia $\|f\|_u > 0$ ovvero $\|f\|_p > 0$ a seconda del caso e denotiamo con $C > 0$ una costante tale che

$$\sup_n \|K_n\|_1 \leq C.$$

(a) Le funzioni $K_n * f$ appartengono a $C_0(\mathbb{R}^N)$ (Corollario 2.56). Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, $n \geq 1$ e $r > 0$ si ha

$$\begin{aligned}
|K_n * f(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x)||K_n(y)|\,dy = \\
&= \left(\int_{B_r} + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r}\right) |f(x-y) - f(x)||K_n(y)|\,dy \leq \\
&\leq C \sup_{\|y\|\leq r} |\tau_{-y} f(x) - f(x)| + 2\|f\|_u \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} |K_n|.
\end{aligned}$$

con ovvio significato.

Essendo f uniformemente continua, esiste $r = r(\varepsilon) \in (0,1]$ tale che

$$x_i \in \mathbb{R}^N \ (i = 1,2) \text{ e } \|x_2 - x_1\| \leq r \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$$

e per $(***)$ esiste $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r} |K_n| \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_u}.$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ risulta allora

$$\sup_{\|y\| \leq r} |\tau_{-y} f(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$$

cosicché per $n \geq n_0$ per le disuguaglianze ottenute si ha

$$\begin{aligned}|K_n * f(x) - f(x)| &\leq C \sup_{\|y\| \leq r} |\tau_{-y} f(x) - f(x)| + 2\|f\|_u \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r} |K_n| \leq \\ &\leq C \frac{\varepsilon}{2C} + 2\|f\|_u \frac{\varepsilon}{4\|f\|_u} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

e questo prova l'asserto.

(b) Sia $1 < q \leq +\infty$ l'esponente coniugato di p e sia $g \in L_q(\mathbb{R}^N)$ una funzione con $\|g\|_q \leq 1$. Per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni n si ha

$$\begin{aligned}&\left| \int_{\mathbb{R}^N} [K_n * f(x) - f(x)] \, g(x) \, dx \right| \leq \\ &\qquad \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y) - f(x)| |K_n(y)| \, dy \right) |g(x)| \, dx.\end{aligned}$$

Poiché la funzione

$$(x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto |[f(x - y) - f(x)] K_n(y) g(x)|$$

è misurabile in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ (Esercizio II–5.25), per il teorema di Fubini–Tonelli (Teorema II–5.40) è possibile scambiare l'ordine di integrazione nell'integrale a destra ricavando

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y) \right. & \left. - f(x)| |K_n(y)| \, dy \right) |g(x)| \, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y) - f(x)| |g(x)| \, dx \right) |K_n(y)| \, dy \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \|\tau_{-y} f - f\|_p \|g\|_q |K_n(y)| \, dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \|\tau_{-y} f - f\|_p |K_n(y)| \, dy.\end{aligned}$$

Risulta allora

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} [K_n * f(x) - f(x)] \, g(x) \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \|\tau_{-y} f - f\|_p |K_n(y)| \, dy$$

per ogni $g \in L_q(\mathbb{R}^N)$ con $\|g\|_q \leq 1$ e quindi, passando all'estremo superiore al variare di g, si ottiene

$$\|K_n * f - f\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^N} \|\tau_{-y} f - f\|_p |K_n(y)| \, dy$$

(Proposizione 2.38) cosicché, posto per brevità $B_r = B_r[0]$ con $r > 0$ da fissare, per le proprietà dei nuclei di sommabilità risulta

$$\|K_n * f - f\|_p \leq \left(\int_{B_r} + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r} \right) \|\tau_{-y} f - f\|_p |K_n(y)| \, dy \leq$$

$$\le C \sup_{\|y\|\le r} \|\tau_{-y}f - f\|_p + 2\|f\|_p \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} |K_n|.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, sia $r = r(\varepsilon) > 0$ tale che risulti

$$\|y\| \le r \qquad \Longrightarrow \qquad \|\tau_{-y}f - f\|_p \le \varepsilon/2C$$

(Proposizione 2.35) e sia quindi $n_0 = n_0(\varepsilon) \ge 1$ tale che

$$n \ge n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} |K_n| \le \frac{\varepsilon}{4\|f\|_p}.$$

Si ha allora $\|K_n * f - f\|_p \le \varepsilon$ per $n \ge n_0$ e questo prova l'asserto. □

Sia $K \in L_1(\mathbb{R}^N)$ una funzione tale che

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)\,dx = 1$$

e siano K_t $(t > 0)$ le funzioni riscalate definite da

$$K_t(x) = t^{-N}K(x/t), \qquad x \in \mathbb{R}^N \quad (t > 0).$$

Operando un ovvio cambio di variabili per tali funzioni risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_t(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)\,dx = 1 \qquad \text{e} \qquad \|K_t\|_1 = \|K\|_1$$

per ogni $t > 0$ e

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} |K_t(x)|\,dx = 0$$

per ogni $r > 0$.
La famiglia di funzioni riscalate $\{K_t\}_{t>0}$ verifica quindi le stesse proprietà dei nuclei di sommabilità e per analogia si dice *nucleo di sommabilità associato alla funzione* K. Con le stesse dimostrazioni dei teoremi precedenti si verifica che

- $\lim\limits_{t\to 0^+} K_t * f = f$ in $L_p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p < +\infty)$;
- $\lim\limits_{t\to 0^+} K_t * f = f$ in $C_0(\mathbb{R}^N)$ per ogni $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$.

Se si suppone che il nucleo di sommabilità sia associato ad una funzione K continua e a supporto compatto[3] è possibile provare oltre alla convergenza delle approssimanti di f ad f in $L_p(\mathbb{R}^N)$ anche la convergenza puntuale al rappresentativo preciso f_* di f in tutti i punti di Lebesgue (Sezione II–7.1).

TEOREMA 2.58. *Sia* $\{K_t\}_{t>0}$ *un nucleo di sommabilità associato ad una funzione* $K \in C_c(\mathbb{R}^N)$ *e sia* $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p \le +\infty)$. *Allora,*

(a) $K_t * g(x)$ *è definita da* $(*)$ *con* $T = \varnothing$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^N$ *e* $t > 0$*;*
(b) $\lim\limits_{t\to 0^+} K_t * f(x) = f_*(x)$ *per ogni punto di Lebesgue* $x \in \mathbb{R}^N$ *di* f.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\operatorname{supp}(K) \subset B_R$ $(B_R = B_R[0])$ cosicché risulta $\operatorname{supp}(K_t) \subset B_{Rt}$ per ogni $t > 0$.
(a) Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$ la funzione $y \in \mathbb{R}^N \mapsto f(x-y)K_t(y)$ è nulla al di fuori di B_{Rt}. Risulta quindi

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)K_t(y)|\,dy \le \|K_t\|_u \int_{B_{Rt}[x]} |f| < +\infty$$

poiché $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p \le +\infty)$.

[3] È in effetti sufficiente che sia $K \in L_\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\operatorname{supp}(K)$ compatto.

(b) Essendo x un punto di Lebesgue, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $r_0 = r_0(\varepsilon) > 0$ tale che

$$0 < r \leq r_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{B_r} |f(x-y) - f_*(x)|\, dy \leq \varepsilon^N$$

(Teorema II–7.4). Per $t > 0$ tale che $tR < r_0$ si ha allora

$$\begin{aligned}|K_t * f(x) - f_*(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f_*(x)||K_t(y)|\, dy \leq \\ &\leq \|K\|_u t^{-N} \int_{B_{Rt}} |f(x-y) - f_*(x)|\, dy \leq \\ &\leq \|K\|_u t^{-N} \varepsilon (Rt)^N = \|K\|_u R^N \varepsilon\end{aligned}$$

cosicché risulta

$$\limsup_{t \to 0^+} |K_t f(x) - f_*(x)| \leq \|K\|_u R^N \varepsilon$$

e dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue la tesi. □

Un caso particolarmente significativo della situazione precedente si realizza quando l'approssimazione dell'identità deriva da una funzione K appartenenente a $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Esempio 2.59. Sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ la funzione di classe C^∞ a supporto compatto e radialmente simmetrica definita da

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{1/(\|x\|^2 - 1)} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

(Lemma I–8 in Preliminari). Allora, la funzione

$$K(x) = C_N \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

dove la costante di normalizzazione $C_N > 0$ è scelta in modo che sia

$$\int_{\mathbb{R}^N} K = C_N \omega_N \int_0^1 e^{1/(t^2-1)} t^{N-1}\, dt = 1$$

(Teorema **??**) appartiene a $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e le funzioni riscalate $\{K_t\}_{t>0}$ costituiscono un nucleo di sommabilità.

Con tale scelta di K si ricava la densità di $C_c^\infty(U)$ in $C_0(U)$ (U aperto) e in $L_p(U)$ ($1 \leq p < +\infty$) ed un'altra dimostrazione della versione C^∞ del teorema di Urysohn (Teorema I–2.195).

Teorema 2.60. *Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto (non vuoto). Allora,*

(a) *$C_c^\infty(U)$ è denso in $C_0(U)$;*
(b) *$C_c^\infty(U)$ è denso in $L_p(U)$ per $1 \leq p < +\infty$.*

Questo risultato va confrontato con Teorema 2.2 – (b) e Corollario 2.29.

Dimostrazione. (a) Siano $f \in C_c(U)$ e $\varepsilon > 0$ fissati e sia $\psi \in C_c(U)$ una funzione continua a supporto compatto in U tale che

$$\|\psi - f\|_{u.U} \leq \varepsilon/2$$

(Teorema 2.2 – (b)). La funzione ψ si identifica con una funzione di $C_c(\mathbb{R}^N)$ di uguale norma e, scelto un nucleo di sommabilità $\{K_t\}_{t>0}$ associato ad una funzione $K \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, per $t > 0$ sufficientemente piccolo si ha

$$\|K_t * \psi - \psi\|_{u,\mathbb{R}^N} \leq \varepsilon/2$$

e la funzione $\varphi = K_t * \psi$ appartiene a $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$ (Esercizio 2.25 e Proposizione 2.54 – (b)). Risulta quindi

$$\|\varphi - f\|_{u,U} \leq \|\varphi - \psi\|_{u,U} + \|\psi - f\|_{u,U} =$$

$$= \|K_t * \psi - \psi\|_{u,\mathbb{R}^N} + \|\psi - f\|_{u,U} \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

e questo prova la tesi.

(b) Siano $f \in L_p(U)$ e $\varepsilon > 0$ fissati e sia $K \subset U$ un insieme compatto tale che

$$\int_{U \setminus K} |f|^p \le (\varepsilon/2)^p.$$

Per la funzione $f_\varepsilon = f 1_K$ risulta $f_\varepsilon \in L_p(U)$ con $\operatorname{supp}(f_\varepsilon) \subset K$ cosicchè f_ε si identifica con una funzione di $L_p(\mathbb{R}^N)$ di uguale norma. Scelto un nucleo di sommabilità $\{K_t\}_{t>0}$ associato ad una funzione $K \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, per $t > 0$ sufficientemente piccolo si ha

$$\|K_t * f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{p,\mathbb{R}^N} \le \varepsilon/2$$

e la funzione $\varphi = K_t * f_\varepsilon$ appartiene a $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$ (Esercizio 2.25 e Proposizione 2.54−(b)). Risulta quindi

$$\begin{aligned}\|\varphi - f\|_{p,U} &\le \|K_t * f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{p,U} + \|f_\varepsilon - f\|_{p,U} = \\ &= \|K_t * f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{p,\mathbb{R}^N} + \left(\int_{U\setminus K} |f|^p\right)^{1/p} \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

e questo prova la tesi. □

Teorema 2.61. *Siano $K \subset \mathbb{R}^N$ un insieme compatto e $V \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto tali che $K \subset V$. Allora, esiste una funzione $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (reale) tale che*

$$K \prec \varphi \prec V.$$

Dimostrazione. Sia $0 < \varepsilon < d(K, U^c)/2$ cosicché l'insieme

$$K_\varepsilon = \{x : \, d(x, K) \le \varepsilon\}$$

risulta compatto e tale che $K \subset \operatorname{int}(K_\varepsilon)$ e $K_\varepsilon \subset U$. Sia inoltre $J \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ una funzione con $J \ge 0$ e sia $\{J_t\}_{t>0}$ il relativo nucleo di sommabilità (Esempio 2.59). Allora, le funzioni

$$\varphi = J_t * 1_{K_\varepsilon}, \qquad t > 0,$$

appartengono a $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (Esercizio 2.25 e Proposizione 2.54−(b)) e per $t > 0$ sufficientemente piccolo risulta $\varphi(x) = 1$ per ogni $x \in K$ e $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$. Infine, da $K \ge 0$ segue

$$0 \le \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} 1_{K_\varepsilon}(x-y) J_t(y)\, dy \le \int_{\mathbb{R}^N} J_t = 1$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e questo completa la dimostrazione. □

Concludiamo questa parte provando che la convergenza puntuale al rappresentativo preciso f_* di f nei punti di Lebesgue continua a valere anche nel caso di un nucleo di sommabilità associato ad una funzione $K \in L_1(\mathbb{R}^N)$ che si annulla sufficientemente in fretta all'infinito è nel senso espresso nel teorema seguente.

Teorema 2.62. *Sia $\{K_t\}_{t>0}$ il nucleo di sommabilità associato ad una funzione $K \in L_1(\mathbb{R}^N)$ tale che*

$$|K(x)| \le \frac{C}{(1 + \|x\|)^\alpha}, \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

con $\alpha > N$ e sia $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p \le +\infty)$ una funzione. Allora,

(a) *$K_t * f(x)$ è definita da $(*)$ con $T = \varnothing$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$;*

(b) *per ogni punto di Lebsgue $x \in \mathbb{R}^N$ di f si ha*

$$\lim_{t \to 0^+} K_t * f(x) = f_*(x).$$

DIMOSTRAZIONE. (a) Per $1 \leq q < +\infty$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} |K_t(x)|^q \, dx \leq \omega_N \int_0^{+\infty} \left(\frac{C}{(1+r)^\alpha} \right)^q r^{n-1} dr < +\infty$$

(Teorema **??**) poiché risulta $1 + q\alpha - N \geq 1 + \alpha - N > 1$. Quindi $K_t \in L_q(\mathbb{R}^N)$ per ogni $1 \leq q \leq +\infty$ e $t > 0$ e la conclusione segue dalla disuguaglianza di Hölder (Esercizio 2.24).

(b) Siano $x \in \mathbb{R}^N$ un punto di Lebesgue di f e $f_*(x)$ il rappresentativo preciso di f in x (Teorema II–7.4). Per ogni $t > 0$ e $r > 0$, posto come al solito $B_r = B_r[0]$, si ha

$$\begin{aligned} |K_t * f(x) - f_*(x)| &\leq \left(\int_{B_r} + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r} \right) |f(x-y) - f_*(x)||K_t(y)| \, dy = \\ &= A(r,t) + B(r,t) \end{aligned}$$

con ovvio significato dei simboli.
Essendo x un punto di Lebesgue, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $r_0 = r_0(\varepsilon) > 0$ tale che

$$0 < r \leq r_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{B_r} |f(x-y) - f_*(x)| \, dy \leq \varepsilon r^N$$

e proviamo che per tale r_0 risulta

- $\limsup_{t \to 0^+} A(r_0, t) \leq C\varepsilon$;
- $\lim_{t \to 0^+} B(r_0, t) = 0$;

per $C > 0$ opportuno da cui segue la tesi per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.
Consideriamo dapprima $A(r_0, t)$. Per $0 < t < r_0/2$ fissato, sia $k \geq 1$ definito da

$$2^k < r_0/t \leq 2^{k+1}$$

e rappresentiamo la palla B_{r_0} come unione $B_{r_0} = B_{r_0/2^k} \cup C_1 \cup \cdots \cup C_k$ della palla $B_{r_0/2^k}$ e degli anelli

$$C_h = \left\{ x : \; r_0/2^h < \|x\| \leq r_0/2^{h-1} \right\}, \qquad h = 1, \ldots, k.$$

Sull'anello C_h si ha

$$|K_t(y)| \leq Ct^{-N} |y/t|^{-\alpha} \leq Ct^{\alpha - N} (r_0/2^h)^{-\alpha}$$

per $h = 1, \ldots, k$ mentre sulla palla $B_{r_0/2^k}$ risulta

$$|K_t(y)| \leq Ct^{-N}.$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} A(r_0, t) \leq Ct^{-N} &\int_{B_{r_0/2^k}} |f(x-y) - f_*(x)| \, dy + \\ &+ \sum_{1 \leq h \leq k} Ct^{\alpha-N} \left(\frac{r_0}{2^h} \right)^{-\alpha} \int_{C_h} |f(x-y) - f_*(x)| \, dy \leq \\ &\leq C\varepsilon t^{-N} \left(\frac{r_0}{2^k} \right)^N + \sum_{1 \leq h \leq k} Ct^{\alpha-N} \left(\frac{r_0}{2^h} \right)^{-\alpha} \left(\frac{r_0}{2^{h-1}} \right)^N = \\ &= C\varepsilon 2^N \left\{ \left(\frac{r_0}{t} \right)^N 2^{-(k+1)N} + \left(\frac{t}{r_0} \right)^{\alpha-N} \sum_{1 \leq h \leq k} 2^{h(\alpha-N)} \right\} = \end{aligned}$$

cosicché, essendo $r_0/t \leq 2^{k+1}$ e $t/r_0 < 2^{-k}$ per la scelta di k, risulta

$$\begin{aligned} &= C\varepsilon 2^N \left\{ 1 + 2^{-k(\alpha-N)} \frac{2^{(k+1)(\alpha-N)} - 2^{\alpha-N}}{2^{\alpha-N} - 1} \right\} \leq \\ &\leq C\varepsilon 2^N \left(1 + \frac{2^{\alpha-N}}{2^{\alpha-N} - 1} \right) \end{aligned}$$

e questo prova la prima affermazione.
Per $B(r_0,t)$, sia $1 \le q \le +\infty$ l'esponente coniugato di p. Per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\begin{aligned} B(r_0,t) &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{r_0}} |f(x-y) - f_*(x)||K_t(y)|\,dy \le \\ &\le \|f\|_p \|K_t 1_{\mathbb{R}^N\setminus B_{r_0}}\|_q + |f_*(x)|\|K_t 1_{\mathbb{R}^N\setminus B_{r_0}}\|_1 \end{aligned}$$

e quindi basta provare che risulta

$$\lim_{t\to 0^+} \|K_t 1_{\mathbb{R}^N\setminus B_{r_0}}\|_q = 0$$

per ogni $q \in [1,+\infty]$. Per $q = +\infty$ si ha

$$\|K_t 1_{\mathbb{R}^N\setminus B_{r_0}}\|_\infty \le t^{-N}\frac{C}{(1+r/t)^\alpha} = \frac{C}{r^\alpha}t^{\alpha-N} \to 0^+$$

per $t \to 0^+$ mentre per $1 \le q < +\infty$ risulta

$$\begin{aligned} \|K_t 1_{\mathbb{R}^N\setminus B_{r_0}}\|_q^q &\le C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{r_0}} \frac{t^{-qN}}{(1+\|y\|/t)^{q\alpha}}\,dy = \\ &= C\omega_N \int_{r_0}^{+\infty} \frac{t^{-qN}}{(1+\rho/t)^{q\alpha}}\rho^{N-1}d\rho = \\ &= C\omega_N t^{N(1-q)} \int_{r_0/t}^{+\infty} \frac{s^{N-1}}{(1+s)^{q\alpha}} \le \\ &\le C\omega_N t^{N(1-q)} \int_{r_0/t}^{+\infty} s^{N-1-q\alpha}\,ds = \frac{C\omega_N}{(q\alpha-N)r_0^{q\alpha-N}}t^{q(\alpha-N)} \to 0^+ \end{aligned}$$

per $t \to 0^+$ e questo completa la dimostrazione. □

2.4. Funzioni di distribuzione e spazi L_p deboli

Bla, bla, bla …

Funzioni di distribuzione. Bla, bla, bla …

Spazi L_p deboli. Bla, bla, bla …

Teoremi di interpolazione. Bla, bla, bla …

Esercizi

2.1. Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto ma non compatto. Provate che l'algebra di Banach $C_0(X)$ è priva di unità.

2.2. Siano Ω un insieme (non vuoto) e $f_n \in B(\Omega)$ $(n \ge 1)$ una successione di funzioni limitate. Provate che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) $\displaystyle\sum_{n\ge 1} f_n$ converge incondizionatamente in $B(\Omega)$;

(b) $\displaystyle\sum_{n\ge 1} |f_n|$ converge in $B(\Omega)$.

Lo stesso vale in $C(X)$ (X spazio di Hausdorff compatto) e in $C_0(X)$ (X spazio di Hausdorff localmente compatto).

2.3. Sia $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \, |z| = 1\}$ la circonferenza unitaria di $\mathbb{C}$. Provate che le restrizioni a S^1 dei polinomi complessi $P(\mathbb{C})$ non sono dense in $C(S^1)$.

2.4. Provate che il duale $[C_0(\mathbb{R})]^*$ di $C_0(\mathbb{R})$ non si identifica con $L_1(\mathbb{R})$: esiste un funzionale lineare limitato $L \in [C_0(\mathbb{R})]^*$ che non è della forma

$$L\varphi = \int_{\mathbb{R}} u\varphi, \qquad \varphi \in C_0(\mathbb{R}),$$

per alcuna funzione $u \in L_1(\mathbb{R})$.

2.5. Sia $X = \{a, b\}$ ($a \neq b$) e sia μ la misura positiva su X tale che

$$\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 1/2.$$

Identificate ogni funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ con il punto del piano di coordinate $(f(a), f(b))$ e disegnate la palla

$$B_r = \big\{ f \in L_p(\mu) : \, \|f\|_p \leq r \big\} \qquad (r > 0)$$

al variare di $0 < p \leq +\infty$.

2.6. Siano $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{S}-$misurabile con $\|f\|_\infty > 0$ e siano

$$\varphi(p) = \|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu, \qquad p > 0, \qquad \text{e} \qquad I = \big\{ p > 0 : \, \varphi(p) < +\infty \big\}.$$

Provate che

(a) I è un intervallo:

$$0 < r < p < s \text{ e } r, s \in I \qquad \Longrightarrow \qquad p \in I;$$

(b) $\log\varphi$ è convessa in I e φ è continua in I;

(c) I può essere un qualunque intervallo di $(0, +\infty)$;

(d) se $\|f\|_r < +\infty$ per qualche $0 < r < +\infty$, risulta

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

2.7. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X tale che $\mu(X) = 1$ e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{S}-$misurabile. Provate che

(a) si ha $\|f\|_r \leq \|f\|_s$ per $0 < r \leq s \leq +\infty$;

(b) se risulta $\|f\|_r = \|f\|_s < +\infty$ per qualche $0 < r \leq s \leq +\infty$, si ha $|f(x)| = c > 0$ per $\mu-$q.o. $x \in X$;

(c) se risulta $f(x) \neq 0$ per $\mu-$q.o. $x \in X$ e $0 < \|f\|_r < +\infty$ per qualche $r > 0$, si ha

$$\lim_{p \to 0^+} \|f\|_p = \exp\left(\int_X \log|f| \, d\mu \right)$$

avendo posto $e^{-\infty} = 0$.

2.8. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su una σ−algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X tale che $\mu(X) < +\infty$ e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{S}$−misurabile tale che $0 < \|f\|_\infty < +\infty$. Posto

$$\alpha_n = \int_X |f|^n \, d\mu = \|f\|_n^n, \qquad n \geq 1,$$

provate che risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \|f\|_\infty.$$

2.9. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su una σ−algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{S}$−misurabile tale che

- $f(x) > 0$ per ogni $x \in X$;
- $\displaystyle\int_X f \, d\mu = 1$.

Provate che per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ con $0 < \mu(E) < +\infty$ risulta

(a) $\displaystyle\int_E \log f \, d\mu \leq \mu(E) \log\left(\frac{1}{\mu(E)}\right)$;

(b) $\displaystyle\int_E f^p \, d\mu \leq [\mu(E)]^{1-p}$ per $0 < p < 1$.

2.10. Sia $L([0,1])$ lo spazio vettoriale delle (classi di equivalenza di) funzioni Lebesgue misurabili $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$. Provate che non esiste alcuna topologia $\mathcal{T}$ su $L([0,1])$ che induce la convergenza quasi ovunque in $[0,1]$.

2.11. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su una σ−algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X e per $1 \leq p < +\infty$ siano $f_n \in L_p(\mu)$ $(n \geq 1)$ e $f \in L_p(\mu)$ funzioni tali che $f_n \to f$ μ−quasi ovunque in X per $n \to +\infty$. Provate che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f \text{ in } L_p(\mu) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

2.12. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su una σ−algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X. Provate la seguente versione L_p $(1 \leq p < +\infty)$ del teorema di convergenza di Vitali (Teorema II–2.47): se $f_n \in L_p(\mu)$ $(n \geq 1)$ e $f \in L(\mu)$ sono funzioni tali che $f_n \to f$ μ−quasi ovunque in X per $n \to +\infty$, si ha

$$f_n \to f \text{ in } L_p(\mu) \text{ per } n \to +\infty$$

se e solo se

- per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $E_\varepsilon \in \mathcal{S}$ con $\mu(E_\varepsilon) < +\infty$ tale che
$$\sup_{n\geq 1} \int_{X\setminus E_\varepsilon} |f_n|^p \, d\mu \leq \varepsilon;$$
- per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che
$$E \in \mathcal{S} \text{ e } \mu(E) \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{n\geq 1} \int_E |f_n|^p \, d\mu \leq \varepsilon.$$

2.13. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su una σ−algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X e siano $1 \leq p < q < r \leq +\infty$. Provate che

(a) $L_p(\mu) \cap L_r(\mu)$ è uno spazio di Banach con la norma

$$\|f\|_{L_p \cap L_r} = \|f\|_p + \|f\|_r, \qquad f \in L_p(\mu) \cap L_r(\mu),$$

e che risulta $L_p(\mu) \cap L_r(\mu) \hookrightarrow L_q(\mu)$;

(b) $L_p(\mu) + L_r(\mu)$ è uno spazio di Banach con la norma

$$\|f\|_{L_p + L_r} = \inf\left\{\|g\|_p + \|h\|_r : \ f = g + h \text{ con } g \in L_p(\mu) \text{ e } h \in L_r(\mu)\right\},$$

per ogni $f \in L_p(\mu) + L_r(\mu)$ e che risulta $L_q(\mu) \hookrightarrow L_p(\mu) \cap L_r(\mu)$.

Confrontate (a) con Esercizio 1.6.

2.14. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X e siano $1 \le p < q < +\infty$. Provate che

(a) $L_p(\mu) \setminus L_q(\mu) \neq \varnothing$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $E_\varepsilon \in \mathcal{S}$ con $0 < \mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$;

(b) $L_q(\mu) \setminus L_p(\mu) \neq \varnothing$ se e solo se per ogni $t > 0$ esiste $E_t \in \mathcal{S}$ con $t < \mu(E_t) < +\infty$.

2.15. Sia I un insieme (non vuoto) e siano $1 \le p \le q \le +\infty$. Provate che risulta

(a) $\ell_p(I) \subset \ell_q(I)$;

(b) $\|x\|_q \le \|x\|_p$ per ogni $x \in \ell_p(I)$.

2.16. Provate che $L_2([0,1])$ è di prima categoria in $L_1([0,1])$. Vale lo stesso anche per $L_p(0,1])$ e $L_q([0,1])$ con $p < q$?

2.17. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva semifinita su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X tale che esistono insiemi $A, B_i \in \mathcal{S}$ $(i = 1, 2)$ con le seguenti proprietàs:

- $A \cap B_i = \varnothing$ $(i = 1, 2)$ e $B_1 \cap B_2 = \varnothing$;
- $\mu(A) > 0$ e $\mu(B_i) > 0$ $(i = 1, 2)$.

Costruite un funzionale lineare limitato definito su un sottospazio di $L_1(\mu)$ che ammetta due (e quindi infinite) estensioni di eguale norma a tutto $L_1(\mu)$.

2.18. Sia U un insieme aperto di $\mathbb{R}^N$. Provate che

(a) $L_\infty(U)$ non è separabile;

(b) $C(U) \cap L_\infty(U)$ non è denso in $L_\infty(U)$.

2.19. Per $1 < p < +\infty$ costruite un sottoinsieme chiuso e non vuoto F di $L_p([0,1])$ che non contiene alcun elemento di norma minima:

$$u \in F \qquad \Longrightarrow \qquad \|u\|_p > \inf\left\{\|v\|_p : \ v \in F\right\}.$$

2.20. Costruite una misura positiva $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X e una funzione $g \in L_\infty(\mu)$ tale che risulti

- $\|g\|_\infty = 1$;
- $\displaystyle\int_X gf \, d\mu = 0$ per ogni $f \in L_1(\mu)$.

2.21. Sia I un insieme infinito e non numerabile. Provate che il duale di $\ell_1(I)$ è isometricamente isomorfo a $\ell_\infty(I)$: per ogni funzionale lineare limitato $L \in [\ell_1(I)]^*$ esiste $y \in \ell_\infty$ tale che

$$Lx = \sum_{i\in I} y(i)x(i), \qquad x \in \ell_1(I),$$

con $\|L\| = \|y\|_\infty$.

2.22. Provate che il duale $[L_\infty(\mathbb{R})]^*$ non si identifica con $L_1(\mathbb{R})$: esiste un funzionale lineare limitato $L \in [L_\infty(\mathbb{R})]^*$ che non è della forma

$$Lv = \int_{\mathbb{R}} uv, \qquad v \in L_\infty(\mathbb{R}),$$

per alcuna funzione $u \in L_1(\mathbb{R})$.

2.23. Siano $\mu\colon \mathcal{S} \to [0 + \infty]$ una misura positiva semifinita su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X e $L(\mu)$ lo spazio delle (classi di equivalenza di) funzioni $\mathcal{S}-$misurabili $u\colon X \to \mathbb{C}$. Fissata una funzione $u \in L(\mu)$ e $1 \le p < +\infty$, provate che

(a) $uv \in L_p(\mu)$ per ogni $v \in L_p(\mu) \quad\Longrightarrow\quad u \in L_\infty(\mu)$;

Denotato quindi con $M_u \in \mathcal{L}(L(\mu))$ l'operatore lineare di moltiplicazione per u definito da

$$M_u v = uv, \qquad v \in L(\mu),$$

provate inoltre che[4]

(b) $u \in L_\infty(\mu) \quad\Longrightarrow\quad M_u \in \mathrm{L}(L_p(\mu))$ e $\|M_u\| = \|u\|_\infty$;

(c) le affermazioni seguenti sono equivalenti:
- M_u è suriettivo su $L_p(\mu)$;
- M_u è un isomorfismo di $L_p(\mu)$ su se stesso;
- $|u(x)| \ge c > 0$ per $\mu-$q.o. $x \in X$ per qualche $c > 0$.

2.24. Siano $1 \le p, q \le +\infty$ esponenti coniugati e siano $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L_q(\mathbb{R}^N)$. Provate che

(a) la convoluzione $f * g$ è ben definita da

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$;

(b) $f * g$ è limitata e uniformemente continua e si ha

$$\|f * g\|_u \le \|f\|_p \|g\|_q;$$

(c) se $1 < p, q < +\infty$ si ha $f * g \in C_0(\mathbb{R}^N)$.

2.25. Siano $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in C_b^k(\mathbb{R}^N)$ $(k \ge 1)$. Provate che $f * g \in C_b^k(\mathbb{R}^N)$ e

$$\partial_\alpha(f * g) = f * (\partial_\alpha g), \qquad |\alpha| \le k.$$

2.26. Sia $f \in L_1(\mathbb{R}^N)$ e sia $G \subset L_p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p < +\infty)$ un insieme chiuso e limitato tale che, posto $B_R = B_R[0]$ per $R > 0$, si ha

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{B_R^c} |g|^p = 0 \qquad \forall\, R > 0$$

[4] L'implicazione (b) con la sola disuguaglianza $\|M_u\| \le \|u\|_\infty$ vale anche se μ non è semifinita.

uniformemente rispetto a $g \in G$. Provate che l'insieme

$$f * G = \{f * g : \ g \in G\}$$

è compatto in $L_p(\mathbb{R}^N)$.

2.27. Sia $\{K_n\}_n$ un nucleo di sommabilità e sia $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$ una funzione continua e limitata. Provate che

(a) $K_n * f \to f$ uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^N$ per $n \to +\infty$;
(b) se f è uniformemente continua, $K_n * f \to f$ uniformemente in $\mathbb{R}^N$ per $n \to +\infty$.

CAPITOLO 3

Spazi di Hilbert

Esaminiamo in questo capitolo gli spazi di Banach la cui norma origina da un prodotto scalare. La presenza di un prodotto scalare consente di definire una nozione di ortogonalità e conseguentemente di sviluppare una ricca geometria che rende questi spazi la naturale generalizzazione in dimensione infinita degli spazi euclidei. Di questi spazi e delle operazioni lineari tra di essi esaminiamo le principali proprietà con particolare riferimento alla forma che assume in questo caso la teoria di Fredholm ed alla teoria spettrale.
In tutto questo capitolo conveniamo di denotare con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ il campo dei numeri complessi o reali.

3.1. Spazi di Hilbert

Introduciamo in questa sezione la nozione di spazio di Hilbert e ne esaminiamo le principali proprietà.

Prodotti scalari e spazi di Hilbert. Sia X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Una funzione $\langle \cdot , \cdot \rangle \colon X \times X \to \mathbb{K}$ con le seguenti proprietà:

(PS1) $\langle x \,|\, y + z \rangle = \langle x \,|\, y \rangle + \langle x \,|\, z \rangle \quad \forall\, x , y , z \in X$;
(PS2) $\langle x \,|\, \lambda y \rangle = \lambda \langle x \,|\, y \rangle \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall\, x , y \in X$;
(PS3) $\langle x \,|\, y \rangle = \langle y \,|\, x \rangle^* \quad \forall\, x , y \in X$;
(PS4) $\langle x \,|\, x \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in X$;
(PS5) $\langle x \,|\, x \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$;

si dice *prodotto scalare* o *prodotto interno in X*.
Nel caso complesso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, da (PS1), (PS2) e (PS3) segue che il prodotto scalare è antilineare nella prima variabile ovvero risulta

$$\langle \lambda x + \mu y \,|\, z \rangle = \lambda^* \langle x \,|\, z \rangle + \mu^* \langle y \,|\, z \rangle, \qquad x , y , z \in X, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

e da (PS3) segue che $\langle x \,|\, x \rangle \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in X$. Se invece $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il prodotto scalare risulta lineare anche nella prima variabile e (PS3) si riduce a richiedere che esso sia simmetrico ovvero si abbia $\langle x \,|\, y \rangle = \langle y \,|\, x \rangle$ per ogni $x , y \in X$. Nel linguaggio dell'algebra lineare, il prodotto scalare è quindi una forma sesquilineare, hermitiana e definita positiva nel caso complesso ovvero una forma bilineare, simmetrica e definita positiva nel caso reale.
Ogni prodotto scalare induce in modo canonico una norma sullo spazio vettoriale.

Teorema 3.1. *Siano X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ un prodotto scalare in X. Allora,*

(a) *risulta*

$$|\langle x \,|\, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle \langle y \,|\, y \rangle}, \qquad x , y \in X;$$

(b) *la funzione*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x\,|\,x\rangle}, \qquad x \in X,$$

è una norma in X tale che

$$(*) \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \qquad x\,,y \in X.$$

La norma in X definita in (b) si dice *norma indotta dal prodotto scalare* e con tale norma la disuguaglianza in (a) diviene

$$|\langle x\,,y\rangle| \le \|x\|\|y\|, \qquad x\,,y \in X,$$

e prende il nome di *disuguaglianza di Cauchy–Schwarz* mentre l'uguaglianza $(*)$ è la cosidetta *identità del parallelogramma*.

Dimostrazione. (a) Sia $\langle x\,|\,y\rangle \neq 0$ altrimenti non c'è nulla da provare. Si ha

$$0 \le \langle x+\lambda y\,|\,x+\lambda y\rangle = \langle y\,|\,y\rangle|\lambda|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x\,|\,y\rangle\lambda) + \langle x\,|\,x\rangle$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e, scegliendo

$$\lambda = \frac{\langle x\,|\,y\rangle^*}{|\langle x\,|\,y\rangle|}t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

risulta

$$0 \le \langle y\,|\,y\rangle t^2 + 2|\langle x\,|\,y\rangle|t + \langle x\,|\,x\rangle, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Essendo $y \neq 0$ poiché $\langle x\,|\,y\rangle \neq 0$, deve essere

$$0 \ge \Delta/4 = |\langle x\,|\,y\rangle|^2 - \langle x\,|\,x\rangle\langle y\,|\,y\rangle$$

e questo prova la tesi.

(b) La validità degli assiomi (N1) ed (N2) della definizione di norma è ovvia. Inoltre, in conseguenza di (a) per $x\,,y \in X$ si ha

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x\,|\,y\rangle) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$$

e questo prova (N3). Questo prova che $\|\cdot\|$ è una norma in X e infine la validità di $(*)$ si riduce ad una semplice verifca. □

Ogni spazio vettoriale munito di un prodotto scalare è dunque uno spazio normato con la norma indotta dal prodotto scalare e rispetto alla topologia indotta da tale norma la funzione $L_y\colon X \to \mathbb{K}$ definita da

$$(**) \qquad L_y x = \langle y\,|\,x\rangle, \qquad x \in X,$$

è un funzionale lineare continuo per qualunque scelta di $y \in X$. Inoltre, si ha $\|L_y\| \le \|y\|$ per ogni y per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz e $L_y(y/\|y\|) = \|y\|$ per $y \neq 0$ da cui segue

$$\|L_y\| = \|y\|$$

per ogni $y \in X$.

Definizione 3.2. Uno spazio vettoriale H sul campo $\mathbb{K}$ munito di un prodotto scalare $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle\colon H \times H \to \mathbb{K}$ che risulta essere uno spazio di Banach rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare si dice *spazio di Hilbert*. □

Esempio 3.3. Esaminiamo alcuni esempi elementari di spazi di Hilbert.

(a) Lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ è uno spazio di Hilbert complesso rispetto al prodotto scalare definito da

$$\langle x\,|\,y\rangle = \sum_{1\le m\le n} (x^m)^* y^m, \qquad x = (x^1, \ldots, x^n)\,, y = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{C}^n.$$

Analogamente, lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è uno spazio di Hilbert reale rispetto al medesimo prodotto scalare ristretto ad $\mathbb{R}^n$.

(b) Sia μ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X. Lo spazio $L_2(\mu)$ delle (classi di equivalenza di) funzioni $\mathcal{S}-$misurabili a quadrato sommabili è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare definito da

$$\langle f\,|\,g\rangle = \int_X f^* g\,d\mu, \qquad f\,,g \in L_2(\mu). \qquad \square$$

Non tutte le norme tuttavia derivano da un prodotto scalare e l'uguaglianza del parallelogrammo le caratterizza completamente.

Teorema 3.4. *Siano X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e $\|\cdot\|$ una norma in X. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *esiste un prodotto scalare $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ in X che induce la norma $\|\cdot\|$ in X;*
(b) *per la norma $\|\cdot\|$ vale l'identità del parallelogrammo $(*)$;*

e in tal caso per ogni $x\,,y \in X$ risulta

$$\langle x\,|\,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|y+ix\|^2 - \|y-ix\|^2\right), \qquad \textit{se } \mathbb{K}=\mathbb{C};$$
$$\langle x\,|\,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2\right), \qquad \textit{se } \mathbb{K}=\mathbb{R}.$$

Le formule precedenti che esprimono il prodotto scalare in funzione della norma prendono il nome di *formule di polarizzazione.*

Dimostrazione. Occorre provare solo che (b) implica (a). Sia dapprima $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Definiamo

$$B(x\,,y) = \frac{1}{4}\left(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|y+ix\|^2 - \|y-ix\|^2\right), \qquad x\,,y \in X,$$

e verifichiamo che B è un prodotto scalare su X che induce la norma $\|\cdot\|$ di X. Si verifica facilmente che risulta $B(x\,,x) = \|x\|^2$ e $B(x\,,y) = [B(y\,,x)]^*$ per ogni $x\,,y \in X$. Proviamo che B è additivo nella seconda variabile cioè risulta

$$B(x\,,y+z) = B(x\,,y) + B(x\,,z), \qquad x\,,y\,,z \in X.$$

Per ogni $u\,,v\,,w \in X$, per l'identità del parallelogramma si ha

$$\|(v+u)+w\|^2 + \|(v+u)-w\|^2 = 2\|v+u\|^2 + 2\|w\|^2$$
$$\|(v-u)+w\|^2 + \|(v-u)-w\|^2 = 2\|v-u\|^2 + 2\|w\|^2$$

da cui segue, sottraendo la seconda uguaglianza dalla prima,

$$\begin{aligned}\left(\|(v+w)+u\|^2 - \|(v+w)-u\|^2\right) + \left(\|(v-w)+u\|^2 - \|(v-w)-u\|^2\right) &= \\ = 2\|v+u\|^2 - 2\|v-u\|^2.&\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\operatorname{Re}(B(u\,,v+w)) + \operatorname{Re}(B(u\,,v-w)) = 2\operatorname{Re}(B(u\,,v))$$

e in maniera analoga si prova che risulta

$$\operatorname{Im}(B(u\,,v+w)) + \operatorname{Im}(B(u\,,v-w)) = 2\operatorname{Im}(B(u\,,v)).$$

Risulta pertanto

$$B(u\,,v+w) + B(u\,,v-w) = 2B(u\,,v)$$

per ogni ogni u, v e w cosicché, scegliendo $v=w$, risulta

$$B(u\,,2v) = 2B(u\,,v)$$

per ogni u e v. Prendendo $u=x$ e $v+w=y$, $v-w=z$ risulta infine

$$B(x\,,y) + B(x\,,z) = 2B\left(x\,,\frac{y+z}{2}\right) = B(x\,,y+z), \qquad x\,,y\,,z \in X.$$

Proviamo quindi che risulta $B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y)$ per ogni $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Si ha infatti $B(x, -y) = -B(x, y)$ per ogni $x, y \in X$ cosicché per l'additività di B nella seconda variabile si ha

$$B(x, my) = mB(x, y),$$

per $m \in \mathbb{Z}$ e $x, y \in X$ da cui segue per $q = m/n \in \mathbb{Q}$ ($m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}_+$)

$$B(x, my/n) = mB(x, y/n) = (m/n) \cdot nB(x, y/n) = (m/n)B(x, y).$$

Poiché la funzione $y \in X \mapsto B(x, y)$ è continua per ogni x, si ha

$$\lim_{q \to \lambda} B(x, qy) = B(x, \lambda y), \qquad x, y \in X, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

e da $B(x, qy) = qB(x, y)$ per ogni x e y e per ogni $q \in \mathbb{Q}$ segue $B(x, \lambda y) = \lambda B(x, y)$ per ogni x e y e $\lambda \in \mathbb{R}$. Si verifica infine facilmente che risulta $B(x, iy) = iB(x, y)$ per ogni x e y cosicché si ha

$$B(x, \lambda y) = \lambda B(x, y), \qquad x, y \in X, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

e questo completa la dimostrazione nel caso complesso.
Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si considera

$$B(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2\right), \qquad x, y \in X,$$

e si verifica in maniera analoga che B è un prodotto scalare su X che induce la norma $\|\cdot\|$ di X. □

Esempio 3.5. Le norme $\|\cdot\|_p$ in $\mathbb{K}^N$ ($p \neq 2$ e $N \geq 2$) (Esempio 1.2−(a)) non sono indotte da alcun prodotto scalare.
Siano infatti $e_n \in \mathbb{K}^N$ ($n = 1, \ldots, N$) i vettori della base canonica di $\mathbb{K}^N$. Per $1 \leq p < +\infty$ e $m \neq n$ si ha $\|e_m \pm e_n\|_p = 2^{1/p}$ e $\|e_m\|_p = \|e_n\|_p = 1$. L'identità del parallelogramma per i vettori e_m ed e_n con $m \neq n$ diviene allora

$$2^{2/p} + 2^{2/p} = 4$$

e l'uguaglianza vale solo per $p = 2$. Analogamente, per $p = +\infty$ e $m \neq n$ si ha $\|e_m \pm e_n\|_\infty = 1$ e $\|e_m\|_\infty = \|e_n\|_\infty = 1$ ed anche in questo caso per i vettori e_m ed e_n con $m \neq n$ non vale l'identità del parallelogramma. □

A meno di casi banali, anche lo spazio di Banach delle funzioni continue su uno spazio di Hausdorff compatto e gli spazi L_p per $p \neq 2$ non sono spazi di Hilbert (Esercizi 3.1 e 3.2).

Teorema 3.6. *Sia H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$. Allora, H è uniformemente convesso.*

Conseguentemente ogni spazio di Hilbert è riflessivo per il teorema di Milman–Pettis (Teorema 1.75). Vedremo successivamente (Corollario 3.14) una dimostrazione alternativa della riflessività degli spazi di Hilbert che non utilizza il teorema di Milman–Pettis.

Dimostrazione. Siano $x, y \in H$ tali che sia $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geq \varepsilon$ con $0 < \varepsilon < 2$. Allora, per l'identità del parallelogramma si ha

$$\frac{\|x + y\|^2}{2} \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

e quindi per tali x e y si ha

$$\frac{\|x + y\|^2}{2} \leq 1 - \delta \qquad \text{con} \qquad \delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}.$$ □

Ortogonalità. L'esistenza di un prodotto scalare in uno spazio vettoriale consente di definire una nozione di perpendicolarità e conseguentemente di sviluppare una geometria nello spazio vettoriale.
Sia X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ munito di un prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Due vettori $x, y \in X$ tali che

$$\langle x | y \rangle = 0$$

si dicono *ortogonali* o *perpendicolari* ed in tal caso si scrive

$$x \perp y.$$

La relazione di ortogonalità è simmetrica ma non è né transitiva né riflessiva. Se A e B sono insiemi (non vuoti) di X tali che $x \perp y$ per ogni $x \in A$ e $y \in B$, si pone $A \perp B$ e l'insieme

$$A^{\perp} = \big\{x \in X :\ x \perp a \text{ per ogni } a \in A\big\}$$

formato dai vettori che sono ortogonali a tutti i vettori di A si dice *complemento ortogonale di* A ed è consuetudine scrivere brevemente $x_0^{\perp}$ quando $A = \{x_0\}$ ($x_0 \in X$). Chiaramente, il complemento ortogonale $A^{\perp}$ di A è un sottospazio di X e risulta

$$A^{\perp} = \big(\mathrm{span}(A)\big)^{\perp},$$

per ogni insieme $A \subset X$ (non vuoto). Alla luce di questa osservazione, nel seguito considereremo esclusivamente complementi ortogonali di sottospazi e ne riassumiamo le proprietà elementari nel risultato seguente.

Proposizione 3.7. *Siano X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ con prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle$ e $M \subset X$ un sottospazio. Allora,*

(a) *$M^{\perp}$ è un sottospazio chiuso;*
(b) *$[\mathrm{cl}(M)]^{\perp} = M^{\perp}$;*
(c) *$\mathrm{cl}(M) \subset (M^{\perp})^{\perp}$.*

Vedremo successivamente (Corollario 3.12) che in (c) vale in effetti l'uguaglianza.

Dimostrazione. (a) Sia $L_y \in X^*$ il funzionale lineare limitato definito da (∗∗) ($y \in X$). Si ha

$$M^{\perp} = \bigcap \big\{\ker(L_y) :\ y \in M\big\}$$

e la conclusione segue da Teorema 1.17.
(b) Da $M \subset \mathrm{cl}(M)$ segue $[\mathrm{cl}(M)]^{\perp} \subset M^{\perp}$. Viceversa, sia $x \in M^{\perp}$ e sia $y \in \mathrm{cl}(M)$ cosicché esiste una successione $\{y_n\}_n$ tale che $y_n \in M$ per ogni n e $y_n \to y$ per $n \to +\infty$. Si ha allora

$$\langle x | y \rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x | y_n \rangle = 0$$

per continuità e da ciò segue $x \in [\mathrm{cl}(M)]^{\perp}$ ovvero $M^{\perp} \subset [\mathrm{cl}(M)]^{\perp}$.
(c) Il sottospazio $(M^{\perp})^{\perp}$ è chiuso e contiene M. □

La proprietà fondamentale degli spazi di Hilbert che è alla base delle proprietà di questi spazi è la seguente proprietà di proiezione sugli insiemi chiusi e convessi.

Teorema 3.8. *Siano H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$ e $C \subset H$ un insieme chiuso e convesso (non vuoto). Allora, per ogni $x \in H$ esiste uno ed un solo punto $x_C \in C$ tale che*

$$\|x_C - x\| = \min_{y\in C} \|y - x\|.$$

Il punto x_C è quindi il punto di C che si trova a distanza minima da x e prende il nome di *proiezione di x su C*.

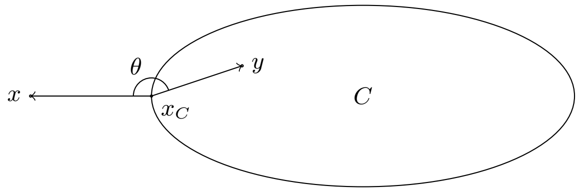

FIGURA 3.1. Il punto di minima distanza x_C di x da C e l'angolo θ formato dai vettori $x - x_C$ e $y - x_C$ (spazio di Hilbert reale).

DIMOSTRAZIONE. Per $x \in C$ si pone $x_C = x$. Per $x \notin C$, sia

$$d = \inf_{y \in C} \|y - x\|$$

e sia $\{y_n\}_n$ una successione tale che $y_n \in C$ per ogni n e $\|y_n - x\| \to d$ per $n \to +\infty$. Poiché $(y_m + y_n)/2 \in C$ per ogni m e n per l'ipotesi di convessità di C, risulta allora $\|(y_0 + y_1)/2 - x\| \geq d$ e per l'identità del parallelogramma applicata ai vettori $y_m - x$ e $y_n - x$ si ha

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 = \\ &= 2\left(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2\right) - 4\left\|\frac{y_m + y_n}{2} - x\right\|^2 \leq \\ &\leq 2\left(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2\right) - 4d^2\end{aligned}$$

per ogni m e n. La successione $\{y_n\}_n$ è quindi una successione di Cauchy cosicché esiste $y_0 \in H$ tale che $y_n \to y_0$ per $n \to +\infty$. Risulta allora $y_0 \in C$ poiché C è chiuso e $\|y_0 - x\| = d$ per continuità.
Supponiamo ora che esista un altro punto $y_1 \in C$ oltre a y_0 tale che sia $\|y_1 - x\| = d$. Da $(y_0 + y_1)/2 \in C$ segue allora $\|(y_0 + y_1)/2 - x\| \geq d$ e come prima per l'identità del parallelogramma si ha

$$\|y_1 - y_0\|^2 = 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_0 - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_0 + y_1}{2} - x\right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0$$

da cui segue $y_0 = y_1$. Pertanto, posto $x_C = y_0$ si ha la tesi. □

Nelle ipotesi del teorema precedente la funzione $p_C \colon H \to H$ definita da

$$p_C(x) = x_C, \qquad x \in H,$$

è la *proiezione su* C. Essa risulta essere una funzione lipschitziana di costante uno come prova il risultato seguente.

TEOREMA 3.9. *Siano H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$, $C \subset H$ un insieme chiuso e convesso (non vuoto) e $p_C \colon H \to H$ la proiezione su C. Allora,*

(a) $\operatorname{Re}\langle x - p_C(x) \,|\, y - p_C(x)\rangle \leq 0,$ $\qquad x \in H$ *e* $y \in C$;

(b) $\|p_C(y) - p_C(x)\| \leq \|y - x\|$ $\qquad x, y \in H$.

Nel caso particolare di uno spazio di Hilbert reale, la disuguaglianza (a) diviene

$$\langle x - p_C(x) \,|\, y - p_C(x)\rangle \leq 0, \qquad x \in H \text{ e } y \in C,$$

ed acquista un chiaro significato geometrico: l'angolo θ formato dai due vettori $x - p_C(x)$ e $y - p_C(x)$ risulta essere ottuso per ogni $y \in C$ (Figura 3.1 − (a)).

DIMOSTRAZIONE. (a) Siano $x \in H$ e $y \in C$. La funzione $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(t) = \|x - [ty + (1-t)p_C(x)]\|^2, \qquad t \in \mathbb{R},$$

è un polinomio di secondo grado nella variabile t e quindi è derivabile. Risulta inoltre $\varphi(t) \geq \varphi(0)$ per ogni $t \in [0,1]$ e quindi deve essere $\varphi'(0) \geq 0$. Calcolando $\varphi'(0)$ si ricava la tesi.

(b) Siano $x, y \in H$. Da $p_C(x), p_C(y) \in C$ e da (a) segue allora

$$\operatorname{Re}\langle x - p_C(x) \,|\, p_C(y) - p_C(x)\rangle \leq 0$$
$$\operatorname{Re}\langle y - p_C(y) \,|\, p_C(x) - p_C(y)\rangle \leq 0$$

cosicché, sommando tra loro le due disuguaglianze, si trova

$$\|p_C(y) - p_C(x)\|^2 - \operatorname{Re}\langle y - x \,|\, p_C(y) - p_C(x)\rangle \leq 0.$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz segue quindi

$$\|p_C(y) - p_C(x)\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle y - x \,|\, p_C(y) - p_C(x)\rangle \leq \|y - x\| \cdot \|p_C(y) - p_C(x)\|$$

e semplificando si trova (b). □

Esaminiamo ora le conseguenze del teorema di proiezione. In primo luogo ogni spazio di Hilbert si ottiene come somma diretta di un sottospazio chiuso e del suo complemento ortogonale.

TEOREMA 3.10. *Siano H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$ e $M \subset H$ un sottospazio chiuso. Allora, per ogni $x \in H$ si ha*

$$x = x_M + x_{M^\perp}$$

ove x_M e $x_{M^\perp}$ sono le proiezioni di x su M e $M^\perp$ rispettivamente e tale decomposizione è unica.

DIMOSTRAZIONE. Sia $x_M \in M$ il punto di M a distanza minima da x. Per $y \in M$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ risulta $x_M + \lambda y \in M$ e da ciò segue

$$\|x - x_M\|^2 \leq \|x - x_M - \lambda y\|^2 = \|x - x_M\|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda\langle x - x_M \,|\, y\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2$$

che implica

$$2\operatorname{Re}(\lambda\langle x - x_M \,|\, y\rangle) - |\lambda|^2\|y\|^2 \leq 0.$$

Scegliendo $\lambda = \varepsilon > 0$, dividendo per ε e facendo tendere $\varepsilon \to 0^+$ si conclude che deve essere

$$\operatorname{Re}\langle x - x_M \,|\, y\rangle \leq 0$$

per ogni $y \in M$. Scegliendo poi $\lambda = -i\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ e procedendo come prima risulta

$$\operatorname{Im}\langle x - x_M \,|\, y\rangle \leq 0.$$

Ripetendo gli stessi calcoli con $-y \in M$ si conclude che deve essere $\langle x - x_M \,|\, y\rangle = 0$ per ogni $y \in M$ da cui segue $z = x - x_M \in M^\perp$. Abbiamo così provato che risulta $x = x_M + (x - x_M)$ con $(x - x_M) \in M^\perp$ e ripetendo poi le stesse considerazioni con $M^\perp$ in luogo di M risulta $x = x_{M^\perp} + (x - x_{M^\perp})$ con $(x - x_{M^\perp}) \in (M^\perp)^\perp$. Da $M \subset (M^\perp)^\perp$ e da $M^\perp \cap (M^\perp)^\perp = \{0\}$ segue che deve essere $x = x_M + x_{M^\perp}$. Infine, come già osservato, l'unicità della decomposizione segue da $M \cap M^\perp = \{0\}$ e questo completa la dimostrazione. □

COROLLARIO 3.11. *Siano H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$ e $M \subset H$ un sottospazio chiuso. Allora,*

$$H = M \oplus M^\perp.$$

In particolare, se $M \subset H$ è un sottospazio chiuso tale che $M \neq H$, esiste $z \in M^\perp$ con $z \neq 0$.

COROLLARIO 3.12. *Siano H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$ e $M \subset H$ un sottospazio. Allora,*

$$(M^\perp)^\perp = \operatorname{cl}(M).$$

Dimostrazione. Si ha $\mathrm{cl}(M) \subset (M^\perp)^\perp$ (Proposizione 3.7 – (c)). Poiché $(M^\perp)^\perp$ è un sottospazio chiuso contenente M, le chiusure di M in H e in $(M^\perp)^\perp$ coincidono. Se fosse $\mathrm{cl}(M) \neq (M^\perp)^\perp$, per il corollario precedente esisterebbe $u \in (M^\perp)^\perp$ appartenente a $[\mathrm{cl}(M)]^\perp = M^\perp$ con $u \neq 0$ e ciò è assurdo. $\square$

L'altra importante conseguenza della proprietà di proiezione sugli insiemi chiusi e convessi è il seguente celebre *teorema di rappresentazione di Riesz* che identifica il duale degli spazi di Hilbert con lo spazio di Hilbert stesso tramite il prodottoo scalare.

Teorema 3.13 (F. Riesz). *Siano H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$ e $L \in H^*$ un funzionale lineare continuo. Allora, esiste uno ed un solo $y_L \in H$ tale che*

$$Lx = \langle y_L \,|\, x \rangle, \qquad x \in H.$$

Inoltre, risulta $\|L\| = \|y_L\|$.

Dimostrazione. Se $Lx = 0$ per ogni x, poniamo $y_L = 0$. Altrimenti, il nucleo $M = \ker(L)$ di L è un sottospazio chiuso tale che $M \neq H$ e quindi esiste $z \in M^\perp$ con $\|z\| = 1$. Posto allora

$$u = (Lx)z - (Lz)x,$$

risulta $Lu = 0$ cioè $u \in M$. Da $z \in M^\perp$ segue allora

$$0 = \langle z \,|\, u \rangle = Lx - (Lz)\langle z \,|\, x \rangle$$

e quindi, posto $y_L = (Lz)^* z$, risulta $Lx = \langle y_L \,|\, x \rangle$ per ogni $x \in H$.
Infine, risulta $L = L_{y_L}$ da cui segue $\|L\| = \|y_L\|$ e questo prova l'unicità di y_L. $\square$

In conseguenza del teorema di Riesz, denotato con $L_y \in H^*$ il funzionale lineare continuo definito da $(**)$, la funzione

$$y \in H \mapsto L_y \in H^*$$

risulta essere un isomorfismo isometrico e antilineare di H su H^*. In particolare si ha

$$L_{\lambda x + \mu y} = \lambda^* L_x + \mu^* L_y$$

per ogni $x, y \in H$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Dal teorema di Riesz si deduce anche la riflessività degli spazi di Hilbert in maniera indipendente dal teorema di Milman–Pettis (Teorema 1.75).

Corollario 3.14. *Sia H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$. Allora, H è riflessivo.*

Dimostrazione. Per ogni $L \in H^*$, sia y_L l'elemento di H che rappresenta L mediante il prodotto scalare (Teorema 3.13).
Il duale H^* di H è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare definito da

$$\langle L_1 \,|\, L_2 \rangle_* = \langle y_{L_2} \,|\, y_{L_1} \rangle, \qquad L_i \in H^* \quad (i = 1, 2).$$

In particolare risulta

$$\|L\|^2 = \|y_L\|^2 = \langle y_L \,|\, y_L \rangle = \langle L \,|\, L \rangle_*, \qquad L \in H^*,$$

e quindi la norma di H^* è precisamente la norma indotta dal prodotto scalare $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_*$ definito su H^*.
È conveniente in questa dimostrazione utilizzare le notazioni di Sezione 1.4 per indicare la dualità tra H e H^* e tra H^* e H^{**}.
Consideriamo dunque gli isomorfismi isometrici, antilineari e suriettivi $\Phi \colon H \to H^*$ di H su H^* e $\Psi \colon H^* \to H^{**}$ di H^* su H^{**} definiti da

$$\langle \Phi x, y \rangle = \langle x \,|\, y \rangle, \qquad y \in H; \qquad\qquad \langle \Psi L, L' \rangle = \langle L \,|\, L' \rangle_*, \qquad L' \in H^*;$$

cosicché $\Psi\circ\Phi\colon H\to H^{**}$ risulta essere un isomorfismo isometrico lineare e suriettivo di H su H^{**}. Proviamo che risulta $J=\Psi\circ\Phi$ essendo J l'immersione isometrica di H in H^{**} (Sezione 1.4). Si ha infatti

$$\begin{aligned}\langle \Psi\circ\Phi(y)\,,\Phi(x)\rangle &= \langle \Psi(\Phi(y))\,,\Phi(x)\rangle = \langle \Phi(y)\,|\,\Phi(x)\rangle_* = \langle x\,|\,y\rangle,\\ \langle Jy\,,\Phi(x)\rangle &= \langle \Phi(x)\,,y\rangle = \langle x\,|\,y\rangle,\end{aligned}$$

per ogni $x\,,y\in H$ da cui segue $(\Psi\circ\Phi)(y)=Jy$ per ogni y. Pertanto, J è suriettivo su H^{**} e questo completa la dimostrazione. □

Insiemi ortonormali. Sia H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$ che supponiamo fissato in tutta questa parte.
Un insieme di vettori $U\subset H$ (non vuoto) che soddisfa le seguenti relazioni di ortogonalità e normalizzazione

$$\langle x\,|\,y\rangle = \begin{cases}1 & \text{se } x=y\\ 0 & \text{se } x\neq y\end{cases} \qquad x\,,y\in U,$$

si dice *insieme ortonormale di* H. Ogni insieme ortonormale è evidentemente formato da vettori linearmente indipendenti e da ogni insieme finito di vettori linearmente independenti si può ricavare un insieme ortonormale mediante il *metodo di ortogonalizzazione di Gram–Schmidt*: dato un insieme di vettori $\{x_1,\dots,x_n\}$ $(n\geq 1)$ di H linearmente indipendenti, i vettori $\{u_1,\dots,u_n\}$ ricorsivamente definiti da

$$u_1=\frac{x_1}{\|x_1\|} \qquad \text{e} \qquad u_{m+1}=\frac{x_{m+1}-\displaystyle\sum_{1\leq i\leq m}\langle u_i\,|\,x_{m+1}\rangle u_i}{\left\|x_{m+1}-\displaystyle\sum_{1\leq i\leq m}\langle u_i\,|\,x_{m+1}\rangle u_i\right\|} \quad \text{se } m=1,\dots,n-1;$$

costituiscono un insieme ortonormale tale che

$$\operatorname{span}\{x_1,\dots,x_m\}=\operatorname{span}\{u_1,\dots,u_m\}$$

per $m=1,\dots,n$.
Sia $U=\{u_i\,:\,i\in I\}$ un insieme ortonormale di H. Ad ogni $x\in H$ associamo la funzione $\hat{x}\colon I\to\mathbb{C}$ definita da

$$\hat{x}(i)=\langle u_i\,|\,x\rangle, \qquad i\in I.$$

I numeri $\hat{x}(i)$ $(i\in I)$ si dicono *coefficienti di Fourier di* x relativi all'insieme ortonormale $U=\{u_i\,:\,i\in I\}$ e costituiscono una funzione a quadrato sommabile come risulta dai risultati seguenti.

LEMMA 3.15. *Siano H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$ e siano*

- $U=\{u_1,\dots,u_k\}$ *un insieme ortonormale di H;*
- $M=\operatorname{span}\{u_1,\dots,u_k\}$ *il sottospazio generato da U;*
- $x\in X$ *un punto e $x_M\in M$ la sua proiezione su M.*

Allora,

$$x_M=\sum_{1\leq h\leq k}\langle u_h\,|\,x\rangle u_h.$$

DIMOSTRAZIONE. Essendo $x_M\in M$, si ha

$$x_M=\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_ku_k$$

per $\lambda_h\in\mathbb{K}$ $(h=1,\dots,k)$ opportuni cosicché da $x-x_M\in M^\perp$ (Teorema 3.10) segue

$$0=\langle u_h\,|\,x-x_M\rangle=\langle u_h\,|\,x\rangle-\langle u_h\,|\,x_M\rangle=\langle u_h\,|\,x\rangle-\lambda_h$$

per ogni h e questo prova l'asserto. □

TEOREMA 3.16. *Siano H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$ e $U = \{u_i : i \in I\}$ un insieme ortonormale di H. Allora,*

$$\sum_{i\in I} |\hat{x}(i)|^2 \leq \|x\|^2, \qquad x \in H.$$

In particolare, se $U = \{u_i : i \in I\}$ è un insieme ortonormale di H, per ogni $x \in H$ l'insieme degli indici i tali che $\hat{x}(i) \neq 0$ è al più numerabile (Teorema I–2.127) e la disuguaglianza precedente prende il nome di *disuguaglianza di Bessel.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $F \subset I$ un insieme finito di indici e sia $M = \operatorname{span}\{u_i : i \in F\}$ il sottospazio chiuso da essi generato. Si ha allora $x = x_M + x_{M^\perp}$ e

$$x_M = \sum_{i\in F} \langle u_i \,|\, x\rangle u_i$$

(Lemma 3.15) cosicché risulta

$$\sum_{i\in F} |\langle u_i \,|\, x\rangle|^2 = \|x_M\|^2 = \|x\|^2 - \|x_{M^\perp}\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Dall'arbitrarietà dell'insieme finito F segue l'asserto. □

Dato un insieme ortonormale $U = \{u_i : i \in I\}$ di H, per la disuguaglianza di Bessel risulta allora $\hat{x} \in \ell_2(I)$ per ogni $x \in H$ e la funzione $x \in H \mapsto \hat{x} \in \ell_2(I)$ risulta essere un operatore lineare e continuo da H in $\ell_2(I)$ tale che

$$\|\hat{x}\|_2 \leq \|x\|, \qquad x \in H.$$

Inoltre, tale operatore lineare ha norma esattamente uguale a uno poiché si ha $\|u_i\| = 1$ e $\hat{u}_i(i) = 1$ e $\hat{u}_i(j) = 0$ per $j \neq i$ e il risultato seguente mostra che esso è in effetti anche suriettivo.

TEOREMA 3.17 (F. Riesz–E. Fischer). *Sia H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$ e siano $U = \{u_i : i \in I\}$ un insieme ortonormale di H e $c = \{c_i\}_{i\in I}$ una funzione a valori in $\mathbb{K}$. Allora, la serie generalizzata*

$$(*{*}*) \qquad \sum_{i\in I} c_i u_i$$

converge in H se e solo se risulta $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell_2(I)$ e in tal caso, denotata con $x \in H$ la sua somma, risulta $\hat{x}(i) = c_i$ per ogni i.

La serie generalizzata che definisce x si intende come limite della successione generalizzata delle somme finite.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell_2(I)$ e per ogni insieme finito $F \subset I$ sia

$$x_F = \sum_{i\in F} c_i u_i$$

la corrispondente somma parziale della serie generalizzata $(*{*}*)$. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste allora un insieme finito $F_\varepsilon \subset I$ tale che

$$\begin{cases} F \subset I \text{ finito} \\ F_\varepsilon \subset F \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i\in I\setminus F} |c_i|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Siano quindi $F_j \subset I$ $(j = 1, 2)$ insiemi finiti tali che $F_\varepsilon \subset F_j$ per $j = 1, 2$. Risulta allora $F_1 \triangle F_2 \subset I \setminus F_\varepsilon$ e da ciò segue

$$\|x_{F_1} - x_{F_2}\|^2 = \sum_{i\in F_1\triangle F_2} |c_i|^2 \leq \varepsilon^2.$$

La serie generalizzata $(***)$ verifica quindi la condizione di Cauchy e dunque converge per la completezza di H.
Viceversa sia x la somma della serie $(***)$. Risulta allora

$$\sum_{i\in I}|c_i|^2 = \lim_F \sum_{i\in F}|c_i|^2 = \lim_F \|x_F\|^2 = \|x\|^2 < +\infty$$

da cui segue $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell_2(I)$.
Infine, per ogni indice i fissato si ha per continuità

$$\hat{x}(i) = \langle u_i \,|\, x\rangle = \lim_F \langle u_i \,|\, x_F\rangle = c_i$$

e questo completa la dimostrazione. □

Nell'ambito degli spazi di Hilbert un ruolo particolare è svolto dagli insiemi ortonormali che sono massimali rispetto all'inclusione nel senso seguente: un insieme ortonormale U di H è massimale se per ogni insieme ortonormale U' di H tale che $U \subset U'$ risulta $U' = U$. L'esistenza di tali insiemi è conseguenza dell'assioma della scelta.

Teorema 3.18. *Sia H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$ e sia U_0 un insieme ortonormale di H. Allora, esiste $U_{\max}$ insieme ortonormale massimale contenente U_0.*

Dimostrazione. Per il teorema di massimalità di Hausdorff (Teorema I–1.5) sia $\mathcal{U}_{\max}$ una collezione di insiemi ortonormali contenenti U_0 totalmente ordinata per inclusione. Allora, $U_{\max} = \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}_{\max}\}$ è un insieme ortonormale di H che è evidentemente massimale. □

Le proprietà degli insiemi ortonormali massimali che giustificano il loro interesse sono riassunte nel risultato seguente.

Teorema 3.19. *Sia H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$ e sia $U = \{u_i : i \in I\}$ un insieme ortonormale in H. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *U è massimale;*

(b) $\operatorname{span}(U)$ *è denso in H;*

(c) *per ogni $x \in H$ si ha*

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I}|\hat{x}(i)|^2;$$

(d) *per ogni $x, y \in H$ si ha*

$$\langle x \,|\, y\rangle = \sum_{i\in I}[\hat{x}(i)]^*\hat{y}(i).$$

Gli insiemi ortonormali massimali si dicono anche *insiemi ortonormali completi* e la formula in (d) che esprime il prodotto scalare come somma dei prodotti dei coefficienti di Fourier rispetto ad un insieme ortonormale completo prende il nome di *identità di Parseval*.

Dimostrazione. Procediamo ciclicamente.

(a) Sia $M = \operatorname{cl}(\operatorname{span}(U))$. Se fosse $M \neq H$, esisterebbe un vettore $u \in M^\perp$ con $\|u\| = 1$ (Corollario 3.11) e questo violerebbe la massimalità di U.

(b) Sia $x \in H$ con $x \neq 0$ altrimenti non c'è nulla da provare. Fissato $0 < \varepsilon < \|x\|$, esistono allora vettori $u_{i_1}, \dots, u_{i_k}$ e scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tali che risulti

$$\|x - (\lambda_1 u_{i_1} + \cdots \lambda_k u_{i_k})\| \leq \varepsilon.$$

Posto $M = \operatorname{span}\{u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}\}$, si ha

$$x_M = \hat{x}_{i_1} u_{i_1} + \cdots \hat{x}_{i_k} u_{i_k} \qquad \text{e} \qquad \|x - x_M\| \leq \|x - (\lambda_1 u_{i_1} + \cdots \lambda_k u_{i_k})\| \leq \varepsilon$$

(Lemma 3.15) e da ciò segue $0 < \|x\| - \varepsilon \leq \|x_M\|$. Si ha dunque

$$(\|x\| - \varepsilon)^2 \leq \|x_M\|^2 = \sum_{1 \leq h \leq k} |\hat{x}_{i_h}|^2 \leq \sum_{i \in I} |\hat{x}_i|^2 \leq \|x\|^2$$

per la disuguaglianza di Bessel e dall'arbitrarietà di $0 < \varepsilon < \|x\|$ segue l'asserto.

(c) Segue facilmente dalla formula di polarizzazione (Teorema 3.4).

(d) Se l'insieme ortonormale $\{u_i : i \in I\}$ non fosse massimale, esisterebbe $u \in H$ con $u \neq 0$ per il quale si avrebbe $\hat{u}(i) = \langle u_i \,|\, u \rangle = 0$ per ogni indice i da cui seguirebbe

$$0 < \|u\|^2 = \langle u \,|\, u \rangle = \sum_{i \in I} [\hat{u}(i)]^* \hat{u}(i) = 0$$

e ciò è assurdo. □

Corollario 3.20. *Sia H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$ e sia $U = \{u_i : i \in I\}$ un insieme ortonormale completo in H. Allora, si ha*

$$x = \sum_{i \in I} \hat{x}(i) u_i$$

per ogni $x \in H$.

Dimostrazione. Sia $x \in H$. Per la disuguaglianza di Bessel risulta $\hat{x} \in \ell_2(I)$ e quindi per il teorema di Riesz–Fischer (Teorema 3.17) esiste $y \in H$ definito da

$$y = \sum_{i \in I} \hat{x}(i) u_i$$

tale che $\hat{y} = \hat{x}$. Dall'identità di Parseval segue infine $x = y$. □

Teorema 3.21. *Sia H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$ e siano U e V due insiemi ortonormali completi di H. Allora,*

$$\operatorname{card}(U) = \operatorname{card}(V).$$

Il numero cardinale $\operatorname{card}(U)$ di un sistema ortonormale completo U di H è la *dimensione ortogonale* dello spazio di Hilbert H.

Dimostrazione. Definiamo una relazione tra i vettori di U dichiarando $u \in U$ equivalente a $u' \in U$ e scrivendo $u \simeq u'$ se u e u' possono essere collegati da una catena finita

$$(***) \qquad u, v_1, u_2, v_3, u_4, \cdots, v_k, u' \qquad (k \geq 1)$$

formata da vettori dei due insiemi ortonormali completi alternati tra loro in maniera tale che due vettori consecutivi abbiano prodotto scalare non nullo. Il numero minimo $k \geq 1$ di elementi della catena che collega u a u' è la distanza di u da u'. La relazione così definita è evidentemente una relazione d'equivalenza in U e ogni classe d'equivalenza u^* dell'insieme quoziente $U^* = U/\simeq$ è al più numerabile. Infatti, per ogni vettore fissato $u \in U$ esiste una quantità al più numerabile di vettori $v \in V$ tali che risulti $\langle u | v \rangle \neq 0$ e per ciascuno di questi vettori $v \in V$ esiste una quantità al più numerabile di vettori $u' \in U$ tali che risulti $\langle v \,|\, u' \rangle \neq 0$. Pertanto, ogni vettore u è equivalente ad una quantità al più numerabile di elementi a distanza uno e quindi per induzione segue che ogni classe d'equivalenza u^* di U^* è al più numerabile.

Definiti poi in maniera analoga la relazione d'equivalenza tra gli elementi di V ed il relativo insieme quoziente $V^* = V/\simeq$, conveniamo che due classi di equivalenza u^* e

v^* di U^* e V^* siano collegate tra loro se esistono $u \in u^*$ e $v \in v^*$ tali che $\langle u\,|\,v\rangle \neq 0$ e proviamo che, se u^* e v^* sono classi di equivalenza collegate, risulta

$$u \in u^* \text{ e } v \notin v^* \qquad \Longrightarrow \qquad \langle u\,|\,v\rangle = 0.$$

Sia infatti $u \in u^*$ e sia v tale che $\langle u\,|\,v\rangle \neq 0$. Poiché u^* e v^* sono classi d'equivalenza collegate, esistono $u' \in u^*$ e $v' \in v^*$ tali che $\langle u'\,|\,v'\rangle \neq 0$ e quindi, se $(***)$ è la catena che collega u a u', la catena

$$v\,, u\,, v_1\,, u_2\,, v_3\,, u_4\,, \cdots\,, v_k\,, u'\,, v'$$

collega v a v' e quindi risulta $v \in v^*$.
Pertanto, per ogni classe d'equivalenza u^* esiste una ed una sola classe d'equivalenza v^* ad essa collegata e viceversa e la relazione di essere collegate determina una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi quozienti U^* e V^*. Per concludere la dimostrazione resta quindi da provare soltanto che due classi di equivalenza collegate u^* e v^* sono equipotenti. Consideriamo a tal fine due classi di equivalenza collegate u^* e v^* e proviamo che risulta

$$M_{u^*} = \mathrm{cl}(\mathrm{span}(u^*)) = \mathrm{cl}(\mathrm{span}(v^*)) = M_{v^*}.$$

Sia $u \in u^*$ un vettore fissato. Poiché V è un insieme ortonormale completo, risulta

$$u = \sum_{v \in V} \langle v\,|\,u\rangle v$$

e quindi u appartiene a M_{u^*} poiché da $u \in u^*$ segue $\langle u\,|\,v\rangle = 0$ per ogni $v \notin v^*$. Si ha quindi $M_{u^*} \subset M_{v^*}$ e scambiando il ruolo di u^* e v^* si conclude che risulta $M_{u^*} = M_{v^*}$. Conseguentemente, essendo u^* e v^* insiemi ortonormali al più numerabili, o sono entrambi finiti nel qual caso devono avere il medesimo numero di elementi oppure sono entrambi insiemi numerabili. In ogni caso u^* e v^* sono equipotenti e questo completa la dimostrazione. $\square$

Teorema 3.22. *Siano H e H' spazi di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$ e siano U e U' due insiemi ortonormali completi di H e H' rispettivamente. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *esiste $T \in \mathrm{Iso}(H\,, H')$ di H su H' tale che*

$$\langle Tx\,|\,Ty\rangle = \langle x\,|\,y\rangle, \qquad x\,, y \in H;$$

(b) $\mathrm{card}(U) = \mathrm{card}(U')$.

Nelle ipotesi del corollario i due spazi di Hilbert H e H' si dicono *isomorfi come spazi di Hilbert* e T costituisce un *isomorfismo di spazi di Hilbert di H su H'*.

Dimostrazione. (a) L'insieme $V' = TU$ formato dalle immagini $v' = Tu$ dei vettori $u \in U$ è un insieme ortonormale di H' che risulta essere anche completo: se per $x' \in H'$ risulta $\langle v'\,|\,x'\rangle = 0$ per ogni $v' \in V'$, si ha

$$0 = \langle v'\,|\,x'\rangle = \langle Tu\,|\,T(T^{-1}x')\rangle = \langle u\,|\,T^{-1}x'\rangle$$

per ogni $u \in U$ da cui segue $T^{-1}x' = 0$ e quindi anche $x' = 0$. Si ha allora

$$\mathrm{card}(U) = \mathrm{card}(V') = \mathrm{card}(U')$$

per il teorema precedente e questo prova (b).
(b) Siano $U = \{u_i :\, i \in I\}$ e $U' = \{u'_i :\, i \in I\}$ i due insiemi ortonormali completi equipotenti. Per ogni $x \in H$, i coefficienti $\{\hat{x}(i)\}_i$ di x rispetto a U sono una funzione in $\ell_2(I)$ per la disuguaglianza di Bessel e quindi la somma infinita

$$\sum_{i \in I} \langle u_i\,|\,x\rangle u'_i$$

converge in H'. La funzione $T\colon H \to H'$ definita da

$$Tx = \sum_{i\in I} \langle u_i \,|\, x\rangle u_i', \qquad x = \sum_{i\in I} \langle u_i \,|\, x\rangle u_i \in H,$$

è un operatore lineare e per definizione risulta

$$\langle u_i' \,|\, Tx\rangle = \langle u_i \,|\, x\rangle$$

per ogni i e per ogni x. Conseguentemente si ha $\|Tx\|^2 = \|x\|^2$ per ogni $x \in H$ per la formula di Parseval e quindi T è un'isometria di H in H'. Inoltre, risulta essere suriettiva: se $x' \in H'$, la somma infinita

$$x = \sum_{i\in I} \langle u_i' \,|\, x'\rangle u_i$$

converge in H e risulta per definizione

$$Tx = \sum_{i\in I} \langle u_i' \,|\, x'\rangle u_i' = x'.$$

Pertanto T è un isomorfismo di H su H' e infine per ogni x e y risulta

$$\langle Tx \,|\, Ty\rangle = \sum_{i\in I} \langle u_i' \,|\, Tx\rangle^* \langle u_i' \,|\, Ty\rangle = \sum_{i\in I} \langle u_i \,|\, x\rangle^* \langle u_i \,|\, y\rangle = \langle x \,|\, y\rangle$$

per la formula di Parseval e questo completa la dimostrazione. □

Corollario 3.23. *Sia H uno spazo di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$ e sia $U = \{u_i : i \in I\}$ un insieme ortonormale completo in H. Allora, l'operatore lineare*

$$x \in H \mapsto \hat{x} \in \ell_2(I)$$

è un isomorfismo di spazi di Hilbert di H su $\ell_2(I)$.

Fissato l'insieme ortonormale completo $U = \{u_i : i \in I\}$, il corrispondente isomorfismo di spazi Hilbert di H su $\ell_2(I)$ si dice *trasformata di Fourier*.

Dimostrazione. L'operatore lineare $x \in H \mapsto \hat{x} \in \ell_2(I)$ è un isomorfismo di H su $\ell_2(I)$ per la disuguaglianza di Bessel e per il teorema di Riesz–Fischer ed è un isomorfismo di spazi di Hilbert per l'identità di Parseval. □

Concludiamo questa parte osservando che è possibile caratterizzare gli spazi di Hilbert separabili sulla base della loro dimensione ortogonale.

Teorema 3.24. *Siano H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$ e U un insieme ortonormale completo di H. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *H è separabile;*
(b) *U è al più numerabile.*

In particolare, ogni spazio di Hilbert separabile è isomorfo come spazio di Hilbert a $L_2(0,1)$ con la misura di Lebesgue e a $\ell_2(\mathbb{N}_+)$.

Dimostrazione. (a) Si ha $\|u - u'\| = \sqrt{2}$ per ogni coppia di vettori $u, u' \in U$ con $u \neq u'$ e quindi, se U non fosse al più numerabile, H conterrebbe una quantità non numerabile di insiemi aperti, non vuoti, disgiunti e quindi non sarebbe separabile.
(b) Se U è al più numerabile, l'insieme delle combinazioni lineari di elementi di U con cofficienti in $\mathbb{Q}$ o in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ è un insieme numerabile e denso in H. □

Concludiamo questa parte costruendo un esempio di insieme ortonormale completo in $L_2(0,1)$.

Esempio 3.25. Siano $I_{n,k}$ gli intervalli diadici di $[0,1)$ definiti da

$$I_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right), \qquad k = 1, \dots, 2^n, \quad n \geq 0.$$

Le *funzioni di Haar* $\{u_0\} \cup \{u_{n,k} : \ k = 1, \dots, 2^n \text{ e } n \geq 0\}$ definite da

$$u_0(t) = 1 \qquad \text{e} \qquad u_{n,k}(t) = 2^{n/2}\left[1_{I_{n+1,2k-1}}(t) - 1_{I_{n+1,2k}}(t)\right]$$

per $t \in [0,1)$ sono un insieme ortonormale completo di $L_2(0,1)$.
Si ha per costruzione

- $I_{n,k} = I_{n+1,2k-1} \cup I_{n+1,2k}$;
- $u_{n,k} = 0$ in $[0,1) \setminus I_{n,k}$;

per $k = 1, \dots, 2^n$ e $n \geq 0$ e da ciò segue

$$\int_0^1 u_{n,k} = 0$$

per ogni k e n. Inoltre, se $n > m \geq 0$, per ogni scelta degli indici h e k risulta $I_{m,h} \cap I_{n,k} = I_{n,k}$ oppure $I_{m,h} \cap I_{n,k} = \varnothing$ da cui segue

$$n > m \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{I_{m,h}} u_{n,k} = 0$$

per ogni h e k.
Dalle proprietà precedenti segue facilmente che le funzioni $\{u_0\} \cup \{u_{n,k}\}$ sono ortogonali in $L_2(0,1)$. Infatti, u_0 è ortogonale a ogni funzione $u_{n,k}$ poiché tali funzioni sono a media nulla e $u_{n,h}$ è ortogonale a $u_{n,k}$ per $h \neq k$ poiché in tal caso si ha $u_{n,h}(t)u_{n,k}(t) = 0$ per ogni $t \in [0,1)$ essendo gli intervalli $I_{n,h}$ e $I_{n,k}$ disgiunti. Inoltre, per $m < n$ e h e k tali che sia $I_{n,k} \subset I_{m,h}$ si ha $I_{n,k} \subset I_{m+1,2h-1}$ oppure $I_{n,k} \subset I_{m+1,2h}$. Supponendo ad esempio che si presenti il primo caso, risulta

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_{m,h}u_{n,k} &= 2^{m/2}\int_{I_{m+1,2h-1}} u_{n,k} - 2^{m/2}\int_{I_{m+1,2h}} u_{n,k} = \\ &= 2^{m/2}\int_{I_{m+1,2h-1}} u_{n,k} = \\ &= 2^{m/2}\int_0^1 u_{n,k} = 0.\end{aligned}$$

Pertanto, le funzioni $\{u_0\} \cup \{u_{n,k}\}$ sono ortogonali e anche normalizzate poiché risulta

$$\int_0^1 u_0^2 = 1 \quad \text{e} \quad \int_0^1 u_{n,k}^2 = 2^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 1$$

per ogni k e n.
Resta infine da provare che sono un insieme ortonormale completo in $L_2(0,1)$. A tal fine, è sufficiente provare che ogni funzione $\varphi \in C_c(0,1)$ può essere approssimata in $L_2(0,1)$ da una opportune combinazione lineare di funzioni di $\{u_0\} \cup \{u_{n,k}\}$ (Teorema 2.28). Per provare ciò, data $\varphi \in C_c(0,1)$, consideriamo le funzioni ψ_n $(n \geq 0)$ ricorsivamente definite da

$$\psi_0(t) = \int_0^1 \varphi \quad \text{e} \quad \psi_{n+1}(t) = \psi_n(t) + \sum_{1 \leq k \leq 2^n} \langle u_{n,k} \,|\, \varphi \rangle u_{n,k}(t)$$

per ogni $t \in [0,1)$. È chiaro che ogni funzione ψ_n è costante su ogni intervallo $I_{n,k}$ per ogni $n \geq 1$ e proviamo per induzione su $n \geq 1$ che risulta

$$(*) \qquad \psi_n(t) = 2^n \int_{I_{n,k}} \varphi, \qquad t \in I_{n,k},$$

per ogni $1 \leq k \leq 2^n$. Per $n = 1$ e $t \in I_{1,1} = [0,1/2)$ si ha

$$\psi_1(t) = \psi_0(t) + \langle u_{0,1} \,|\, \varphi \rangle u_{1,0}(t) = \int_0^1 \varphi + \left(\int_0^{1/2} \varphi - \int_{1/2}^1 \varphi \right) = 2 \int_0^{1/2} \varphi$$

e in maniera anloga si procede per $t \in I_{1,2} = [1/2,1)$. Supponiamo quindi che valga $(*)$ per $k = 1,\ldots,2^n$. Per $t \in I_{n+1,2k-1}$ per qualche $k = 1,\ldots,2^n$ si ha $I_{n+1,2k-1} \subset I_{n,k}$ e quindi risulta per l'ipotesi di induzione

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(t) &= \psi_n(t) + \sum_{1 \leq h \leq 2^n} \langle u_{n,h} \,|\, \varphi \rangle u_{n,h}(t) = \\
&= 2^n \int_{I_{n,k}} \varphi + 2^{n/2} \langle u_{n,k} \,|\, \varphi \rangle = \\
&= 2^n \int_{I_{n,k}} \varphi + 2^{n/2} \left(2^{n/2} \int_{I_{n+1,2k-1}} \varphi - 2^{n/2} \int_{I_{n+1,2k}} \varphi \right) = \\
&= 2^{n+1} \int_{I_{n+1,2k-1}} \varphi.
\end{aligned}$$

In maniera analoga si prova che per $t \in I_{n+1,2k}$ risulta

$$\psi_{n+1}(t) = 2^{n+1} \int_{I_{n+1,2k}} \varphi$$

e questo prova l'asserto.
Fissato $\varepsilon > 0$, per l'uniforme continuità di φ si ha

$$\|\varphi - \psi_n\|_2 = \left\| \varphi - \sum_{1 \leq k \leq 2^n} 2^n \left(\int_{I_{n,k}} \varphi \right) 1_{I_{n,k}} \right\|_2 \leq \varepsilon$$

per $n \geq 1$ sufficientemente grande e questo completa la dimostrazione della completezza delle funzioni di Haar. $\square$

3.2. Polinomi ortogonali

Esaminiamo in questa sezione alcune classiche famiglie di polinomi ortogonali in spazi L_2 con peso.

Polinomi ortogonali. Siano $I = (a,b)$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervallo aperto e $w \colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

- w è misurabile e $w(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$;
- $\displaystyle\int_a^b |x|^n w(x)\, dx < +\infty$ per ogni $n \geq 0$.

La misura

$$\mu_w(E) = \int_E w, \qquad E \in \mathcal{S}((a,b)),$$

è una misura positiva di Radon regolare e completa sulla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}((a,b))$ degli insiemi (Lebesgue) misurabili di (a,b) tale che

$$|E| = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu_w(E) = 0$$

per ogni insieme $E \subset (a,b)$ misurabile (Esercizio II–3.6).
Consideriamo quindi lo spazio di Hilbert $L_2(\mu_w)$ sul campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ formato dalle (classi di equivalenza di) funzioni a quadrato integrabili in (a,b) rispetto al

peso w. Denotiamo per brevità tale spazio con $L_2(w)$ anziché $L_2(\mu_w)$ e denotiamo inoltre con

$$\|u\|_{2,w} = \left(\int_a^b |u|^2 w\right)^{1/2} \qquad \text{e} \qquad \langle u\,|\,v\rangle_{2,w} = \int_a^b u^* v w$$

per $u\,,v \in L_2(w)$ la relativa norma ed il relativo prodotto scalare. Per le ipotesi fatte, $L_2(w)$ contiene (le restrizioni all'intervallo I di) tutti i polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ e lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto $C_c(a\,,b)$ risulta denso in $L_2(w)$ (Teorema 2.28). Siano

$$x \in \mathbb{R} \mapsto x^n, \qquad (n \geq 0),$$

i monomi e siano $\{p_n\}_{n\geq 0}$ le funzioni da essi ottenuti ottenuti per ortogonalizzazione in $L_2(w)$ con il metodo di Gram–Schmidt. Per induzione su n si prova facilmente che p_n è un polinomio reale con $\mathrm{gr}(p_n) = n$ per ogni $n \geq 0$ tale che

$$\langle p_n\,|\,p\rangle_{2,w} = \int_a^b p_n p w = 0$$

per ogni polinomio p con $\mathrm{gr}(p) < n$. In particolare, per $p(x) = 1$ per ogni x si ha

$$\int_a^b p_n w = 0$$

per $n \geq 1$ e quindi ogni polinomio p_n con $n \geq 1$ è a media nulla rispetto a w in $(a\,,b)$. Poiché p_n è un polinomio reale di grado n si ha

$$p_n(x) = p_{n,n}x^n + p_{n,n-1}x^{n-1} + \cdots + p_{n,0}, \qquad x \in \mathbb{R} \quad (n \geq 0),$$

con $p_{n,m} \in \mathbb{R}$ $(m = 0\,,\ldots\,,n)$ e $p_{n,n} \neq 0$ per ogni $n \geq 0$ e supporremo nel seguito che risulti $p_{n,n} > 0$ per ogni n. In questo modo i polinomi $\{p_n\}_n$ sono univocamente determinati e si dicono *polinomi ortogonali con peso w in* $(a\,,b)$. Poniamo per brevità $p_{n,n} = k_n$ cosicché risulta

$$p_n(x) = k_n x^n + \text{termini di grado inferiore}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

per ogni n.

TEOREMA 3.26. *Sia $I = (a\,,b)$ un intervallo limitato e siano $\{p_n\}_n$ i polinomi ortogonali con peso w in $(a\,,b)$. Allora, $\{p_n\}_n$ è un insieme ortonormale completo in $L_2(w)$.*

Questo risultato può essere falso se $I = (a\,,b)$ non è limitato ma vedremo nel seguito esempi significativi di polinomi ortogonali con peso che sono insiemi ortonormali completi anche con intervalli limitati.

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in L_2(w)$ e, fissato $\varepsilon > 0$, sia $\varphi \in C_c(a\,,b)$ una funzione tale che $\|f - \varphi\|_{2,w} \leq \varepsilon/2$. Per il teorema di approssimazione di Weierstrass (Teorema 2.7) esiste un polinomio $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ tale che

$$\sup_{x\in[a,b]} |\varphi(x) - p(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(\int_a^b w\right)^{-1/2}$$

e quindi risulta

$$\|f - p\|_{2,w} \leq \|f - \varphi\|_{2,w} + \|\varphi - p\|_{2,w} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_a^b |\varphi - p|^2 w\right)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Se $n \geq 0$ è il grado di p, si ha $p \in \mathrm{span}(\{1\,,x\,,\ldots\,,x^n\}) = \mathrm{span}(\{p_0\,,\ldots\,,p_n\})$ e questo conclude la dimostrazione. □

A conclusione di questa parte, esaminiamo alcune proprietà generali delle famiglie di polinomi ortogonali che sono indipendenti dalla scelta del peso w. La prima proprietà che ricaviamo è la formula ricorsiva a tre termini che lega i polinomi consecutivi di una stessa famiglia.

Proposizione 3.27. *Siano $\{p_n\}_n$ i polinomi ortogonali con peso w in (a,b). Allora, esistono $A_n, B_n, C_n \in \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ tali che*

$$A_n p_{n+1}(x) - (x - B_n)p_n(x) + C_n p_{n-1}(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

per ogni $n \geq 1$.

I coefficienti A_n, B_n e C_n sono esplicitamente dati da

$$A_n = \int_a^b x p_n(x) p_{n+1}(x) w(x)\, dx; \qquad B_n = \int_a^b x p_n(x) p_n(x) w(x)\, dx;$$

per $n \geq 0$ e da

$$C_n = \int_a^b x p_n(x) p_{n-1}(x) w(x)\, dx;$$

per $n \geq 1$. Risulta $C_n = A_{n-1}$ per $n \geq 1$ e per $n = 0$ la formula vale nella forma

$$A_0 p_1(x) - (x - B_0)p_0(x) = 0, \qquad x \in I.$$

Dimostrazione. Sia $n \geq 0$. Il polinomio reale

$$p(x) = \frac{k_n}{k_{n+1}} p_{n+1}(x) - x p_n(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

ha grado (minore o) uguale a n e quindi si esprime come combinazione lineare

$$p(x) = c_0 p_0(x) + \cdots + c_n p_n(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

di $p_0, \ldots, p_n$ con coefficienti c_m dati per ortogonalità da

$$\begin{aligned} c_m = \langle p_m \,|\, p \rangle_{2,w} &= \frac{k_n}{k_{n+1}} \langle p_m \,|\, p_{n+1} \rangle - \langle p_m \,|\, x p_n \rangle_{2,w} = \\ &= -\langle p_m \,|\, x p_n \rangle_{2,w} = -\langle p_n \,|\, x p_m \rangle_{2,w} \end{aligned}$$

per $m = 0, \ldots, n$ con ovvio significato dei simboli. Per lo stesso motivo risulta

$$m < n - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \langle p_n \,|\, x p_m \rangle_{2,w} = 0$$

da cui segue

$$p(x) = c_{n-1} p_{n-1}(x) + c_n p_n(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

per ogni $n \geq 1$. Dalla definizione di p segue allora

$$0 = \frac{k_n}{k_{n+1}} p_{n+1}(x) - p(x) - x p_n(x) = \frac{k_n}{k_{n+1}} p_{n+1}(x) - (x + c_n) p_n(x) - c_{n-1} p_{n-1}(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \geq 1$. Si ha infine

$$\frac{k_n}{k_{n+1}} = \frac{k_n}{k_{n+1}} \langle p_{n+1} \,|\, p_{n+1} \rangle_{2,w} = \frac{k_n}{k_{n+1}} \langle k_{n+1} x^{n+1} \,|\, p_{n+1} \rangle_{2,w} = \langle p_n \,|\, x p_{n+1} \rangle_{2,w} = A_n$$

e posto $B_n = -c_n$ e $C_n = -c_{n-1}$ come sopra si ha la tesi. □

I risultati seguenti illustrano alcune proprietà degli zeri dei polinomi ortogonali.

Proposizione 3.28. *Siano $\{p_n\}_n$ i polinomi ortogonali con peso w in (a,b). Allora, p_n ha esattamente n zeri semplici in (a,b) per ogni $n \geq 0$.*

Risulta quindi

$$p_n(x) = k_n (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,n}), \qquad x \in \mathbb{R},$$

con $a < x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n} < b$ per ogni $n \geq 1$.

Dimostrazione. Ogni polinomio p_n con $n \geq 1$ è a media nulla rispetto a w in $(a\,,b)$ e quindi, essendo w positiva, p_n deve cambiare segno in $(a\,,b)$ quando $n \geq 1$. Questo prova la tesi per $n = 1$. Per $n \geq 2$, siano $a < x_{n,1} \leq x_{n,2} \leq \cdots \leq x_{n,k} < b$ $(1 \leq k \leq n)$ gli zeri non necessariamente distinti di p_n in $(a\,,b)$ cosicché risulta

$$p_n(x) = k_n(x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,k})q_k(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

con q_k polinomio monico di grado $n-k$ privo di zeri reali in $(a\,,b)$. Se fosse $1 \leq k < n$, il polinomio

$$r(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,k}), \qquad x \in \mathbb{R},$$

avrebbe grado $k < n$ e quindi per ortogonalità si avrebbe

$$0 = \langle p_n \,|\, r \rangle_{2,w} = k_n \int_a^b r^2 q_k w$$

e ciò è assurdo poiché q_k ha segno costante in $(a\,,b)$. Deve quindi essere $k = n$ e quindi risulta

$$\begin{aligned} p_n(x) &= k_n(x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,n}) = \\ &= k_n(x - \overline{x}_{n,1})^{m_1}(x - \overline{x}_{n,2})^{m_2} \cdots (x - \overline{x}_{n,k})^{m_k}, \end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $a < \overline{x}_{n,1} < \cdots < \overline{x}_{n,k} < b$ $(1 \leq k \leq n)$ zeri distinti di p_k con molteplicità $m_1 + \cdots + m_k = n$. Se fosse $m_h \geq 2$ per qualche indice $h = 1, \ldots, k$, il polinomio reale

$$r(x) = (x - \overline{x}_{n,1})^{m_1} \cdots (x - \overline{x}_{n,h})^{n_h} \cdots (x - \overline{x}_{n,k})^{m_k}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

con $n_h = 0$ se m_h è pari e $n_h = 1$ se m_h è dispari avrebbe grado minore di n e quindi per ortogonalità si avrebbe

$$0 = \langle p_n \,|\, r \rangle_{2,w} = k_n \int_a^b (x - \overline{x}_{n,h})^{m_h + n_h} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ m \neq h}} (x - \overline{x}_{n,j})^{2m_j} w(x)\, dx$$

ma ciò non può essere poiché $m_h + n_h$ è pari. □

Lemma 3.29. *Siano $\{p_n\}_n$ i polinomi ortogonali con peso w in $(a\,,b)$. Allora,*

$$\sum_{0 \leq m \leq n} [p_m(x)]^2 = \frac{k_n}{k_{n1}} \left[p'_{n+1}(x)p_n(x) - p_{n+1}(x)p'_n(x) \right], \qquad x \in \mathbb{R},$$

per ogni $n \geq 0$.

Questa formula prende il nome di *formula di Christoffel–Darboux.*

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} A_n p_{n+1}(x)p_n(y) &= (x - B_n)p_n(x)p_n(y) - C_n p_{n-1}(x)p_n(y) \\ A_n p_{n+1}(y)p_n(x) &= (y - B_n)p_n(y)p_n(x) - C_n p_{n-1}(y)p_n(x) \end{aligned}$$

per ogni $x\,, y \in \mathbb{R}$ per $n \geq 1$ (Proposizione 3.27) e sottraendo si ottiene

$$\begin{aligned} &A_n \left[p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x) \right] = \\ &\qquad = (x - y)p_n(x)p_n(y) - C_n \left[p_{n-1}(x)p_n(y) - p_{n-1}(y)p_n(x) \right]. \end{aligned}$$

per ogni x e y e per ogni $n \geq 1$. Essendo $C_n = A_{n-1}$ per $n \geq 1$, sommando da 1 a n si ottiene telescopicamente

$$\begin{aligned} &(x - y) \sum_{1 \leq m \leq n} p_m(x)p_m(y) = \\ &\qquad = A_n \left[p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x) \right] - A_0 \left[p_1(x)p_0(y) - p_1(y)p_0(x) \right] \end{aligned}$$

per ogni x e y e per ogni $n \geq 1$ come prima. Essendo $p_0(x) = k_0$ per ogni x e $A_m = k_m/k_{m+1}$ per ogni m, risulta

$$A_0\left[p_1(x)p_0(y) - p_1(y)p_0(x)\right] = \frac{k_0}{k_1}k_0k_1(x-y) = k_0^2(x-y) = p_0(x)p_0(y)(x-y)$$

e questo completa la dimostrazione. $\square$

PROPOSIZIONE 3.30. *Siano* $\{p_n\}_n$ *i polinomi ortogonali con peso* w *in* $(a\,,b)$ *e siano* $a < x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n} < b$ $(n \geq 1)$ *gli zeri di* p_n*. Allora, si ha*

$$a < x_{n+1,1} < x_{n,1} < x_{n+1,2} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n} < x_{n+1,n+1} < b$$

per ogni $n \geq 1$.

Ciascuno zero di p_n cade quindi tra due zeri consecutivi di p_{n+1}.

DIMOSTRAZIONE. Poiché è $p_0(x) = k_0 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, per la formula di Christoffel–Darboux (Lemma 3.29) risulta

$$(*) \qquad p'_{n+1}(x)p_n(x) - p_{n+1}(x)p'_n(x) > 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Essendo gli zeri di p_n semplici $(n \geq 1)$, deve essere $p'_n(x_{n,h}) \neq 0$ per $h = 1,\dots,n$. Siano quindi $x_{n,k} < x_{n,k+1}$ $(1 \leq k \leq n-1$ e $n \geq 2)$ due zeri consecutivi di p_n cosicché deve essere

$$p'_n(x_{n,k})p'_n(x_{n,k+1}) < 0.$$

Ponendo $x = x_{n,k}$ e $x = x_{n,k+1}$ in $(*)$ si ha

$$p_{n+1}(x_{n,k})p'_n(x_{n,k}) < 0 \qquad \text{e} \qquad p_{n+1}(x_{n,k+1})p'_n(x_{n,k+1}) < 0$$

e dunque deve essere $p_n(x_{n,k})p_n(x_{n,k+1}) < 0$. Quindi intervallati tra gli n zeri di p_n cadono almeno $n-1$ zeri di p_{n+1}. I rimanenti due zeri di p_{n+1} devono trovarsi in $(a\,,x_{n,1})$ e in $(x_{n,n}\,,b)$ perché altrimenti, se due zeri di p_{n+1} si trovassero in uno stesso intervallo $(x_{n,k}\,,x_{n,k+1})$, tra di essi ci sarebbe uno zero di p_n per le stesse considerazioni svolte sopra. $\square$

Alcuni esempi significativi di polinomi ortogonali sono (a meno di fattori di normalizzazione)

- i *polinomi di Legendre* $\{P_n\}_n$ corrispondenti all'intervallo $I = (-1\,,1)$ e al peso $w(x) = 1$ per ogni $x \in (-1\,,1)$;
- i *polinomi di Laguerre* $\{L_n\}_n$ corrispondenti all'intervallo $I = (0\,,+\infty)$ e al peso $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$ per ogni $x > 0$;
- i *polinomi di Hermite* $\{H_n\}_n$ corrispondenti all'intervallo $I = \mathbb{R}$ e al peso $w(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Di queste famigli di polinomi ortogonali esaminiamo le principali proprietà nei paragrafi seguenti.

Polinomi di Legendre. I polinomi ortogonali con peso $w(x) = 1$ per $x \in (-1\,,1)$ coincidono con i *polinomi di Legendre* $\{P_n\}_n$ definiti dalla formula ricorsiva di Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}D^n\left[\left(x^2-1\right)^n\right], \qquad x \in \mathbb{R} \quad (n \geq 0).$$

Per la formula di Leibniz si ha

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}D^n\left[\left(x^2-1\right)^n\right] = \\ &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{0 \leq m \leq n}\binom{n}{m}D^m\left[(x+1)^n\right]D^{n-m}\left[(x-1)^n\right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \sum_{0 \le m \le n} \binom{n}{m} \frac{n!}{(n-m)!}(x+1)^{n-m} \frac{n!}{m!}(x-1)^m =$$
$$= \frac{1}{2^n} \sum_{0 \le m \le n} \binom{n}{m}^2 (x+1)^{n-m}(x-1)^m$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $n \ge 0$. Ogni funzione P_n è quindi un polinomio a coefficienti reali di grado n in cui il coefficiente del termine di grado massimo è

$$k_n = \frac{1}{2^n} \sum_{0 \le m \le n} \binom{n}{m}^2 = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}, \qquad n \ge 0.$$

Inoltre, il polinomio P_n, essendo la derivata $n-$esima di una funzione pari, è una funzione che ha la stessa parità di n ovvero si ha

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

e in particolare risulta $P_n(1) = 1$ e $P_n(-1) = (-1)^n$ per ogni n.
Identifichiamo (a meno di un coefficiente di normalizzazione) i polinomi di Legendre con i polinomi ortogonali con peso $w(x) = 1$ in $(-1, 1)$ provando che sono ortogonali in $L_2(-1, 1)$. Integrando per parti e tenendo conto che si ha

$$D^k \left[\left(x^2 - 1\right)^n \right] \Big|_{x=\pm 1} = 0$$

per $0 \le k < n$, risulta

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\, dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} P_m(x) D^n \left[\left(x^2-1\right)^n \right] dx =$$
$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} D^n P_m(x) \left(x^2 - 1\right)^n dx$$

per ogni m e n da cui segue

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\, dx = 0, \qquad 0 \le m < n,$$

poiché $D^n P_m(x) = 0$ per ogni x per tali m e n e

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} D^n P_n(x) \left(x^2 - 1\right)^n dx =$$
$$= \frac{k_n}{2^n} \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^n dx =$$
$$= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^n dx = 2\binom{2n}{n} \int_0^1 y^n (1-y)^n\, dy$$

per $m = n$ poiché $D^n P_n(x) = n!\, k_n$ per ogni x. Ricordando infine che è

$$\int_0^1 y^n(1-y)^n\, dy = B(n+1, n+1) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

per ogni $n \ge 0$ (Teorema 8.20 in [53]), si conclude che risulta

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx = \frac{2}{2n+1}, \qquad n \ge 0.$$

Pertanto i polinomi

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x), \qquad x \in \mathbb{R} \quad (n \ge 0),$$

coincidono con i polinomi ortogonali con peso $w(x) = 1$ in $(-1, 1)$ e costituiscono in particolare un insieme ortonormale completo in $L_2(-1, 1)$.

I polinomi di Legendre si possono ottenere anche come coefficienti della rappresentazione in serie di potenze di t della funzione generatrice

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}, \qquad (x,t) \in [-1,1] \times (-1,1),$$

dove $G(x,t)$ rappresenta la distanza tra un punto P del piano posto a distanza unitaria dall'origine ed un altro punto Q del piano posto a distanza $|t| < 1$ dall'origine che formano tra loro un angolo $\theta = \arccos x$.
Si ha $1 - 2xt + t^2 \geq (1-|t|)^2 > 0$ per $|x| \leq 1$ e $|t| < 1$ e risulta

$$|x| \leq 1 \text{ e } |t| < \sqrt{2} - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad |t^2 - 2xt| < 1$$

cosicché $G(x,t)$ si rappresenta in serie di potenze nella forma

$$\begin{aligned} G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= \sum_{n\geq 0} \binom{-1/2}{n} \left(t^2 - 2xt\right)^n = \\ &= \sum_{n\geq 0} \sum_{0\leq m\leq n} (-1)^m 2^m \binom{-1/2}{n} \binom{n}{m} x^m t^{2n-m} \end{aligned}$$

per tali x e t. Ponendo $2n - m = k$ e $I(k) = \{(m,n) : \ 0 \leq m \leq n \text{ e } 2n - m = k\}$ per $k \geq 0$ e scambiando l'ordine di sommazione risulta

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \sum_{n\geq 0} \sum_{0\leq m\leq n} (-1)^m 2^m \binom{-1/2}{n} \binom{n}{m} x^m t^{2n-m} = \\ &= \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{(m,n)\in I(k)} (-1)^m 2^m \binom{-1/2}{n} \binom{n}{m} x^m \right) t^k = \sum_{k\geq 0} Q_k(x) t^k \end{aligned}$$

per gli stessi x e t. Le funzioni $Q_k(x)$ sono i polinomi reali definiti da

$$Q_k(x) = \sum_{(m,n)\in I(k)} (-1)^m 2^m \binom{-1/2}{n} \binom{n}{m} x^m, \qquad x \in \mathbb{R} \quad (k \geq 0),$$

e in particolare, poiché per ogni $k \geq 0$ fissato il valore massimo assunto da m tra le coppie $(m,n) \in I(k)$ è realizzato per $m = n = k$, ogni polinomio Q_k ha grado k.
Si ha allora

$$G(x,s)G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xs+s^2}} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{m,n\geq 0} Q_m(x) Q_n(x) s^m t^n$$

per $|x| \leq 1$ e $|s|, |t| < \sqrt{2} - 1$ e, integrando ambo i membri per x in $[-1,1]$ risulta

$$\int_1^1 \frac{1}{\sqrt{1-2xs+s^2}} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \, dx = \sum_{m,n\geq 0} \left(\int_1^1 Q_m(x) Q_n(x) \, dx \right) s^m t^n.$$

per $|s|, |t| < \sqrt{2} - 1$. Inoltre, per $0 < s, t < 1$ risulta

$$\int_1^1 \frac{1}{\sqrt{1-2xs+s^2}} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \, dx = \frac{1}{\sqrt{st}} \log \frac{1+\sqrt{st}}{1-\sqrt{st}} = \sum_{n\geq 0} \frac{2}{2n+1} s^n t^n$$

da cui segue per confronto

$$\int_1^1 Q_m(x) Q_n(x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{se } m = n \end{cases}$$

per ogni $m, n \geq 0$. Per l'unicità dei polinomi trigonometrici di $L_2(-1,1)$ deve essere $Q_n = \pm P_n$ per ogni n e ponendo $x = 1$ in

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n\geq 0} Q_n(x)t^n, \qquad |x| \leq 1, \quad |t| < \sqrt{2}-1,$$

risulta

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n\geq 0} Q_n(1)t^n, \qquad |t| < \sqrt{2}-1,$$

da cui segue $Q_n(1) = 1$ per ogni n. Pertanto, $Q_n = P_n$ per ogni n cosicché risulta

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n\geq 0} P_n(x)t^n, \qquad |x| \leq 1 \text{ e } |t| < 1.$$

Infine, derivando la funzione generatrice, risulta

$$\left(1-2xt+t^2\right)\frac{\partial G}{\partial t}(x,t) = (x-t)G(x,t),$$

per ogni $|x| \leq 1$ e $|t| < 1$ da cui segue

$$\left(1-2xt+t^2\right)\sum_{n\geq 1} nP_n(x)t^{n-1} = (x-t)\sum_{n\geq 0} P_n(x)t^n,$$

per $|x| \leq 1$ e $|t| < \sqrt{2}-1$ e quindi

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - x\sum_{n\geq 0}(2n+1)P_n(x)t^n + \sum_{n\geq 1} nP_{n-1}(x)t^n = 0$$

per gli stessi x e t. Si ha quindi $P_1(x) = xP_0(x)$ per $x \in \mathbb{R}$ e la relazione ricorsiva a tre termini risulta essere

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

per $n \geq 1$.

Polinomi di Laguerre. I polinomi ortogonali con peso $w_\alpha(x) = x^\alpha \mathrm{e}^{-x}$ per $x > 0$ ($\alpha > -1$) coincidono con i *polinomi di Laguerre* $\{L_n^{(\alpha)}\}_n$ definiti dalla formula ricorsiva di Rodrigues

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!}x^{-\alpha}\mathrm{e}^x D^n\left(x^{n+\alpha}\mathrm{e}^{-x}\right), \qquad x \in \mathbb{R} \quad (n \geq 0).$$

Per la formula di Leibniz risulta

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{0\leq m\leq n}(-1)^m\binom{n+\alpha}{m+\alpha}\frac{x^m}{m!}, \qquad x \in \mathbb{R} \quad (n \geq 0),$$

e quindi $L_n^{(\alpha)}$ è un polinomio di grado n della forma

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!}x^n + \text{termini di grado inferiore}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

per ogni n.

Identifichiamo (a meno di un coefficiente di normalizzazione) i polinomi di Laguerre con i polinomi ortogonali con peso $w_\alpha(x) = x^\alpha \mathrm{e}^{-x}$, $x > 0$, provando che sono ortogonali in $L_2(x^\alpha \mathrm{e}^{-x}dx)$. Integrando per parti e tenendo conto che si ha

$$D^{k-1}L_m^{(\alpha)}(x)D^{n-k}\left(x^{n+\alpha}\mathrm{e}^{-x}\right)\Big|_{x=0} = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} D^{k-1}L_m^{(\alpha)}(x)D^{n-k}\left(x^{n+\alpha}\mathrm{e}^{-x}\right) = 0;$$

per ogni $1 \leq k \leq n$ e $m \geq 0$, risulta

$$\int_0^{+\infty} L_m(x)L_n(x)x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\,dx = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} L_m(x)D^n\left(x^{n+\alpha}\mathrm{e}^{-x}\right)\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} D^n L_m(x) x^{n+\alpha} \mathrm{e}^{-x}\, dx$$

per ogni m e n da cui segue

$$\int_0^{+\infty} L_m(x) L_n(x) x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\, dx = 0, \qquad 0 \le m < n,$$

poiché $D^n L_m(x) = 0$ per ogni x per tali m e n e

$$(**) \qquad \begin{aligned} \int_0^{+\infty} [L_n(x)]^2 x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\, dx &= \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} \mathrm{e}^{-x}\, dx = \cdots = \\ &= \frac{1}{n!} (n+\alpha) \cdots (\alpha+1) \int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\, dx = \\ &= \frac{1}{n!} \Gamma(n+\alpha+1) = \Gamma(\alpha+1) \binom{n+\alpha}{n} \end{aligned}$$

per $m = n$ poiché $D^n L_n(x) = (-1)^n$ per ogni x. Pertanto i polinomi

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}}} L_n^{(\alpha)}(x), \qquad x \in \mathbb{R} \quad (n \ge 0),$$

coincidono con i polinomi ortogonali con peso $w_\alpha(x) = x^\alpha \mathrm{e}^{-x}$, $x > 0$ e costituiscono un insieme ortonormale in $L_2(x^\alpha \mathrm{e}^{-x} dx)$. Essendo l'intervallo $(0, +\infty)$ illimitato, la completezza dell'insieme dei polinomi di Laguerre non è conseguenza di Teorema 3.26 e deve essere provata con una dimostrazione ad hoc. A tal fine, è conveniente ricavare preliminarmente la funzione generatrice dei polinomi di Laguerre che risulta essere la funzione

$$G^{(\alpha)}(x, t) = \frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}} \mathrm{e}^{-xt/(1-t)}, \qquad (x, t) \in (0, +\infty) \times (-1, 1).$$

Si ha infatti

$$\frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}} \mathrm{e}^{-xt/(1-t)} = \frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}} \sum_{m \ge 0} \frac{1}{m!} \left(\frac{-xt}{1-t} \right)^m = \sum_{m \ge 0} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{t^m}{(1-t)^{m+\alpha+1}} x^m$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $t < 1$ cosicché, tenendo conto che è

$$D^m \left(\frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}} \right) = (-1)^m \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{(1-t)^{m+\alpha+1}}, \qquad t < 1,$$

per ogni $m \ge 0$, si ha

$$(***) \qquad \frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}} \mathrm{e}^{-xt/(1-t)} = \sum_{m \ge 0} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(m+\alpha+1)} t^m D^m \left(\frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}} \right) x^m$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $t < 1$. Derivando inoltre termine a termine la serie di potenze

$$\frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}} = \sum_{n \ge 0} \binom{n+\alpha}{n} t^n, \qquad |t| < 1,$$

risulta

$$D^m \left(\frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}} \right) = m! \sum_{n \ge m} \binom{n+\alpha}{n} \binom{n}{m} t^{n-m}$$

per gli stessi t, cosicché, sostituendo in $(***)$, scambiando l'ordine di sommazione e tenendo conto che risulta

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} \binom{n+\alpha}{n} \binom{n}{m} = \frac{1}{m!} \binom{n+\alpha}{m+\alpha},$$

per ogni $n \geq m \geq 0$, si ottiene

$$\frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}} e^{-xt/(1-t)} = \sum_{m\geq 0} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} t^m \left(\sum_{n\geq m} \binom{n+\alpha}{n} \binom{n}{m} t^{n-m} \right) x^m =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{0\leq m\leq n} \binom{n+\alpha}{n} \frac{x^m}{m!} \right) t^n$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|t| < 1$ ovvero

$$G^{(\alpha)}(x,t) = \frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}} e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n\geq 0} L_n^{(\alpha)}(x) t^n, \qquad x > 0 \text{ e } |t| < 1.$$

Derivando poi la funzione generatrice, risulta

$$(1-t)^2 \frac{\partial G^{(\alpha)}}{\partial t}(x,t) = \big[(1+\alpha)(1-t) - x\big]\, G^{(\alpha)}(x,t),$$

per ogni $x > 0$ e $|t| < 1$ da cui segue

$$(1-t)^2 \sum_{n\geq 1} n L_n^{(\alpha)}(x) t^{n-1} = \big[(1+\alpha)(1-t) - x\big] \sum_{n\geq 0} L_n^{(\alpha)}(x) t^n,$$

per $x > 0$ e $|t| < 1$ e quindi

$$\sum_{n\geq 0} (n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) t^n + \sum_{n\geq 0} (x - 2n - 1 - \alpha) L_n^{(\alpha)}(x) t^n + \sum_{n\geq 1} (n+\alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x) t^n = 0$$

per gli stessi x e t. Si ha quindi $L_1^{(\alpha)}(x) = (1+\alpha-x) L_0^{(\alpha)}(x)$ per $x \in \mathbb{R}$ e la relazione ricorsiva a tre termini risulta essere

$$(n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (x - 2n - 1 - \alpha) L_n^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0, \qquad x > 0,$$

per $n \geq 1$.
Resta da provare la completezza dei polinomi di Laguerre e ciò è conseguenza del risultato seguente.

TEOREMA 3.31. *I polinomi di Laguerre* $\{L_n^{(\alpha)}\}_n$ $(\alpha > -1)$ *sono un insieme ortonormale completo in* $L_2(x^\alpha e^{-x} dx)$.

Equivalentemente le funzioni

$$\Big\{ x^\alpha e^{-x/2} L_n^{(\alpha)}(x) :\ n \geq 0 \Big\} \qquad (\alpha > -1)$$

sono un insieme ortonormale completo in $L_2(0,+\infty)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in L_2(x^\alpha e^{-x} dx)$. Si ha

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 x^\alpha e^{-x}\, dx = \int_0^1 |f(-\log y)|^2 (-\log y)^\alpha\, dy$$

e quindi la funzione $y \in (0,1) \mapsto f(-\log y)$ appartiene a $L_2((-\log y)^\alpha dy)$. Essendo $\alpha > -1$, la funzione $y \in (0,1) \mapsto (-\log y)^\alpha$ è integrabile in $(0,1)$ e quindi risulta essere un peso ammissibile cosicché per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio p tale che

$$\varepsilon \geq \int_0^1 |f(-\log y) - p(y)|^2\, (-\log y)^\alpha\, dy = \int_0^{+\infty} |f(x) - p(e^{-x})|^2 x^\alpha e^{-x}\, dx$$

(Teorema 3.26). Per provare la completezza dei polinomi di Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}\}_n$ in $L_2(e^{-x} dx)$ è quindi sufficiente provare che per ogni $k \geq 0$ fissato e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste q polinomio tale che

$$\int_0^{+\infty} |e^{-kx} - q(x)|^2 x^\alpha e^{-x}\, dx \leq \varepsilon.$$

Ricordando la definizione della funzione generatrice $G^{(\alpha)}$ dei polinomi di Laguerre, per $t = k/(k+1) \in [0,1)$ si ha

$$\mathrm{e}^{-kx} = \mathrm{e}^{-xt/(1-t)}\Big|_{t=\frac{k}{k+1}} = (1-t)^{1+\alpha} G^{(\alpha)}(x,t)\Big|_{t=\frac{k}{k+1}} = \frac{1}{(k+1)^{1+\alpha}} G^{(\alpha)}\left(x, \frac{k}{k+1}\right)$$

per ogni $x > 0$ e questo suggerisce di considerare il polinomio

$$q(x) = \frac{1}{(k+1)^{1+\alpha}} \sum_{0 \le m \le n} L_m^{(\alpha)}(x) \left(\frac{k}{k+1}\right)^m \qquad x \in \mathbb{R},$$

con $n \ge 0$ da determinare. Si ha allora

$$\mathrm{e}^{-kx} - q(x) = \frac{1}{(k+1)^{1+\alpha}} \sum_{m \ge n+1} L_m^{(\alpha)}(x) \left(\frac{k}{k+1}\right)^m, \qquad x > 0,$$

cosicché, essendo i polinomi $\{L_n^{(\alpha)}\}_n$ ortogonali in $L_2(x^\alpha \mathrm{e}^{-x} dx)$, da $(**)$ segue

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} |\mathrm{e}^{-kx} - q(x)|^2 x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\, dx = \\
&\qquad = \frac{1}{(k+1)^{2(1+\alpha)}} \sum_{m \ge n+1} \int_0^{+\infty} |L_m^{(\alpha)}(x)|^2 x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\, dx \left(\frac{k}{k+1}\right)^{2m} = \\
&\qquad = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(k+1)^{2(1+\alpha)}} \sum_{m \ge n+1} \binom{m+\alpha}{m} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{2m} \le \varepsilon
\end{aligned}$$

per n sufficientemente grande poiché la serie a destra converge per il criterio del rapporto e questo completa la dimostrazione. □

Polinomi di Hermite. I polinomi ortogonali con peso $w(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ per $x \in \mathbb{R}$ coincidono con i *polinomi di Hermite* $\{H_n\}_n$ definiti dalla formula ricorsiva di Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} D^n\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right), \qquad x \in \mathbb{R} \quad (n \ge 0).$$

Si ha

$$\begin{aligned}
D^{n+1}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right) &= D\left(D^n \mathrm{e}^{-x^2}\right) = D\left((-1)^n \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x)\right) = \\
&= (-1)^n \left(-2x\mathrm{e}^{-x^2} H_n(x) + \mathrm{e}^{-x^2} H_n'(x)\right)
\end{aligned}$$

per ogni x da cui segue

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x), \qquad x \in \mathbb{R} \quad (n \ge 0),$$

e da ciò si ricava per induzione su $n \ge 0$ che ogni funzione H_n è un polinomio di grado n avente la stessa parità di n. Inoltre, sempre per induzione su n risulta

$$H_n(x) = 2^n x^n + \text{termini di grado inferiore}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

per ogni n.

Come nei casi precedenti, identifichiamo (a meno di un coefficiente di normalizzazione) i polinomi di Hermite con i polinomi ortogonali con peso $w(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, provando che sono ortogonali in $L_2(\mathrm{e}^{-x^2} dx)$. Integrando per parti e tenendo conto che si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} D^{k-1} H_m(x) D^{n-k}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right) = 0$$

per ogni $1 \le k \le n$ e $m \ge 0$, risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) D^n\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} D^n H_m(x) e^{-x^2} \, dx$$

per ogni m e n da cui segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} \, dx = 0, \qquad 0 \leq m < n,$$

poiché $D^n H_m(x) = 0$ per ogni x per tali m e n e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [H_n(x)]^2 e^{-x^2} \, dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

per $m = n$ poiché $D^n H_n(x) = 2^n n!$ per ogni x. Pertanto i polinomi

$$\frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x), \qquad x \in \mathbb{R} \quad (n \geq 0),$$

coincidono con i polinomi ortogonali con peso $w(x) = e^{-x^2}$ per $x \in \mathbb{R}$ e costituiscono un insieme ortonormale in $L_2(e^{-x^2} dx)$.

Per ricavare la funzione generatrice dei polinomi di Hermite osserviamo che si ha

$$(-1)^n e^{-x^2} H_n(x) = D^n \left(e^{-x^2} \right) = (-1)^n \, \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-(x-t)^2} \right) \Big|_{t=0}$$

per ogni $x, t \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \geq 0$ da cui segue

$$e^{-(x-t)^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-(x-t)^2} \right) \Big|_{t=0} \right) t^n = e^{-x^2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n$$

per gli stessi x e t. La funzione

$$G(x, t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n, \qquad x \in \mathbb{R} \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

risulta quindi essere la funzione generatrice dei polinomi di Hermite. Infine, dalla formula

$$D^{n+1} \left(e^{-x^2} \right) = D^n \left(-2x e^{-x^2} \right) = -2 \sum_{0 \leq m \leq n} \binom{n}{m} D^m x D^{n-m} \left(e^{-x^2} \right) =$$
$$= -2x D^n \left(e^{-x^2} \right) - 2n D^{n-1} \left(e^{-x^2} \right)$$

valida per ogni x e $n \geq 1$ si ottiene la relazione ricorsiva a tre termini dei polinomi di Hermite

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

per $n \geq 1$.

Concludiamo questa parte provando la completezza dei polinomi di Hermite come conseguenza della completezza dei polnomi di Laguerre.

Teorema 3.32. *I polinomi di Hermite $\{H_n\}_n$ sono un insieme ortonormale completo in $L_2(e^{-x^2} dx)$.*

Equivalentemente le funzioni

$$\left\{ e^{-x^2} H_n(x) : \; n \geq 0 \right\}$$

sono un insieme ortonormale completo in $L_2(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Sia dapprima $f \in L_2(\mathrm{e}^{-x^2}dx)$ una funzione pari o dispari ovvero si abbia $f(-x) = \pm f(x)$ per q.o.[1] $x \in \mathbb{R}$. Si ha in tal caso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = 2\int_0^{+\infty} |f(\sqrt{y})|^2 y^{-1/2}\mathrm{e}^{-y}\, dy$$

e quindi la funzione $y \in (0,+\infty) \mapsto f(\sqrt{y})$ appartiene a $L_2(y^{-1/2}\mathrm{e}^{-y}dy)$. Per la completezza dei polinomi di Laguerre di esponente $\alpha = -1/2$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio q tale che

$$\varepsilon \geq 2\int_0^{+\infty} |f(\sqrt{y}) - q(y)|^2\, y^{-1/2}\mathrm{e}^{-y}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - q(x^2)|^2 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$$

(Teorema 3.31) e questo prova l'asserto per le funzioni di $L_2(\mathrm{e}^{-x^2}dx)$ che sono pari o dispari. Il caso generale si ottiene esprimendo ogni funzione $f \in L_2(\mathrm{e}^{-x^2}dx)$ come somma delle funzioni pari f_p e dispari f_d di $L_2(\mathrm{e}^{-x^2}dx)$ definite da

$$f_p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad \text{e} \qquad f_p(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

per q.o. $x \in \mathbb{R}$. □

Esercizi

3.1. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff compatto contenente almeno due punti distinti. Provate che lo spazio di Banach $C(X)$ munito della norma della convergenza uniforme $\|\cdot\|_u$ non è uno spazio di Hilbert.

3.2. Sia μ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X tale che esistano $E, F \in \mathcal{S}$ con $E \cap F = \varnothing$ e $\mu(E), \mu(F) > 0$. Provate che $L_p(\mu)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ non è uno spazio di Hilbert per $p \neq 2$.

3.3. Siano H uno spazio di Hilbert e M un sottospazio di H. Provate che

(a) $M^\perp$ è un sottospazio chiuso;
(b) $[\mathrm{cl}(M)]^\perp = M^\perp$;
(c) $(M^\perp)^\perp = \mathrm{cl}(M)$.

3.4. Siano H uno spazio di Hilbert e M un sottospazio di H. Provate che le affermazioni seguenti sono equivalenti:

(a) M è chiuso e $\dim M^\perp = 1$;
(b) esiste $L \in H^*$ con $L \neq 0$ tale che $M = \ker L$.

3.5. Calcolate

$$\min\left\{\int_{-1}^{1} |t^3 - at^2 - bt - ct|^2\, dt :\ a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

e calcolate quindi il massimo di

$$\max_u \int_{-1}^{1} t^3 u(t)\, dt$$

tra le funzioni $u \in L_2([-1,1])$ tali che

$$\int_{-1}^{1} u(t)\, dt = \int_{-1}^{1} tu(t)\, dt = \int_{-1}^{1} t^2 u(t)\, dt = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_{-1}^{1} |u(t)|^2\, dt = 1.$$

[1] Gli insiemi trascurabili per la misura con peso w coincidono con gli insiemi (Lebesgue) trascurabili di $\mathbb{R}$.

3.6. Calcolate

$$\min\left\{\int_{-1}^{1}|t^3-at^2-bt-ct|^2\mathrm{e}^{-t}\,dt:\ a\,,b\,,c\in\mathbb{R}\right\}$$

e risolvete il corrispondente problema di massimo come in Esercizio 3.5.

3.7. Sia C il sottoinsieme di $C([0,1])$ formato dalle funzioni continue $u\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ tali che

$$\int_0^{1/2}u-\int_{1/2}^{1}u=1.$$

Provate che

(a) C è un sottoinsieme chiuso, convesso e non vuoto di $C([0,1])$;

(b) C non contiene alcun elemento di norma minima:

$$u\in C\qquad\Longrightarrow\qquad\|u\|_u>\inf\left\{\|v\|_u:\ v\in C\right\}.$$

Confrontate questo esempio con il corrispondente risultato per gli spazi di Hilbert.

3.8. Sia C il sottoinsieme di $L_1([0,1])$ formato dalle (classi di equivalenza di) funzioni Lebesgue integrabili $u\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ tali che

$$\int_0^1 u=1.$$

Provate che

(a) C è un sottoinsieme chiuso, convesso e non vuoto di $L_1([0,1])$;

(b) C contiene infiniti elementi di norma minima: esistono infinite funzioni $u\in C$ per le quali risulta

$$\|u\|_1=\inf\left\{\|v\|_1:\ v\in C\right\}.$$

Confrontate anche questo esempio con il corrispondente risultato per gli spazi di Hilbert.

3.9. Sia H uno spazio di Hilbert e siano M_0 un sottospazio di H e $L_0\colon M_0\to\mathbb{K}$ un funzionale lineare limitato su M_0. Provate che

(a) L_0 ha un'unica estensione lineare limitata $L\in H^*$ con $\|L\|=\|L_0\|$;

(b) $L=0$ su $M_0^\perp$.

3.10. Sia H uno spazio di Hilbert sul campo $\mathbb{K}$ e sia $B\colon H\times H\to\mathbb{K}$ una funzione bilineare tale che

- $|B(x\,,y)|\le C\|x\|\|y\|$;
- $|B(x\,,x)|\ge c\|x\|^2$;

per ogni $x\,,y\in H$ $(C\ge c>0)$. Provate il seguente *lemma di Lax–Milgram*: per ogni funzionale lineare continuo $x^*\in H^*$ esiste uno ed solo elemento $\Phi(x^*)\in H$ tale che

$$\langle x^*,x\rangle=B(\Phi(x^*)\,,x),\qquad x\in H,$$

e che la funzione $\Phi\colon H^*\to H$ così definita è un isomorfismo di H^* su H.

3.11. Sia $U=\{u_n\}_n$ un insieme ortonormale di uno spazio di Hilbert H.

(a) Provate che U è chiuso e limitato ma non compatto.

(b) Costruite un sottoinsieme chiuso C di H che non contiene alcun elemento di norma minima:
$$u \in C \qquad \Longrightarrow \qquad \|u\| > \inf\big\{\|v\| : \, v \in C\big\}\,.$$

3.12. Siano $\{u_n\}_n$ un insieme ortonormale di uno spazio di Hilbert H, $\{a_n\}_n$ una successione con $a_n \geq 0$ per ogni n e Q il sottoinsieme di H definito da
$$Q = \left\{ x \in H : \, x = \sum_n c_n u_n \text{ e } |c_n| \leq a_n \text{ per ogni } n \right\}.$$
Provate che Q è

(a) chiuso;

(c) compatto se e solo se risulta $\sum_n a_n^2 < +\infty$.

L'insieme Q è detto *cubo di Hilbert*.

3.13. Sia $X = \operatorname{span}\{u_s : \, s \in \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale generato dalle (classi di equivalenza di) funzioni
$$u_s(t) = \mathrm{e}^{ist}, \qquad t \in \mathbb{R} \quad (s \in \mathbb{R}).$$
Provate che il limite
$$\langle u, v\rangle = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} [u(t)]^* v(t)\, dt$$
esiste per ogni $u, v \in X$ ed è un prodotto scalare in X. Provate quindi che il completamento H di X è uno spazio di Hilbert non separabile e che $\{u_s : \, s \in \mathbb{R}\}$ è un insieme ortonormale massimale di H.

CAPITOLO 4

Spazi vettoriali topologici

Spazi funzionali importanti per le applicazioni sono dotati di una naturale nozione di convergenza che non deriva da una norma. Esempi di ciò sono gli spazi di funzioni continue o infinite volte differenziabili su aperti di spazi euclidei e gli spazi di Lorentz. Ci proponiamo in questo capitolo di sviluppare un quadro teorico che includa tali spazi funzionali generalizzando la nozione di spazio normato.
Come al solito, anche in tutto questo capitolo denoteremo con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ il campo dei numeri complessi o reali.

4.1. Spazi vettoriali topologici

Negli spazi normati la presenza della norma determina una topologia in cui le operazioni algebriche di spazio vettoriale sono continue. A partire da questa osservazione generalizziamo nel quadro topologico degli spazi uniformi la nozione di spazio normato considerando spazi vettoriali muniti di una topologia compatibile con la struttura algebrica soggiacente.

Spazi vettoriali topologici. Sia X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Un insieme $A \subset X$ si dice

- *bilanciato* se risulta $\lambda A \subset A$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq 1$;
- *assorbente* se per ogni $x \in X$ esiste $t = t(x) > 0$ tale che $x \in tA$.

Ogni insieme assorbente o bilanciato contiene evidentemente l'origine e, se A è bilanciato, risulta anche

$$\lambda, \mu \in \mathbb{K} \text{ e } |\lambda| \leq |\mu| \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda A \subset \mu A.$$

È chiaro inoltre che, se X è uno spazio vettoriale reale, un insieme $A \subset X$ risulta essere bilanciato se e solo se è simmetrico e stellato rispetto all'origine e che la stessa equivalenza non vale per gli spazi vettoriali complessi.

Esempio 4.1. Siano A e B gli insiemi di $\mathbb{R}^2$ definiti da

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \ r_1 \leq \|x\| \leq r_2\right\} \cup \{0\} \qquad\qquad 0 < r_1 \leq r_2;$$
$$B = \left\{(r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq r \leq 1 \text{ e } \theta \in [0, 2\pi] \cap \mathbb{Q}\right\}.$$

L'insieme A è assorbente ma non bilanciato in $\mathbb{R}^2$ mentre l'insieme B è bilanciato ma non assorbente in $\mathbb{R}^2$. □

Definizione 4.2. Sia X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Se $\mathcal{T}$ è una topologia di Hausdorff in X per cui le operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare

$$(x, y) \in X \times X \to x + y \qquad \text{e} \qquad (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X \to \lambda x$$

sono continue nelle topologie prodotto, lo spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ si dice *spazio vettoriale topologico*. □

Nel seguito parleremo brevemente di spazio vettoriale topologico X in luogo di $(X, \mathcal{T})$ ogniqualvolta il riferimento alla topologia $\mathcal{T}$ sia superfluo.
Tutti gli spazi normati ed in particolare gli spazi euclidei $\mathbb{K}^n$ $(n \geq 1)$ con l'usuale topologia euclidea sono quindi spazi vettoriali topologici sul campo $\mathbb{K}$. Altri esempi di spazi vettoriali sono esaminati in questa sezione e nelle successive.
Il punto di partenza per l'esame delle proprietà degli spazi vettoriali topologici è il risultato seguente che è conseguenza ovvia della definizione di spazio vettoriale topologico.

Proposizione 4.3. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$. Allora, le funzioni*

$$\begin{aligned} &T_a \colon x \in X \mapsto T_a(x) = a + x \in X \qquad && (a \in A); \\ &M_\lambda \colon x \in X \mapsto \lambda x \in X && (\lambda \in \mathbb{K} \text{ e } \lambda \neq 0) \end{aligned}$$

sono omeomorfismi di X su se stesso.

Conseguentemente, tutti e soli gli intorni di un punto $x \in X$ sono della forma $x + V$ con V intorno dell'origine e una famiglia di insiemi $\mathcal{V}_x$ è una base d'intorni di x se e solo se è della forma

$$\mathcal{V}_x = x + \mathcal{V}_0$$

con $\mathcal{V}_0$ base d'intorni dell'origine.
L'invarianza per traslazioni e omotetie della topologia degli spazi vettoriali topologici si riflette nelle proprietà degli intorni dell'origine e nelle proprietà di separazione.

Teorema 4.4. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ e sia V un intorno dell'origine. Allora,*

(a) *V è assorbente;*
(b) *esiste W intorno bilanciato dell'origine tale che $W \subset V$;*
(c) *esiste W intorno bilanciato dell'origine tale che $W + W \subset V$.*

Ogni spazio vettoriale topologico ammette dunque una base di intorni dell'origine formata da intorni bilanciati e risulta inoltre essere uno spazio unioforme: se $\mathcal{V}_0$ è una base di intorni dell'origine, la collezione degli insiemi $B \subset X \times X$ della forma

$$B = \big\{(x, y) \in X \times X : \exists V \in \mathcal{V}_0 \text{ tale che } y - x \in V\big\}$$

è la base di un'uniformità $\mathcal{U}$ di X che induce la topologia di X. (Sezione 3.3).

Dimostrazione. (a) Sia $x \in X$. Essendo $\lambda \mapsto \lambda x$ continua, l'insieme dei λ tali che $\lambda x \in V$ è un intorno aperto dell'origine in $\mathbb{K}$ e quindi contiene $1/t$ per qualche $t > 0$ da cui segue $x \in tV$.
(b) Essendo $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ continua, esistono $\delta > 0$ ed un intorno U dell'origine tali che risulti $\lambda U \subset V$ per $|\lambda| \leq \delta$. Allora l'insieme

$$W = \bigcup \big\{\lambda U : |\lambda| \leq \delta\big\}$$

è un intorno dell'origine bilanciato e contenuto in V.
(c) Per la continuità della somma e per (b) esistono W_1 e W_2 intorni bilanciati dell'origine tali che $W_1 + W_2 \subset V$ e ponendo $W = W_1 \cap W_2$ segue l'asserto. □

Teorema 4.5. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ e siano*

- *$K \subset X$ compatto e $F \subset X$ chiuso;*
- *$K \cap F = \varnothing$.*

Allora, esiste V intorno aperto dell'origine tale che

$$(K + V) \cap (F + V) = \varnothing.$$

In particolare, ogni spazio vettoriale topologico è quindi uno spazio regolare.

Dimostrazione. Se $K = \varnothing$, la conclusione è ovvia poiché $\varnothing + V = \varnothing$ qualunque sia l'intorno dell'origine V.
Sia quindi $K \neq \varnothing$ e $x \in K$. Allora, $x \in F^c$ e quindi $F^c - x$ è un insieme aperto contenente l'origine. Per la continuità della somma esiste allora un intorno V_x dell'origine tale che $V_x + V_x + V_x \subset F^c - x$ e non è restrittivo supporre che V_x sia bilanciato (Teorema 4.4). Si ha allora $(x + V_x + V_x + V_x) \subset F^c$ da cui segue

$$(x + V_x + V_x) \cap (F + V_x) = \varnothing$$

poiché risulta $-V_x = V_x$. Per compattezza esistono un numero finito di punti $x_1, \dots, x_n \in K$ ed altrettanti intorni dell'origine $V_m = V_{x_m}$ $(m = 1, \dots, n)$ tali che

$$K \subset (x_1 + V_1) \cup \cdots \cup (x_n + V_n).$$

L'insieme $V = V_1 \cap \cdots \cap V_n$ è un intorno dell'origine e risulta

$$K + V \subset \bigcup_{1 \le m \le n} (x_m + V_m + V) \subset \bigcup_{1 \le m \le n} (x_m + V_m + V_m)$$

e $(x_m + V_m + V_m) \cap (F + V_m) = \varnothing$ per ogni m da cui segue $(K + V) \cap (F + V) = \varnothing$. $\square$

I risultati seguenti illustrano proprietà dei sottospazi vettoriali e di chiusura e parte interna di insiemi in spazi vettoriali topologici.

Teorema 4.6. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ e sia $Y \subset X$ un sottospazio vettoriale di X. Allora,*

(a) *Y è uno spazio vettoriale topologico nella topologia indotta;*
(b) *$\mathrm{cl}(Y)$ è un sottospazio vettoriale di X.*

Dimostrazione. (a) La topologia indotta su Y è di Hausdorff e le restrizioni delle operazioni algebriche a $Y \times Y$ e $\mathbb{K} \times Y$ sono continue nella topologia indotta.
(b) Si ha $\lambda\,\mathrm{cl}(Y) = \mathrm{cl}(\lambda Y)$ per ogni $\lambda \neq 0$ (Proposizione 4.3) e la stessa uguaglianza vale evidentemente anche per $\lambda = 0$. Inoltre, per ogni coppia di insiemi A e B di X si ha $\mathrm{cl}(A) + \mathrm{cl}(B) \subset \mathrm{cl}(A \times B)$ per la continuità della somma. Risulta allora

$$\lambda\,\mathrm{cl}(Y) + \mu\,\mathrm{cl}(Y) = \mathrm{cl}(\lambda Y) + \mathrm{cl}(\mu Y) \subset \mathrm{cl}(\lambda y + \mu Y) = \mathrm{cl}(Y)$$

e questo prova l'asserto. $\square$

Proposizione 4.7. *Siano X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ e $\mathcal{V}_0$ una base d'intorni dell'origine e sia $A \subset X$ un insieme. Allora,*

$$\mathrm{cl}(A) = \bigcap \{A + V : V \in \mathcal{V}_0\}.$$

Dimostrazione. Sia $x \in \mathrm{cl}(A)$. Per ogni intorno dell'origine $V \in \mathcal{V}_0$, esiste W intorno dell'origine bilanciato tale che $W \subset V$ (Teorema 4.4−(b)). Essendo $x + W$ un intorno di x (Proposizione 4.3−(b)), risulta $(x + W) \cap A \neq \varnothing$ da cui segue

$$x \in A - W = A + W \subset A + V$$

poiché W è bilanciato e $W \subset V$ e questo prova l'inclusione

$$\mathrm{cl}(A) \subset \bigcap \{A + V : V \in \mathcal{V}_0\}.$$

Viceversa, sia

$$x \in \bigcap \left\{A + V : V \in \mathcal{V}_0\right\}.$$

Ogni intorno di x è della forma $x + W$ con W intorno dell'origine. Poiché $-W$ è ancora un intorno dell'origine, esiste $V \in \mathcal{V}_0$ tale che $V \subset -W$ che a sua volta equivale a $-V \subset W$. Si ha allora $x \in A + V$ da cui segue $(x - V) \cap A \neq \varnothing$ e ciò implica $(x + W) \cap A \neq \varnothing$. Questo prova che risulta $x \in \mathrm{cl}(A)$ e questo completa la dimostrazione. $\square$

Proposizione 4.8. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ e sia $B \subset X$ un insieme bilanciato. Allora,*

(a) $\mathrm{cl}(B)$ *è bilanciato;*
(b) *se* $0 \in \mathrm{int}(B)$, *anche* $\mathrm{int}(B)$ *è bilanciato.*

Dimostrazione. (a) Per $0 < |\lambda| \leq 1$ si ha $\lambda\,\mathrm{cl}(B) = \mathrm{cl}(\lambda B) \subset \mathrm{cl}(B)$ (Proposizione 4.3) e per $\lambda = 0$ l'inclusione $\lambda\,\mathrm{cl}(B) \subset \mathrm{cl}(B)$ è ovvia poiché $0 \in B$.
(b) Come prima, per $0 < |\lambda| \leq 1$ si ha $\lambda\,\mathrm{int}(B) = \mathrm{int}(\lambda B) \subset \mathrm{int}(B)$ e l'inclusione $\lambda\,\mathrm{int}(B) \subset \mathrm{int}(B)$ vale anche per $\lambda = 0$ se $0 \in \mathrm{int}(B)$. □

A conclusione di questa parte forniamo condizioni sufficienti affinché una collezione di insiemi (una base di filtro) sia una base di intorni dell'origine per una topologia di spazio vettoriale topologico.

Teorema 4.9. *Sia X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e sia $\mathcal{V}_0$ una collezione di insiemi tali che*

(a) $0 \in V$ *per ogni* $V \in \mathcal{V}_0$;
(b) *per ogni coppia di insiemi* $V_i \in \mathcal{V}_0$ $(i = 1, 2)$ *esiste* $V \in \mathcal{V}_0$ *tale che* $V \subset V_1 \cap V_2$;
(c) *per ogni* $V \in \mathcal{V}_0$ *esiste* $W \in \mathcal{V}_0$ *tale che* $W + W \subset V$;
(d) *ogni insieme* $V \in \mathcal{V}_0$ *è bilanciato e assorbente;*
(e) *per ogni* $x \neq 0$ *esiste* $V \in \mathcal{V}_0$ *tale che* $x \notin V$.

Allora, le famiglie di insiemi

$$\mathcal{V}_x = x + \mathcal{V}_0, \qquad x \in X,$$

sono basi di intorni per una topologia $\mathcal{T}$ che rende X uno spazio vettoriale topologico.

Dimostrazione. Verifichiamo che le famiglie di insiemi $\mathcal{V}_x$ $(x \in X)$ verificano gli assiomi di base di intorni per una topologia (Proposizione I–2.16). Le proprietà (NB1) e (NB2) non sono altro che (a) e (b). Inoltre, fissati $x \in X$ e $V \in \mathcal{V}_0$ e preso $W \in \mathcal{V}_0$ come in (c), per ogni $y \in x + W$ risulta $y + W \subset x + W + W \subset x + V$ cosicché vale (NB3) per $x + V$ con $V' = x + W$ e $V'' = y + W$ per ogni $y \in x + W$.
Pertanto, le famiglie di insiemi $\mathcal{V}_x$ $(x \in X)$ sono basi di intorni di una topologia $\mathcal{T}$ i cui aperti sono gli insiemi U tali che

$$U \in \mathcal{T} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, x \in X \quad \exists\, V \in \mathcal{V}_0 \,:\, x + V \subset U.$$

La continuità della somma è conseguenza immediata di (c). Relativamente alla moltiplicazione per gli scalari, proviamo che, fissati $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ e $x_0 \in X$, per ogni intorno $V \in \mathcal{V}_0$ esistono $\delta > 0$ e $W \in \mathcal{V}_0$ tali che

$$(*) \qquad \begin{cases} |\lambda - \lambda_0| < \delta \\ x \in x_0 + W \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda x \in \lambda_0 x_0 + V.$$

Per ogni λ e x si ha

$$\lambda x = \lambda_0 x_0 + \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0)$$

e, iterando (c), scegliamo $V' \in \mathcal{V}_0$ tale che risulti

$$V' \cup V' \cup V' \subset V$$

e proviamo che è possibile scegliere $\delta > 0$ e $W \in \mathcal{V}_0$ in modo tale che ciascuno dei tre addendi che seguono $\lambda_0 x_0$ appartenga a V'.
Per l'addendo $\lambda_0(x - x_0)$, scegliamo $n \geq 1$ tale che $n \geq |\lambda_0|$ e, iterando (c), prendiamo $W_n \in \mathcal{V}_0$ tale che risulti

$$\underbrace{W_n \cup \cdots \cup W_n}_{n \text{ volte}} \subset V'.$$

Per $x \in x_0 + W_n$ si ha allora

$$\lambda_0(x - x_0) = n\frac{\lambda_0}{n}(x - x_0) \in W_n \cup \cdots \cup W_n \subset V'$$

poiché $|\lambda_0|/n \le 1$ e W_n è bilanciato. Per il termine successivo, sia $t > 0$ tale che $x_0 \in tV'$ cosicché per $|\lambda - \lambda_0| \le 1/t$ risulta

$$(\lambda - \lambda_0)x_0 = t(\lambda - \lambda_0)(x_0/t) \in t(\lambda - \lambda_0)V' \subset V'$$

poiché V' è bilanciato. Infine, per l'ultimo termine, per $|\lambda - \lambda_0| \le 1$ e $x \in V'$ risulta

$$(\lambda - \lambda_0)(x - x_0) \in (\lambda - \lambda_0)V' \subset V'.$$

Abbiamo così provato che, scegliendo $0 < \delta < \min\{1/t, 1\}$ e $W \in \mathcal{V}_0$ tale che sia $W \subset W_n \cap V'$, vale $(*)$.
Resta infine da provare che la topologia $\mathcal{T}$ sia di Hausdorff. Per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$ sia $V \in \mathcal{V}_0$ tale che $x - y \notin V$ e siano $W' \in \mathcal{V}_0$ associato a V da (b) e $W \in \mathcal{V}_0$ associato a W' da (c). Se fosse $(x + W) \cap (y + W) \neq \varnothing$, si avrebbe $x - y \in W - W \subset W' + W' \subset V$ e ciò è assurdo. □

Spazi vettoriali topologici metrizzabili. Uno spazio vettoriale topologico X sul campo $\mathbb{K}$ con topologia $\mathcal{T}$ si dice

- *metrizzabile* se esiste una metrica $d\colon X \times X \to [0, +\infty)$ su X che ne genera la topologia $\mathcal{T}$;
- *normabile* se esiste una norma $\|\cdot\|\colon X \times X \to [0, +\infty)$ su X che ne genera la topologia $\mathcal{T}$.

Gli spazi vettoriali topologici metrizzabili si caratterizzano come gli spazi vettoriali topologici che verificano il primo assioma di numerabilità ovvero ammettono una base di intorni dell'origine (al più) numerabile.

Teorema 4.10. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *X è metrizzabile;*
(b) *X ammette una base di intorni dell'origine $\mathcal{V}_0$ (al più) numerabile.*

In tal caso la metrica d di X può essere scelta in modo tale che

- *si abbia $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ per ogni $x, y, z \in X$;*
- *le palle $B_\delta = B_\delta(0)$ $(\delta > 0)$ siano bilanciate.*

Una metrica d su uno spazio vettoriale X per cui vale la proprietà (a) si dice *invariante.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare soltanto che (b) implica (a). Per Teorema 4.4 possiamo supporre che la base numerabile di intorni dell'origine $\mathcal{V}_0 = \{V_n\}_n$ sia formata da insiemi bilanciati tali che

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n, \qquad n \ge 1.$$

Denotiamo con $\mathbb{Q}_d$ l'insieme dei razionali diadici di $[0, 1)$: $r \in \mathbb{Q}_d$ se $0 \le r < 1$ è della forma

$$r = \sum_{n \ge 1} c_n(r)/2^n$$

con $c_n(r) \in \{0, 1\}$ e $c_n(r) = 1$ per un numero finito di indici n soltanto e per ogni razionale diadico poniamo

$$A(r) = \sum_{n \ge 1} c_n(r)V_n, \qquad r \in \mathbb{Q}_d,$$

dove la somma di intorni a destra è finita. Estendiamo la definizione di $A(r)$ ponendo $A(r) = X$ per $r \in \mathbb{Q}$ con $r \geq 1$ e proviamo che risulta

$$(**) \qquad A(r) + A(s) \subset A(r+s), \qquad r\,,s \in \mathbb{Q}_d.$$

A tal fine, è sufficiente provare per induzione che per ogni n vale la seguente proprietà: per ogni coppia $r, s \in \mathbb{Q}_d$ con $r + s < 1$ e $c_m(r) = c_m(s) = 0$ per ogni $m > n$, risulta

$$A(r) + A(s) \subset A(r+s).$$

Per $n = 1$ deve essere $r = 0$ o $s = 0$ (o entrambi) nel qual caso vale banalmente $(**)$. Supponiamo quindi che la proprietà sia vera per $n-1$ per qualche $n \geq 2$. Consideriamo allora $r\,,s \in \mathbb{Q}_d$ tali che risulti $r + s < 1$ e $c_m(r) = c_m(s) = 0$ per $m > n$ e definiamo r' e s' ponendo

$$r = r' + c_n(r)/2^n \qquad \text{e} \qquad s = s' + c_n(s)/2^n.$$

Allora, r' e s' appartengono a $\mathbb{Q}_d$ e risulta

$$A(r) = A(r') + c_n(r)V_n \qquad \text{e} \qquad A(s) = A(s') + c_n(s)V_n.$$

Poiché risulta $c_m(r') = c_m(s') = 0$ per $m > n-1$ e $r' + s' \leq r + s < 1$, per l'ipotesi di induzione risulta

$$A(r') + A(s') \subset A(r' + s')$$

e da ciò segue

$$\begin{aligned} A(r) + A(s) &= A(r') + A(s') + c_n(r)V_n + c_n(s)V_n \subset \\ &\subset A(r'+s') + c_n(r)V_n + c_n(s)V_n. \end{aligned}$$

Se risulta $c_n(r) = c_n(s) = 0$, deve essere $r = r'$ e $s = s'$ nel qual caso si ha banalmente $A(r) + A(s) \subset A(r+s)$. Altrimenti, deve essere $c_n(r) = 0$ e $c_n(s) = 1$ o viceversa oppure deve essere $c_n(r) = c_n(s) = 1$. Nel primo caso si ha

$$\begin{aligned} A(r) + A(s) \subset A(r'+s') + V_n &= A(r+s') + V_n = \\ &= A(r + s' + 1/2^n) = A(r+s). \end{aligned}$$

mentre nel secondo caso si ha

$$\begin{aligned} A(r) + A(s) &= A(r'+s') + V_n + V_n \subset \\ &\subset A(r'+s') + V_{n-1} = \\ &= A(r'+s') + A(1/2^{n-1}) \subset A(r'+s'+1/2^{n-1}) = A(r+s) \end{aligned}$$

per l'ipotesi di induzione. Quindi, la proprietà vale per induzione e questo completa la dimostrazione di $(**)$.

Definiamo ora la funzione

$$p(x) = \inf\left\{r :\ x \in A(r)\right\}, \qquad x \in X,$$

e poniamo

$$d(x\,,y) = p(x-y), \qquad x\,,y \in X,$$

e proviamo che d è una metrica su X che induce la topologia di X. In tal caso, d è una metrica invariante su X per la quale risulta $d(x\,,y) \leq 1$ per ogni x e y per costruzione.

Poichè $0 \in A(r)$ per ogni $r \in \mathbb{Q}_d$, per $(**)$ si ha

$$r\,,s \in \mathbb{Q}_d \text{ e } r < s \qquad \Longrightarrow \qquad A(r) \subset A(r) + A(s-r) \subset A(s)$$

e quindi la famiglia di insiemi $\{A(r) :\ r \in \mathbb{Q}_d\}$ risulta totalmente ordinata per inclusione.

Proviamo ora che risulta

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \qquad x\,,y \in X$$

Siano infatti $x\,,y \in X$ e $p(x)+p(y)<1$ altrimenti non c'è nulla da provare. Fissato $\varepsilon>0$, esistono allora $r\,,s \in \mathbb{Q}_d$ tali che

$$\begin{cases} p(x)<r \\ p(y)<s \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad r+s<p(x)+p(y)+\varepsilon .$$

Quindi deve essere $x \in A(r)$ e $y \in A(s)$ da cui segue $x+y \in A(r+s)$ per $(**)$. Si ha allora

$$p(x+y)<p(x)+p(y)+\varepsilon$$

e dall'arbitrarietà di $\varepsilon>0$ segue l'asserto. Pertanto si ha

$$d(x\,,y)=p(x-y) \leq p(x-z)+p(z-y)=d(x\,,z)+d(z\,,y), \qquad x\,,y \in X,$$

e quindi per d vale la disuguaglianza triangolare. Inoltre, ogni insieme $A(r)$ è bilanciato e quindi risulta $x \in A(r)$ se e solo se risulta $-x \in A(r)$ per ogni $r \in \mathbb{Q}_d$ e $r \in \mathbb{Q}$ con $r \geq 1$. Risulta allora

$$p(x)=p(-x), \qquad x \in X,$$

da cui segue $d(x\,,y)=d(y\,,x)$ per ogni $x\,,y \in X$. Ancora, da $0 \in A(r)$ per ogni $r \in \mathbb{Q}_d$ segue $p(0)=0$ e quindi risulta $d(x\,,x)=0$ per ogni $x \in X$. Viceversa, se $x \in X$ e $x \neq 0$, esiste n opportuno tale che $x \notin V_n$. Per tale n si ha $V_n=A(1/2^n)$ cosicché, essendo gli insiemi $\{A(r) : r \in \mathbb{Q}_d\}$ totalmente ordinati per inclusione, deve essere $p(x) \geq 1/2^n$ e da ciò segue $d(x\,,y)>0$ per ogni $x\,,y \in X$ con $x \neq y$. Infine, si ha evidentemente

$$d(x+z\,,y+z)=d(x\,,y), \qquad x\,,y\,,z \in X.$$

Abbiamo così provato che d è una metrica invariante su X.
Resta ora da provare soltanto che le palle nella metrica d con centro nell'origine $B_\delta=B_\delta(0)$ $(\delta>0)$ sono insiemi bilanciati e che la topologia $\mathcal{T}_d$ generata dalla metrica d coincide con la topologia $\mathcal{T}$ di X.
Relativamente alla prima affermazione, si ha $B_\delta=X$ per $\delta>1$ e

$$B_\delta=\big\{x \in X : \, p(x)<\delta\big\}=\bigcup\big\{A(r) : \, r \in \mathbb{Q}_d \text{ e } 0<r<\delta\big\}\,,$$

per $0<\delta \leq 1$ cosicchè, essendo ogni insieme $A(r)$ bilanciato, anche B_δ risulta tale.
Relativamente alla seconda affermazione, fissato $x \in B_\delta$, sia $r \in \mathbb{Q}$ tale che $0<r<\delta$ e $x \in A(r)$ cosicché, scelto $s \in \mathbb{Q}$ tale che $s>0$ e $r+s<\delta$, risulta

$$x+A(s) \subset A(r)+A(s) \subset A(r+s)$$

da cui segue $x+A(s) \subset B_\delta$. Questo prova che le palle B_δ sono insiemi $\mathcal{T}-$aperti e conseguentemente risulta $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}$. Viceversa, si ha

$$\delta<1/2^n \qquad \Longrightarrow \qquad B_\delta \subset A(1/2^n)=V_n$$

poiché gli insiemi $A(r)$ sono totalmente ordinati per inclusione e quindi, essendo $\mathcal{T}_d$ invariante per traslazioni, risulta $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_d$ e questo completa la dimostrazione. □

COROLLARIO 4.11. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ metrizzabile. Allora, esiste una metrica invariante d che induce la topologia di X.*

Insiemi limitati. Introduciamo in questa parte una nozione di limitatezza per insiemi di uno spazio vettoriale topologico che dipende dalla struttura uniforme di tali spazi e non dipende dalla presenza di una metrica. Ne esaminiamo le principali proprietà e la confrontiamo con la nozione di limitatezza metrica degli spazi vettoriali topologici metrizzabili.

DEFINIZIONE 4.12. Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$. Un insieme $E \subset X$ con la seguente proprietà: per ogni intorno V dell'origine esiste $s = s(V) > 0$ tale che

$$t > s \qquad \Longrightarrow \qquad E \subset tV$$

si dice (*topologicamente*) *limitato.* □

In uno spazio vettoriale topologico un insieme è quindi (topologicamente) limitato quando i suoi punti sono simultanemente assorbiti da ogni intorno dell'origine e il significato di topologicamente illimiatto è ovvio.
I risultati seguenti elencano proprietà elementari degli insiemi limitati e li caratterizzano in termini di successioni.

PROPOSIZIONE 4.13. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ e siano $E, F \subset X$ due insiemi. Allora,*

(a) *$E \subset F$ e F (topologicamente) limitato $\Longrightarrow$ E (topologicamente) limitato;*
(b) *E, F (topologicamente) limitati $\Longrightarrow$ $E \cup F$ (topologicamente) limitato;*
(c) *E (topologicamente) limitato $\Longrightarrow$ $\mathrm{cl}(E)$ (topologicamente) limitato.*

DIMOSTRAZIONE. Proviamo solo l'affermazione (c) poiché le altre sono ovvie.
(c) Essendo X uno spazio T_3 (Teorema 4.5), per ogni intorno V dell'origine fissato, esiste un intorno W dell'origine tale che $\mathrm{cl}(W) \subset V$. Essendo E (topologicamente) limitato, si ha $E \subset tW$ per ogni $t > s$ per $s > 0$ opportuno. Per tali $t > s$ si ha allora $\mathrm{cl}(E) \subset \mathrm{cl}(tW) = t\,\mathrm{cl}(W) \subset tV$ e questo prova l'asserto. □

TEOREMA 4.14. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ e sia $E \subset X$ un insieme. Allora, le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(a) *E (topologicamente) limitato;*
(b) *per ogni successione $\{x_k\}_k \subset E$ e per ogni successione di scalari $\{\lambda_k\}_k$ tale che $\lambda_k \to 0$ per $k \to +\infty$ risulta $\lambda_k x_k \to 0$ per $k \to +\infty$ in X.*

DIMOSTRAZIONE. (a) Siano $\{x_k\}_k \subset E$ e $\{\lambda_k\}_k$ successioni di vettori e scalari come in (b) e sia V un intorno dell'origine che possiamo supporre bilanciato. Sia quindi $s = s(V) > 0$ tale che risulti $E \subset tV$ per $t > s$. Si ha allora $|\lambda_k| < 1/s$ definitivamente cosicché per ogni k grande con $\lambda_k \neq 0$ risulta $x_k \in E \subset V/|\lambda_k|$ da cui segue $|\lambda_k|x_k \in V$ definitivamente quando $\lambda_k \neq 0$ e a maggior ragione quando $\lambda_k = 0$. Essendo V bilanciato, risulta $\lambda_k x_k \in V$ definitivamente e questo prova (b).
(b) Se E fosse (topologicamente) illimitato, per qualche intorno V dell'origine e per ogni k si avrebbe $x_k \in E \setminus (t_k V)$ per $t_k > k$ opportuno. Si avrebbe allora $t_k \to 0$ per $k \to +\infty$ e $x_k/t_k \notin V$ per ogni k in contraddizione con l'ipotesi. □

Gli insiemi compatti risultano essere limitati come prova il risultato seguente.

TEOREMA 4.15. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ e sia $K \subset X$ un insieme compatto. Allora, K è (topologicamente) limitato.*

DIMOSTRAZIONE. Sia V un intorno dell'origine aperto e bilanciato (Teorema 4.4 e Proposizione 4.8). Essendo V assorbente (Teorema 4.4), risulta

$$X = \bigcup_{s>0} sV$$

cosicché, essendo sV aperto per ogni $s > 0$, per compattezza esistono numeri positivi $s_1 < \cdots < s_n$ tali che $K \subset s_1 V \cup \cdots \cup s_n V$. Essendo V bilanciato, risulta $s_1 V \subset s_2 V \subset \cdots \subset s_n V$ cosicché, posto $s = s_n$ risulta $K \subset sV$ da cui segue $K \subset tV$ per $t > s$ per lo stesso motivo. □

In accordo con la terminologia già introdotta per spazi metrici e normati, uno spazio vettoriale topologico X sul campo $\mathbb{K}$

- è *localmente* (*topologicamente*) *limitato* se esiste V intorno (topologicamente) limitato dell'origine;
- è *localmente compatto* se esiste V intorno compatto dell'origine;
- ha la *proprietà di Heine–Borel* se ogni insieme chiuso e (topologicamente) limitato è compatto.

Sugli spazi vettoriali topologici con la proprietà di Heine–Borel e localmente compatti ritorneremo successivamente. Relativamente alla locale limitatezza, ogni spazio vettoriale topologico localmente limitato risulta metrizzabile come conseguenza del risultato seguente e di Teorema 4.10.

TEOREMA 4.16. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ e siano*

- *V intorno* (*topologicamente*) *limitato dell'origine;*
- *$r_k > 0$ $(k \geq 1)$ tali che $\lim_{k\to+\infty} r_k = 0$.*

Allora, la famiglia di insiemi $\{r_k V : k \geq 1\}$ è una base d'intorni dell'origine.

DIMOSTRAZIONE. Sia U in intorno dell'origine in X. Poiché V è limitato, esiste $s = s(U) > 0$ tale che risulti $V \subset tU$ per $t > s$. Sia $k \geq 1$ tale che $1/r_k > s$. Risulta allora $V \subset U/r_k$ ovvero $r_k V \subset U$ e questo prova l'asserto. □

Da questo teorema e da Corollario 4.11 segue il risultato seguente.

COROLLARIO 4.17. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ localmente* (*topologicamente*) *limitato. Allora, X è metrizzabile con una metrica d invariante.*

In uno spazio vettoriale topologico X metrizzabile convivono dunque due nozioni di limitatezza: se d è una metrica invariante su X che induce la topologia di X, un insieme $E \subset X$ può essere (*topologicamente*) *limitato* o *d – limitato* cioè limitato rispetto alla metrica invariante d. Il teorema seguente illustra le relazioni tra queste due nozioni di limitatezza.

TEOREMA 4.18. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ e sia $E \subset X$ un insieme. Allora,*

(a) *se X è metrizzabile e d è una metrica invariante su X che ne induce la topologia, si ha*

$$E \text{ (topologicamente) limitato} \qquad \Longrightarrow \qquad E \ d\text{ – limitato;}$$

(b) *se X è normabile e d è la metrica indotta dalla norma di X, si ha*

$$E \text{ (topologicamente) limitato} \qquad \Longleftrightarrow \qquad E \ d\text{ – limitato.}$$

In (a) l'implicazione opposta è in genere falsa: la metrica invariante di Teorema 4.10 è limitata e in generale, se d è una metrica invariante che induce la topologia di X, la metrica

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \qquad x,y \in X,$$

è limitata e induce la stessa topologia cosicché per tali metriche lo spazio vettoriale X stesso è limitato. Tuttavia X non può essere (topologicamente) limitato (Esercizio 4.2). Come abbiamo visto, la spiegazione di ciò risiede nel fatto che la limitatezza non è una proprietà topologica ma dipende dalla struttura uniforme dello spazio e uniformità corrispondenti a metriche non equivalenti possono indurre la medesima topologia.

Dimostrazione. (a) Siano $B_r = B_r(0)$ $(r > 0)$ le palle aperte con centro nell'origine nella metrica invariante d. Poiché E è (topologicamente) limitato e B_1 è un intorno dell'origine, si ha $E \subset tB_1$ per ogni $t > s$ per $s > 0$ opportuno. Per ogni $x \in X$ e $n \geq 1$ si ha

$$d(nx\,,0) \leq \sum_{1\leq m\leq n} d\big((m-1)x\,,mx\big) \leq nd(x\,,0)$$

per l'invarianza della metrica d. Pertanto, risulta $nB_1 \subset B_n$ per ogni n cosicché, scelto $n > s$, si ha $E \subset nB_1 \subset B_n$ e questo prova (b).

(b) Siano $B_r = B_r(0)$ $(r > 0)$ le palle aperte con centro nell'origine in una norma che induce la topologia di X e sia $r_0 > 0$ tale che $E \subset B_{r_0}$. Poiché le palle B_r $(r > 0)$ sono una base di intorni dell'origine, si ha $B_r \subset V$ per $r > 0$ opportuno. Posto $s = s(V) = r_0/r > 0$, per $t > s$ si ha $E \subset B_{r_0} \subset B_{tr} = tB_r \subset tV$ e questo prova (a). □

Nell'ambito degli spazi vettoriali topologici la nozione di limitatezza di un insieme sarà sempre intesa nel senso di limitatezza topologica come in Definizione 4.12 a meno di esplicita diversa indicazione.

Condizione di Cauchy e completezza. La struttura uniforme degli spazi vettoriali topologici determina una nozione di condizione di Cauchy che è indipendente dalla presenza di una metrica.

Definizione 4.19. Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$. Una successione di vettori $x_k \in X$ $(k \geq 1)$ con la seguente proprietà: per ogni intorno V dell'origine esiste $k_0 = k_0(V)$ tale che risulti

$$h\,,k \geq k_0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_k - x_h \in V$$

si dice che verifica *la condizione* (*topologica*) *di Cauchy in* X. □

Una successione che verifica la condizione di Cauchy in X si dice anche brevemente *successione* (*topologicamente*) *di Cauchy in* X.
Come per la limitatezza, in uno spazio vettoriale topologico X metrizzabile convivono dunque due nozioni di successioni di Cauchy: se d è una metrica invariante su X che ne induce la topologia, una successione $\{x_k\}_k$ di elementi di X può essere (topologicamente) di Cauchy in X ovvero di Cauchy nella metrica d. Poiché la metrica d è invariante, si ha

$$d(x_k\,, x_h) = d(x_k - x_h\,, 0)$$

per ogni h e k cosicché, essendo le palle $B_r(0)$ $(r > 0)$ una base di intorni dell'origine in X, la successione $\{x_k\}_k$ è (topologicamente) di Cauchy in X se e solo se è di Cauchy nella metrica d.
Pertanto, in uno spazio vettoriale topologico X metrizzabile le successioni (topologicamente) di Cauchy in X coincidono con le successioni di Cauchy in una qualunque metrica invariante d di X. Conseguentemente, negli spazi vettoriali topologici parleremo di successioni di Cauchy senza ulteriori specificazioni.
Le proprietà delle successioni di Cauchy in spazi vettoriali topologici non sono dissimili dalle proprietà che valgono per le successioni di Cauchy in spazi metrici.

Teorema 4.20. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$. Allora,*

(a) *ogni successione convergente è di Cauchy;*
(b) *ogni successione di Cauchy è limitata.*

Uno spazio vettoriale topologico si dice (*sequenzialmente*) *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente.

La nozione di condizione di Cauchy in uno spazio vettoriale topologico si estende in modo ovvio alle successioni generalizzate. Come accade per le successioni, ogni successione generalizzata convergente è di Cauchy mentre può accedere che una successione generalizzata convergente o di Cauchy sia illimitata.
Uno spazio vettoriale topologico si dice *completo* se ogni successione generalizzata di Cauchy è convergente.
Il teorema seguente riassume le relazioni tra completezza e completezza sequenziale nell'ambito degli spazi vettoriali topologici. La dimostrazione è la stessa di ....

Teorema 4.21. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$. Allora,*

$$X \text{ completo} \qquad \Longrightarrow \qquad X \text{ (sequenzialmente) completo.}$$

Inoltre, se X è metrizzabile, si ha

$$X \text{ (sequenzialmente) completo} \qquad \Longleftrightarrow \qquad X \text{ completo.}$$

Se X non è metrizzabile, l'implicazione opposta di (a) può essere falsa (Teorema 5.9 e Esercizio 5.4).

Operatori lineari continui e operatori lineari limitati. La struttura uniforme degli spazi vettoriali topologici rende possibile parlare di funzioni uniformemente continue tra tali spazi oltre che continue. Alla luce della definizione di uniformità degli spazi vettoriali topologici, una funzione $f\colon X \to Y$ tra due spazi vettoriali topologici X e Y sul medesimo campo $\mathbb{K}$ si dice *uniformemente continua da X in Y* se vale la seguente proprietà: per ogni intorno V dell'origine in Y, esiste un intorno U dell'origine in X tale che risulti

$$x_1, x_2 \in X \text{ e } x_1 - x_2 \in U \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) - f(x_2) \in V.$$

Consideriamo in questa parte due spazi vettoriali topologici X e Y sul medesimo campo $\mathbb{K}$ e denotiamo con

$$\mathrm{L}(X, Y) = \big\{T \in \mathcal{L}(X, Y) : T \text{ continuo}\big\}$$

il sottospazio di $\mathcal{L}(X, Y)$ formato dagli operatori lineari continui da X in Y. Le proprietà di continuità degli operatori lineari sono riassunte nel risultato seguente la cui dimostrazione è ovvia.

Proposizione 4.22. *Siano X e Y due spazi vettoriali topologici sul campo $\mathbb{K}$ e sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un operatore lineare. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *T è continuo in $x_0 = 0$;*
(b) *T è continuo in X;*
(c) *T è uniformemente continuo in X*

Siano X e Y due spazi vettoriali topologici sul campo $\mathbb{K}$. Un operatore lineare $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tale che

- T è un isomorfismo lineare di X su Y;
- $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ e $T^{-1} \in \mathrm{L}(Y, X)$;

si dice *isomorfismo di spazi vettoriali topologici di X su Y* o anche *isomorfismo topologico di X su Y*. Denotiamo come al solito con

$$\mathrm{Iso}(X, Y) = \big\{T \in \mathrm{L}(X, Y) : T \text{ isomorfismo topologico di } X \text{ su } Y\big\}$$

l'insieme (eventualmente vuoto) formato da tutti gli isomorfismi di spazi vettoriali topologici di X su Y ponendo per brevità $\mathrm{Iso}(X) = \mathrm{Iso}(X, X)$ per $Y = X$.
È chiaro che, se T è un isomorfismo di spazi vettoriali topologici di X su Y, l'operatore lineare inverso T^{-1} è a sua volta un isomorfismo di spazi vettoriali topologici di Y su X. Inoltre, se Z denota un ulteriore spazio vettoriale topologico

sul campo $\mathbb{K}$ e se $S \in \mathrm{Iso}(X\,,Y)$ e $T \in \mathrm{Iso}(Y\,,Z)$ sono isomorfismi di spazi vettoriali topologici di X su Y e di Y su Z rispettivamente, anche il prodotto di composizione TS è un isomorfismo di spazi vettoriali topologici di X su Z. In particolare, $\mathrm{Iso}(X)$ è un gruppo rispetto al prodotto di composizione.
Gli spazi vettoriali topologici X ed Y si dicono *isomorfi come spazi vettoriali topologici* se esiste un isomorfismo di spazi vettoriali topologici di X su Y e la relazione così definita è una relazione d'equivalenza tra spazi vettoriali topologici sullo stesso campo.
A partire dalla nozione di insieme limitato possiamo introdurre la nozione di operatore lineare limitato tra spazi vettoriali topologici.

Definizione 4.23. Siano X e Y due spazi vettoriali topologici sul campo $\mathbb{K}$. Un operatore lineare $T \in \mathcal{L}(X\,,Y)$ tale che

$$E \subset X \text{ limitato} \qquad \Longrightarrow \qquad T(E) \text{ limitato}$$

si dice *limitato*. □

Gli operatori lineari limitati sono dunque gli operatori lineari tra spazi vettoriali topologici che mandano insiemi limitati in insiemi limitati. Questa definizione grneralizza la corrispondente definizione per operatori lineari tra spazi normati e, come già osservato, si discosta dalla definizione di funzione limitata tra due spazi metrici. Anche per gli operatori lineari tra spazi vettoriali topologici, la limitatezza sarà sempre intesa nel senso della definizione precedente.
L'insieme degli operatori lineari limitati da X in Y è un sottospazio di $\mathcal{L}(X\,,Y)$ (Esercizio 4.2) ed il risultato seguente illustra le relazioni tra limitatezza e continuità di un operatore lineare.

Teorema 4.24. *Siano X e Y due spazi vettoriali topologici sul campo $\mathbb{K}$ e sia $T \in \mathcal{L}(X\,,Y)$ un operatore lineare. Allora,*

(a) *T continuo $\Longrightarrow$ T limitato;*
(b) *T limitato e X metrizzabile $\Longrightarrow$ T continuo.*

L'equivalenza tra continuità e limitatezza per gli operatori lineari può essere falsa se lo spazio vettoriale topologico X non è metrizzabile (Esercizio **??**) ma è comunque sempre valida per i funzionali lineari come vedremo nel successivo Teorema 4.25.

Dimostrazione. (a) Sia $E \subset X$ un insieme limitato e sia V un intorno di 0 in Y cosicché, essendo T continuo, esiste un intorno aperto U di 0 in X tale che risulti $T(U) \subset V$. Essendo E limitato, risulta $E \subset tU$ per $t > s$ con $s = s(U) > 0$ opportuno e per tali t si ha $T(E) \subset tT(U) \subset tV$. Pertanto, $T(E)$ è un insieme limitato in Y e questo prova l'asserto.
(b) Poiché X è metrizzabile, è sufficiente provare che risulta $Tx_k \to 0$ per $k \to +\infty$ in Y per ogni successione $\{x_k\}_k$ di elementi di X tale che $x_k \to 0$ per $k \to +\infty$.
Sia d una metrica invariante su X che induce la topologia di X e sia $\{x_k\}_k$ una successione in X che possiamo supporre definita per $k \geq 1$ tale che risulti $x_k \to 0$ per $k \to +\infty$. Scegliamo allora una successione strettamente crescente di interi $\{k_h\}_h$ tale che risulti

$$k \geq k_h \qquad \Longrightarrow \qquad d(0, x_k) \leq 1/h^2$$

per ogni h e definiamo $\lambda_k > 0$ per $k \geq 1$ ponendo

$$\begin{cases} \lambda_k = 1 & \text{se } k < k_1 \\ \lambda_k = h & \text{se } k_h \leq k < k_{h+1}. \end{cases}$$

La successione $\{\lambda_k\}_k$ così definita diverge a $+\infty$ e per $k_h \leq k < k_{h+1}$ risulta

$$0 \leq d(\lambda_k x_k, 0) = d(hx_k, 0) \leq \sum_{1\leq j\leq h} d\big(jx_k, (j-1)x_k\big) = hd(x_k, 0) \leq 1/h$$

per l'invarianza della metrica d e da questo segue che $\lambda_k x_k \to 0$ per $k \to +\infty$ in X. Pertanto, la successione $\{\lambda_k x_k\}_k$ è limitata in X cosicché lo stesso vale in Y per la successione delle immagini $\{T(\lambda_k x_k)\}_k$ e da ciò segue infine

$$Tx_k = T(\lambda_k x_k)/\lambda_k \to 0 \qquad \text{per } k \to +\infty$$

per Teorema 4.14. □

In accordo con la terminologia già introdotta per gli spazi normati, lo spazio vettoriale dei funzionali lineari $L \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ continui si dice *duale* (*topologico*) *di* X e si denota con

$$X^* = \mathrm{L}(X, \mathbb{K}).$$

Il risultato seguente caratterizza i funzionali lineari continui su uno spazio vettoriale topologico e costituisce la versione per spazi vettoriali topologici di Teorema 1.17.

Teorema 4.25. *Siano X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ e $L \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ un funzionale lineare con $L \neq 0$. Allora,*

(a) *L è un'applicazione aperta;*

e inoltre le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(b) *L è continuo;*
(c) *$\ker(L)$ è un sottospazio chiuso di X;*
(d) *esiste V intorno dell'origine tale che $\sup\{|Lx| : x \in V\} < +\infty$.*

In particolare, un funzionale lineare su uno spazio vettoriale topologico è continuo se e solo se è limitato ed esistono funzionali lineari sequenzialmente continui ma non continui (Esercizi 5.7 e 5.8).

Dimostrazione. (a) Sia $U \subset X$ un insieme aperto (non vuoto). Fissato $\lambda_0 \in L(V)$, sia $x_0 \in U$ tale che $Lx_0 = \lambda_0$ e sia V un intorno aperto e bilanciato dell'origine tale che $x_0 + V \subset U$. Essendo V assorbente ed essendo $L \neq 0$ per ipotesi, esiste $y \in V$ tale che risulti $Ly \neq 0$ e, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ con

$$|\lambda - \lambda_0| \leq |Ly|$$

risulta

$$x_0 + \frac{\lambda - \lambda_0}{|Ly|} y \in x_0 + V \subset U \qquad \text{e} \qquad L\left(x_0 + \frac{\lambda - \lambda_0}{|Ly|} y\right) = \lambda.$$

Questo prova (a) e proviamo l'equivalenza delle restanti affermazioni procedendo ciclicamente.

(b) Essendo L continuo, $\ker(L) = L^{-1}(\{0\})$ è un sottospazio chiuso di X.

(c) Sia $L \neq 0$. Esiste allora $x_0 \in X$ tale che risulti $Lx_0 \neq 0$ e dunque esiste un intorno V dell'origine di X che possiamo supporre bilanciato tale che risulti $(x_0 + V) \cap \ker(L) = \varnothing$ (Teorema 4.5). Si ha quindi

$$L(x_0 + V) = Lx_0 + L(V) \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

per linearità e, poiché V è bilanciato, dall'inclusione precedente segue che $L(V)$ deve essere limitato. Si ha infatti $L(V) \subset \mathbb{K} \setminus \{Lx_0\}$ e, se fosse $L(V)$ illimitato, esisterebbe $x \in V$ per il quale si avrebbe $|Lx| > |Lx_0|$. Essendo V bilanciato, posto $\lambda = Lx_0/Lx$, si avrebbe $\lambda x \in V$ e $L(\lambda x) = Lx_0$ e ciò è assurdo.

(d) Sia V intorno dell'origine in X tale che risulti

$$\sup\big\{|Lx|:\ x\in V\big\}\le M.$$

Fissato $\varepsilon>0$, l'insieme $V_\varepsilon=(\varepsilon/M)V$ è un intorno di 0 in X (Proposizione 4.3) e risulta

$$x\in V_\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad Mx/\varepsilon\in V \quad\Longrightarrow\quad |L(Mx/\varepsilon)\le M \quad\Longrightarrow\quad |Lx|\le\varepsilon.$$

Pertanto, L è continuo in $x_0=0$ e quindi è continuo in X. □

Spazi vettoriali topologici di dimensione finita. Esaminiamo in questa parte gli spazi vettoriali topologici di dimensione finita sulla linea di quanto fatto in precedenza per gli spazi normati di dimensione finita e proviamo in particolare che, come nel caso degli spazi normati, ogni isomorfismo lineare di $\mathbb{K}^n$ su uno spazio vettoriale topologico X di dimensione n è un isomorfismo di spazi vettoriali topologici.

TEOREMA 4.26. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ con $\dim X=n$ e sia $L\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^n,X)$ un isomorfismo lineare di $\mathbb{K}^n$ su X. Allora,*

$$L\in\mathrm{Iso}(\mathbb{K}^n,X).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{e_1,\dots,e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$ cosicché i vettori u_m definiti da $u_m=Le_m$ $(m=1,\dots,n)$ formano una base di X e risulta

$$L\lambda=\lambda^1u_1+\cdots+\lambda^nu_n,\qquad \lambda=\lambda^1e_1+\cdots+\lambda^ne_n\in\mathbb{K}^n.$$

Pertanto L risulta continuo per la continuità delle operazioni di spazio vettoriale (Proposizione 4.3)
Resta da provare che anche L^{-1} è continuo. Consideriamo a tal fine la sfera

$$S_r=\big\{\lambda\in\mathbb{K}^n:\ \|\lambda\|=r\big\}$$

di $\mathbb{K}^n$ di raggio $r>0$ fissato. Poiché S_r è un insieme compatto e L è continuo, l'insieme $K=L(S)$ è compatto in X. Inoltre, $0\notin K$ poiché L è iniettivo e $0\notin S_r$. Esiste allora un intorno bilanciato V_r dell'origine tale che $V_r\cap K=\varnothing$ (Teorema 4.5) e quindi deve essere $L^{-1}(V_r)\cap S_r=\varnothing$. Poiché V_r è bilanciato e L è lineare, anche $L^{-1}(V_r)$ è bilanciato e quindi in particolare è connesso. Poiché $L^{-1}(V_r)$ contiene l'origine, deve essere contenuto nella componente connessa di $\mathbb{K}^n\setminus S_r$ che contiene l'origine cioè nella palla aperta $B_r(0)$. Abbiamo così provato che risulta $L^{-1}(V_r)\subset B_r(0)$ che equivale a $V_r\subset L(B_r(0))$ poiché L è biettivo. Per l'arbitrarietà di $r>0$ questo prova che L^{-1} è continuo in $x_0=0$ e questo completa la dimostrazione (Proposizione 4.22). □

Nei corollari seguenti sono riassunte le conseguenze di questo risultato. Omettiamo le dimostrazioni quando ovvie.

COROLLARIO 4.27. *Siano X e Y due spazi vettoriali topologici sul campo $\mathbb{K}$ con $\dim X<+\infty$. Allora,*

(a) *X è normabile;*
(b) *se $\dim X=\dim Y<+\infty$, gli spazi X e Y sono isomorfi come spazi vettoriali topologici;*
(c) *ogni operatore lineare $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ è continuo.*

In particolare, se X ha dimensione finita esiste una norma che induce la topologia di X e lo rende uno spazio di Banach e risulta $\mathcal{L}(X,Y)=\mathrm{L}(X,Y)$.

COROLLARIO 4.28. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ e sia $Y\subset X$ un sottospazio vettoriale con $\dim Y<+\infty$. Allora,*

$$\dim Y<+\infty \qquad\Longrightarrow\qquad Y\ \textit{chiuso}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\dim Y = n$ e sia $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{K}^n, Y)$ un isomorfismo di $\mathbb{K}^n$ su Y. Ragionando come nella seconda parte della dimostrazione di Teorema 4.26 si determina un intorno V dell'origine in X tale che risulti

$$T^{-1}(V \cap Y) \subset B_1(0)$$

e non è restrittivo supporre che V sia aperto.
Consideriamo ora $y_0 \in \mathrm{cl}(Y)$ fissato e proviamo che risulta $y_0 \in Y$. Si ha $y_0 \in rV$ per qualche $r > 0$ e proviamo che risulta $y_0 \in \mathrm{cl}(Y \cap (rV))$. Infatti, per ogni intorno W di 0 in X l'insieme $(y_0 + W) \cap (rV)$ è un intorno di y_0 in X cosicché risulta $(y_0 + W) \cap (rV) \cap Y \neq \varnothing$ e da ciò segue

$$(y_0 + W) \cap \big(Y \cap (rV)\big) \neq \varnothing.$$

Si ha allora

$$Y \cap (rV) \subset T\big(rB_1(0)\big) \subset T\big(B_r[0]\big)$$

cosicché, essendo $T(B_r[0])$ un insieme compatto di X, esso è anche chiuso in X. Risulta allora $y_0 \in \mathrm{cl}(Y \cap (rV)) \subset T(B_r[0])$ e da $T(B_r[0]) \subset Y$ segue $y_0 \in Y$. □

A conclusione di questa parte individuiamo gli spazi vettoriali topologici localmente compatti e quelli dotati della proprietà di Heine–Borel.

TEOREMA 4.29. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *X è localmente compatto;*
(b) $\dim X < +\infty$.

DIMOSTRAZIONE. Occoprre provare solo che (a) implica (b).
Sia quindi X colalmente compatto e sia V un intorno dell'origine in X con $\mathrm{cl}(V)$ compatta. Allora, V è limitato e quindi gli insiemi $V/2^k$ $(k \geq 1)$ formano una base d'intorni dell'origine in X (Teorema 4.16). Per compattezza esistono $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che risulti

$$\mathrm{cl}(V) \subset (x_1 + V/2) \cup \cdots \cup (x_n + V/2).$$

Sia $Y = \mathrm{span}(\{x_1, \ldots, x_n\})$. Si ha $\dim Y \leq n$ e quindi Y è un sottospazio chiuso di X (Corollario 4.28).
Si ha allora $V \subset Y + V/2$ e quindi, essendo Y un sottospazio, risulta

$$V/2 \subset (Y + V/2)/2 = Y + V/4$$

e da ciò segue nuovamente

$$V \subset Y + V/2 \subset Y + Y + V/4 = Y + V/4.$$

Iterando questo argomento si ricava che deve essere

$$V \subset \bigcap_{k \geq 1} (Y + V/2^k).$$

Poiché gli insiemi $V/2^k$ formano una base d'intorni dell'origine in X, deve essere $V \subset \mathrm{cl}(Y)$ (Proposizione 4.70 cosicché, essendo Y chiuso, risulta $V \subset Y$. Essendo V assorbente, deve essere $Y = X$ e questo prova l'asserto. □

COROLLARIO 4.30. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ tale che*

- *X è localmente limitato;*
- *X ha la proprietà di Heine–Borel.*

Allora, $\dim X < +\infty$.

DIMOSTRAZIONE. Sia V un intorno limitato dell'origine. Allora, $\mathrm{cl}(V)$ è un intorno compatto dell'origine (Proposizione 4.13 – (c)) e quindi X ha dimensione finita per il teorema precedente. □

Spazi quasinormati. Una classe importante di spazi vettoriali topologici è costituita dagli spazi vettoriali in cui la disuguaglianza triangolare degli spazi normati vale in forma più debole.
Sia X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Una funzione $[\cdot]\colon X \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

(QN1) $[x] = 0 \iff x = 0$;
(QN2) $[\lambda x] = |\lambda| \cdot [x] \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall\, x \in X$;
(QN3) esiste $K \geq 1$ tale che $[x+y] \leq K\,([x]+[y]) \quad \forall\, x\,, y \in X$;

si dice *quasinorma su* X e il numero $[x]$ si dice *quasinorma del vettore* x.
Anche in questo caso da queste proprietà si ricava che deve essere $[x] \geq 0$ per ogni $x \in X$ e in particolare per $K = 1$ si ritrova la disuguaglianza triangolare e la nozione di quasinorma si riduce alla norma.
Il minimo numero $K \geq 1$ per cui vale (QN3) si dice *modulo di concavità di* $[\cdot]$ e due quasinorme sono equivalenti nello stesso senso in cui lo sono le norme.

Definizione 4.31. Uno spazio vettoriale X sul campo $\mathbb{K}$ munito di una quasinorma $[\cdot]\colon X \to \mathbb{R}$ si dice *spazio quasinormato sul campo* $\mathbb{K}$ e si denota con $(X\,, [\cdot])$. □

Nel seguito scriveremo brevemente X in luogo di $(X\,, [\cdot])$ quando non sia necessario evidenziare la quasinorma $[\cdot]$ su X e, quando necessario, parleremo di spazio quasinormato reale o complesso a seconda che sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
I principali esempi di spazi quasinormati sono gli spazi L_p con $0 < p < 1$ e gli spazi L_p deboli o spazi di Marcinkiewicz già esaminati in precedenza (Sezioni 2.2 e 2.4).
Sia X uno spazio quasinormato sul campo $\mathbb{K}$ con quasinorma $[\cdot]$. Gli insiemi

$$B_r(x_0) = \{x \in X : \; [x - x_0] < r\}\,, \qquad (x_0 \in X \text{ e } r > 0)$$

si dicono *quasipalle* in X di centro $x_0 \in X$ e raggio $r > 0$. Denotiamo con

$$\mathcal{B}(x_0) = \left\{B_r(x_0) : \; r > 0\right\}, \qquad x_0 \in X,$$

la collezione delle quasipalle di centro x_0 e poniamo per brevità $B_r = B_r(0)$ $(r > 0)$ e $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}(0)$ quando $x_0 = 0$. Poiché si ha

$$B_{r/2K} + B_{r/2K} \subset B_r, \qquad r > 0,$$

la collezione delle quasi palle $\mathcal{B}_0$ verifica le ipotesi di Teorema 4.9 e quindi le quasipalle $\mathcal{B}_x = x + \mathcal{B}_0$ $(x \in X)$ sono basi di intorni[1] per una topologia $\mathcal{T}$ che rende X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$. Tale topologia si dice indotta dalla quasinorma e in tale topologia ogni quasipalla è un insieme limitato. Possiamo riassumere queste considerazioni nel teorema seguente.

Teorema 4.32. *Sia X uno spazio quasinormato sul campo $\mathbb{K}$. Allora, X è uno spazio vettoriale topologico metrizzabile e localmente limitato.*

Ogni spazio quasinormato è quindi uno spazio topologico metrizabile con una metrica invariante (Teorema 4.10) ed è possibile invertire l'affermazione precedente: ogni spazio vettoriale topologico metrizzabile e localmente limitato è uno spazio quasinormato (Esercizio **??**).
In accordo con la terminologia già introdotta, una successione $\{x_n\}_n$ in uno spazio quasinormato X verifica la condizione di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tale che

$$n\,, m \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad [x_n - x_m] \leq \varepsilon$$

e lo spazio quasinormato x si dice completo se ogni successione che verifica la condizione di Cauchy converge.

[1] Le quasipalle $B_r(x)$ non sono insiemi aperti se $K > 1$.

Concludiamo questo breve esame degli spazi quasinormati provando che ogni spazio quasinormato ammette una quasinorma equivalente una cui potenza di esponente minore di uno verifica la disuguaglianza triangolare.

TEOREMA 4.33. *Sia X uno spazio quasinormato sul campo $\mathbb{K}$. Allora esistono una quasinorma equivalente $[\cdot]$ e $0 < r \leq 1$ tale che*

$$[x+y]^r \leq [x]^r + [y]^r, \qquad x, y \in X.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $[\cdot]_*$ la quasinorma di X e, senza perdita di generalità, sia $K > 1$ il suo modulo di continuità. Sia $0 < r \leq 1$ definito da $2^{1/r} = 2K$ e sia $[\cdot]$ la funzione definita da

$$[x] = \inf \left\{ \left(\sum_{1 \leq h \leq k} [x_h]_*^r \right)^{1/r} : x = x_1 + \cdots + x_n \right\}, \qquad x \in X.$$

Chiaramente risulta $[x] = 0$ se e solo se $x = 0$ e $[tx] = |t|[x]$ per ogni $t \in \mathbb{K}$ e $x \in X$. Inoltre, dalla disuguaglianza di Hölder con esponenti coniugati $p = 1/r$ e $q = 1/(1-r)$ risulta

$$(A+B)^{1/r} \leq 2^{1/r-1} \left(A^{1/r} + B^{1/r} \right), \qquad A, B \geq 0,$$

e quidi per ogni $x = x_1 + \cdots x_n$ e $y = y_1 + \cdots + y_k$ risulta

$$[x+y] \leq \left(\sum_m [x_m]_*^r + \sum_h [y_h]_*^r \right)^{1/r} \leq 2^{1/r-1} \left[\left(\sum_m [x_m]_*^r \right)^{1/r} + \left(\sum_h [y_h]_*^r \right)^{1/r} \right]$$

da cui segue

$$[x+y] \leq 2^{1/r-1}([x]+[y]), \qquad x, y \in X.$$

Pertanto $[\cdot]$ è una quasinorma di X per la quale evidentemente risulta

$$[x+y]^r \leq [x]^r + [y]^r, \qquad x, y \in X.$$

Poiché si ha evidentemente $[x] \leq [x]_*$ per ogni $x \in X$, per completare la dimostrazione resta da provare soltanto che per qualche $c > 0$ risulta $[x]_* \leq c[x]$ per ogni x da cui segue che $[\cdot]$ e $[\cdot]_*$ sono quasinorme equivalenti. Proviamo a tal fine che risulta

$$(***) \qquad [x_1 + \cdots + x_n]_* \leq 4^{1/r} \left([x_1]_*^r + \cdots + [x_n]_*^r \right)^{1/r}$$

per ogni $x_m \in X$ $(m = 1, \ldots, n)$ da cui segue $[x] \leq 4^{1/r}[x]_*$ per ogni x.
Per ogni $x \in X$ con $x \neq 0$, sia $N(x) = 2^{j/r}$ dove $j \in \mathbb{Z}$ è il numero intero univocamente individuato da

$$2^{(j-1)/r} < [x]_* \leq 2^{j/r}.$$

Si ha in particolare $N(x) < 2^{1/r}[x]_*$ per $x \neq 0$ da cui segue

$$2^{1/r} \left(N(x_1)^r + \cdots + N(x_n)^r \right)^{1/r} \leq 4^{1/r} \left([x_1]_*^r + \cdots + [x_n]_*^r \right)^{1/r}$$

per ogni scelta dei vettori $x_m \neq 0$ $(m = 1, \ldots, n)$ e conseguentemente per provare $(***)$ è sufficiente provare che risulti

$$(****) \qquad [x_1 + \cdots + x_n]_* \leq 2^{1/r} \left(N(x_1)^r + \cdots + N(x_n)^r \right)^{1/r}$$

per ogni $x_m \neq 0$ $(m = 1, \ldots, n)$.
Osserviamo ora che per $x_1, x_2 \in X$ non nulli tali che $N(x_1) = N(x_2) = 2^{j/r}$ risulta

$$[x_1 + x_2]_* \leq K([x_1]_* + [x_2]_*) \leq 2K 2^{j/r} = 2^{(j+1)/r}$$

per la scelta di r e da ciò segue

$$N(x_1+x_2) \le 2^{(j+1)/r} \quad \Longrightarrow \quad N(x_1+x_2)^r \le 2^j + 2^j = N(x_1)^r + N(x_2)^r.$$

In conseguenza di ciò, per provare $(****)$, possiamo supporre che sia

$$N(x_1) > N(x_2) > \cdots > N(x_n) > 0$$

con $N(x_m) = 2^{j_m/r}$ per ogni m e j_m interi tali che $j_n < j_{n-1} < \cdots < j_1$. Si ha allora

$$\frac{N(x_m)}{N(x_{m-1})} = 2^{(j_m - j_{m-1})/r} \le 2^{-1/r}$$

per $m = 2, \ldots, n$ da cui segue

$$[x_m]_* \le N(x_m) \le 2^{-(m-1)/r} N(x_1),$$

per $m = 1, \ldots, n$. Utilizzando ripetutamente la definizione di modulo di concavità e la definizione di r risulta

$$\begin{aligned}
[x_1 + \cdots + x_n]_* &\le K[x_1]_* + K^2[x_2]_* + \cdots + K^n[x_n]_* \le \\
&\le \sum_{1\le m\le n} K^m 2^{-(m-1)/r} N(x_1) = 2^{1/r} N(x_1) \sum_{1\le m\le n} 2^m \le 2^{1/r} N(x_1)
\end{aligned}$$

da cui evidentemente segue $(****)$ e questo completa la dimostrazione. □

4.2. Spazi localmente convessi

Esaminiamo in questa sezione una classe particolare di spazi vettoriali topologici in cui la topologia compatibile con le operazioni algebriche è determinata da una famiglia di funzioni che collettivamente svolgono il ruolo della norma degli spazi normati. In questa classe di spazi rientrano pressoché tutti gli spazi vettoriali topologici importanti dal punto di vista delle applicazioni e, come vedremo nella sezione successiva, questi spazi ammettono funzionali lineari continui non banali in grande quantità.

Seminorme. Sia X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Una funzione $p\colon X \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

(SN1) $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall\, x \in X$; (omogeneità)
(SN2) $p(x+y) \le p(x) + p(y) \quad \forall\, x, y \in X$; (subadditività)

si dice *seminorma su* X e il numero $p(x)$ si dice *seminorma del vettore* x.
Come per la norma, da (SN1) e (SN2) segue

- $p(0) = 0$;
- $p(x) \ge 0$ per ogni $x \in X$.
- $|p(x) - p(y)| \le p(x-y)$ per ogni $x, y \in X$;
- il nucleo di p definito da
$$\ker(p) = \big\{x \in X :\ p(x) = 0\big\}$$
è un sottospazio di X.

Una seminorma p verifica dunque le stesse proprietà di una norma con l'eccezione della richiesta che $p(x) = 0$ implichi $x = 0$ e una seminorma p su X è una norma su X se e solo se risulta

$$p(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

Inoltre, una famiglia P di seminorme di X si dice *separante* se vale la seguente proprietà:

$$x \in X \text{ e } x \ne 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists\, p \in P :\ p(x) \ne 0.$$

ESEMPIO 4.34. Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto (non vuoto). Per ogni insieme $K \subset U$ (non vuoto) le funzioni

$$p_K(u) = \sup\left\{|u(x)| : x \in K\right\}, \qquad u \in C(U),$$
$$p_{K,n}(u) = \sup\left\{|\partial_\alpha u(x)| : x \in K \text{ e } |\alpha| \le n\right\}, \qquad u \in C^\infty(U) \quad (n \ge 1),$$

sono seminorme su $C(U)$ e $C^\infty(U)$ rispettivamente. □

Le seminorme di uno spazio vettoriale sono naturalmente collegate agli insiemi assorbenti e convessi e per illustrare questo legame è conveniente evidenziare le seguenti proprietà di tali insiemi.

PROPOSIZIONE 4.35. *Siano X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e $A \subset X$ un insieme. Allora,*

(a) *se A è stellato ripetto all'origine risulta*
$$0 \le s < t \qquad \Longrightarrow \qquad sA \subset tA;$$
(b) *se A è assorbente e convesso, l'insieme*
$$H_A(x) = \left\{t > 0 : x \in tA\right\}, \qquad x \in X,$$
è un intervallo illimitato superiormente.

L'implicazione (a) vale in particolare per tutti gli insiemi assorbenti e convessi e per tutti gli insiemi bilanciati e l'insieme A di Esempio 4.1 mostra che (b) può essere falsa per un insieme assorbente non convesso.

DIMOSTRAZIONE. (a) Siano $0 \le s < t$. Si ha allora
$$x \in sA \qquad \Longrightarrow \qquad x/s \in A \qquad \Longrightarrow \qquad x/t = \frac{s}{t}(x/s) \in A$$
poiché $0 \le s/t < 1$ e quindi risulta $sA \subset tA$.
(b) Per $x = 0$ risulta $H_A(0) = (0, +\infty)$. Sia quindi $x \ne 0$. Essendo A assorbente e convesso, A è anche stellato rispetto all'origine. Quindi, risulta $H_A(x) \ne \varnothing$ e per ogni $s \in H_A(x)$ e $t > s$ si ha $x \in sA \subset tA$ da cui segue $t \in H_A(x)$. □

Motivati dalla proposizione precedente, ad ogni insieme assorbente e convesso $A \subset X$ associamo la funzione $\mu_A \colon X \to [0, +\infty)$ definita da
$$\mu_A(x) = \inf\left\{t > 0 : x \in tA\right\}, \qquad x \in X,$$
che si dice *funzionale di Minkowski* o *calibro di A*.
Nella parte rimanente di questo paragrafo indaghiamo quali relazioni sussistono tra seminorme e funzionali di Minkowski di insiemi assorbenti, bilanciati e convessi.

PROPOSIZIONE 4.36. *Siano X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e p una seminorma su X. Allora,*

(a) *l'insieme $B = \left\{x \in X : p(x) < 1\right\}$ è assorbente, bilanciato e convesso;*
(b) $p = \mu_B$.

DIMOSTRAZIONE. (a) È chiaro che B è bilanciato e convesso. Sia quindi $x \in X$ e sia $t > p(x)$. Allora,
$$p(x/t) < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x/t \in B \qquad \Longrightarrow \qquad x \in tB$$
e quindi B è anche assorbente.
(b) Per $x \in X$ e $t > p(x)$, risulta $x \in tB$ da cui segue $\mu_B(x) \le p(x)$ e da cui segue in particolare $\mu_B(x) = p(x)$ se $p(x) = 0$. Viceversa sia $x \in X$ con $p(x) > 0$. Allora, si ha
$$0 < t < p(x) \qquad \Longrightarrow \qquad p(x/t) > 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x \notin tB.$$

Poiché B è assorbente e convesso, deve essere $\mu_B(x) \geq t$ per ogni $0 < t < p(x)$ e da ciò segue $\mu_B(x) \geq p(x)$. $\square$

Proposizione 4.37. *Sia X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e siano $A \subset X$ un insieme assorbente e convesso e μ_A il funzionale di Minkowski di A. Allora,*

(a) *$\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$ per ogni $x, y \in X$;*
(b) *$\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$ per ogni $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$ con $t \geq 0$;*
(c) *se A bilanciato, μ_A è una seminorma su X.*

Inoltre, gli insiemi

$$B = \{x : \mu_A(x) < 1\} \qquad e \qquad C = \{x : \mu_A(x) \leq 1\}$$

sono convessi e assorbenti e risulta $B \subset A \subset C$ e $\mu_B = \mu_A = \mu_C$.

Dimostrazione. (a) Dati $x, y \in X$, siano $s > \mu_A(x)$ e $t > \mu_A(y)$. Allora, $x/s \in A$ e $y/t \in A$ cosicché, essendo A convesso, risulta

$$x + y = (s+t)\left[\frac{s}{s+t}(x/s) + \frac{t}{s+t}(y/t)\right] \in (s+t)A.$$

Risulta quindi $\mu_A(x+y) \leq s+t$ e da ciò segue

$$\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$$

per l'arbitrarietà di $s > \mu_A(x)$ e $t > \mu_A(y)$.

(b) Sia $t > 0$ altrimenti la conclusione è ovvia. Per ogni $x \in X$ risulta

$$s > \mu_A(tx) \quad \Longrightarrow \quad tx \in sA \quad \Longrightarrow \quad x \in (s/t)A \quad \Longrightarrow \quad \mu_A(x) \leq s/t$$

e da $t\mu_A(x) \leq s$ segue

$$t\mu_A(x) \leq \mu_A(tx)$$

per l'arbitrarietà di $s > \mu_A(tx)$. Prendendo x/t in luogo di x risulta allora

$$\mu_A(x) = t\left(\frac{1}{t}\mu_A(x)\right) \leq t\mu_A(x/t) \leq \mu_A(x)$$

e questo completa la dimostrazione di (b).

(c) Sia A bilanciato e proviamo l'omogeneità di μ_A supponendo $\lambda \neq 0$ altrimenti la conclusione è ovvia. Si ha

$$t > \mu_A(\lambda x) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda x \in tA \qquad \Longrightarrow \qquad x \in \frac{t}{\lambda}A$$

e, essendo A bilanciato, si ha anche

$$x \in \frac{t}{\lambda}A \qquad \Longrightarrow \qquad x \in \frac{t}{|\lambda|}A \qquad \Longrightarrow \qquad \mu_A(x) \leq \frac{t}{|\lambda|}$$

cosicché, dall'arbitrarietà di $t > \mu_A(\lambda x)$, segue

$$|\lambda|\mu_A(x) \leq \mu_A(\lambda x).$$

Ponendo λx in luogo di x e $1/\lambda$ in luogo di λ nella disuguaglianza precedente si trova $\mu_A(\lambda x) \leq |\lambda|\mu_A(x)$ e questo completa la dimostrazione di (c).

Gli insiemi B e C sono evidentemente assorbenti e convessi e, dato $x \in X$, siano $H_A(x)$, $H_B(x)$ e $H_C(x)$ i corrispondenti intevalli (Proposizione 4.35 – (b)). Se risulta $\mu_A(x) < 1$, deve essere $1 \in H_A(x)$ ovvero $x \in A$. Allo stesso modo, se $x \in A$, deve essere $\mu_A(x) \leq 1$. Quindi, risulta

$$B \subset A \subset C$$

che implica

$$H_B(x) \subset H_A(x) \subset H_C(x)$$

per ogni x da cui segue

$$\mu_C(x) \le \mu_A(x) \le \mu_B(x)$$

per ogni x.
Viceversa sia $\mu_C(x) < s < t$. Risulta allora $x/s \in C$ che implica $\mu_A(x/s) \le 1$ e da ciò segue

$$\mu_A(x/t) = \mu_A\big((s/t)(x/s)\big) = \frac{s}{t}\mu_A(x/s) \le s/t.$$

Di conseguenza, si ha $x/t \in B$ da cui segue $\mu_B(x/t) \le 1$ ovvero $\mu_B(x) \le t$. Dall'arbitrarietà di $t > \mu_C(x)$ segue $\mu_C(x) \ge \mu_B(x)$ e questo conclude la dimostrazione. $\square$

Spazi localmente convessi. Illustriamo in questa parte come definire una struttura di spazio vettoriale topologico che ammetta una base di intorni convessi dell'origine a partire da una famiglia separante di seminorme.
A tal fine, dato uno spazio vettoriale X sul campo $\mathbb{K}$, per ogni insieme finito di seminorme $p_1, \dots, p_n$ su X e per ogni corrispondente insieme di numeri positivi $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$, poniamo

$$(*) \qquad V(p_1, \dots, p_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \big\{x \in X : \ p_m(x) < \varepsilon_m \text{ per } m = 1, \dots, n\big\}$$

e per ogni famiglia separante P di seminorme di X denotiamo con

$$(**) \quad \mathcal{V}_0 = \big\{V = V(p_1, \dots, p_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \ p_m \in P \text{ e } \varepsilon_m > 0 \text{ per } m = 1, \dots, n\big\}$$

la collezione degli insiemi $(*)$ al variare delle seminorme $p_1, \dots, p_n \in P$ e dei numeri positivi $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ $(n \ge 1)$. Tutti gli insiemi V di $\mathcal{V}_0$ sono bilanciati, assorbenti e convessi.

Teorema 4.38. *Siano X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e P una famiglia separante di seminorme di X e sia $\mathcal{V}_0$ la famiglia di insiemi associata a P da $(**)$. Allora,*

(a) *le famiglie di insiemi*

$$V_x = x + \mathcal{V}_0, \qquad x \in X,$$

sono basi di intorni per una topologia $\mathcal{T}$ che rende X uno spazio vettoriale topologico;

(b) *ogni intorno $V \in \mathcal{V}_0$ è aperto e ogni seminorma $p \in P$ è continua.*

Nelle ipotesi del teorema, la topologia $\mathcal{T}$ di X si dice *generata dalla famiglia di seminorme P*. Gli insiemi aperti di tale topologia sono gli insiemi

$$U = \bigcup_i (x_i + V_i)$$

$(x_i \in X$ e $V_i \in \mathcal{V}_0$ per ogni $i \in I)$ che sono unione di traslati di insiemi della famiglia $\mathcal{V}_0$ con I insieme di cardinalità arbitraria e $\mathcal{V}_0$ è una base di intorni bilanciati, assorbenti e convessi di X. Inoltre, per ogni intorno $V \in \mathcal{V}_0$ e per ogni $k \ge 1$ esiste $V' \in \mathcal{V}_0$ tale che risulti

$$\underbrace{V' + \cdots + V'}_{k \text{ volte}} \subset V$$

e ogni intorno $V \in \mathcal{V}_0$ è aperto in X.

Dimostrazione. (a) La famiglia di insiemi $\mathcal{V}_0$ verifica le ipotesi di Teorema 4.9.
(b) Per provare che ogni intorno $V \in \mathcal{V}_0$ è aperto, è sufficiente provare che è tale ogni intorno $V(p;\varepsilon)$ definito da $(*)$ con $p \in P$ e $\varepsilon > 0$. Per ogni $x \in V(p;\varepsilon)$, sia $\eta_x = \varepsilon - p(x) > 0$ e consideriamo l'intorno $V(p;\eta_x)$. Per ogni $y \in x + V(p;\eta_x)$ si ha allora $p(y - x) < \eta_x$ da cui segue

$$p(y) \le p(x) + p(y - x) < p(x) + \eta_x = \varepsilon.$$

Risulta dunque $x + V(p;\eta_x) \subset V(p;\varepsilon)$ per ogni $x \in V(p;\varepsilon)$ e questo prova che $V(p;\varepsilon)$ è aperto.
Per la provare continuità di $p \in P$, supponiamo per fissare le idee che sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la dimostrazione nel caso reale è la stessa a meno delle ovvie modifiche formali.
Per ogni $x_0, x \in X$ risulta $|p(x) - p(x_0)| \leq p(x - x_0)$. Quindi, per ogni $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ fissati risulta

$$x_0 + V(p;\varepsilon) \subset p^{-1}\left(B_\varepsilon(p(x_0))\right)$$

e questo prova la continuità di p in x_0. □

Il risultato appena dimostrato motiva la definizione seguente.

Definizione 4.39. Uno spazio vettoriale topologico X sul campo $\mathbb{K}$ si dice

- *spazio localmente convesso* se la sua topologia è generata da una famiglia separante di seminorme di X;
- *spazio di Fréchet* se è uno spazio localmente convesso, metrizzabile e completo. □

Ogni spazio normato è uno spazio localmente convesso con la topologia generata dalla famiglia di seminorme formata dalla sola norma e allo stesso modo ogni spazio di Banach è uno spazio di Fréchet. Gli spazi di Fréchet sono la classe di spazi localmente convessi più simile agli spazi di Banach.
Ogni spazio localmente convesso X sul campo $\mathbb{K}$ è per definizione uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$. Conseguentemente, per X valgono tutte le considerazioni svolte nella sezione precedente ed inoltre alcune proprietà possono essere riformulate in termini di seminorme anziché di intorni. Elenchiamo queste proprietà nelle proposizioni seguenti omettendone la dimostrazione quando evidente.

Proposizione 4.40. *Siano X uno spazio localmente convesso sul campo $\mathbb{K}$ e P una famiglia di seminorme che genera la topologia di X e sia $B \subset X$ un insieme. Allora,*

$$B \text{ limitato} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup_{x \in B} p(x) < +\infty \qquad \forall\, p \in P.$$

Proposizione 4.41. *Siano X uno spazio localmente convesso sul campo $\mathbb{K}$ e P una famiglia di seminorme che genera la topologia di X e siano $x_n \in X$ $(n \geq 1)$ una successione di vettori e $x \in X$ un vettore. Allora,*

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} p(x_n - x) = 0 \qquad \forall\, p \in P;$

(b) $\{x_n\}_n$ *di Cauchy* $\qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\, p \in P \text{ e } \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 = n_0(p,\varepsilon) \geq 1 : \\ \quad p(x_n - x_m) \leq \varepsilon \qquad \forall\, m, n \geq n_0; \end{cases}$

Lo stesso vale evidentemente per le successioni generalizzate.

Proposizione 4.42. *Siano X uno spazio localmente convesso sul campo $\mathbb{K}$ e $Y \subset X$ un sottospazio vettoriale. Allora, Y è uno spazio localmente convesso nella topologia indotta da X.*

Se P è una famiglia di seminorme che genera la topologia di X allora le restrizioni a Y delle seminorme $p \in P$ generano la topologia indotta da X su Y.
La caratterizzazione degli spazi localmente convessi metrizzabili si riformula in termini di seminorme nella maniera seguente.

Teorema 4.43. *Sia X uno spazio localmente convesso sul campo $\mathbb{K}$. Allora, le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(a) *X è metrizzabile;*
(b) *la topologia di X è generata da una famiglia (al più) numerabile di seminorme $P = \{p_n\}_n$.*

In tal caso la metrica d di X può essere scelta invariante e tale che le palle $B_\delta = B_\delta(0)$ $(\delta > 0)$ siano convesse.

DIMOSTRAZIONE. (a) Sia $\mathcal{V}_0$ la base d'intorni associata da $(*)$ e $(**)$ ad una famiglia separante di seminorme P che genera la topologia $\mathcal{T}$ di X e sia d la metrica che induce $\mathcal{T}$. Allora, le palle aperte $B_{1/n}(0)$ $(n \geq 1)$ sono una base d'intorni dell'origine in X e quindi, per ogni n esiste un intorno $V_n \in \mathcal{V}_0$ dell'origine tale che risulti

$$V_n \subset B_{1/n}(0).$$

Ogni intorno V_n è assorbente, bilanciato e convesso e quindi il suo funzionale di Minkowski

$$q_n = \mu_{V_n}$$

è una seminorma di X (Proposizione 4.37) per la quale risulta

$$V(q_n; 1) \subset V_n$$

per ogni n (Proposizione 4.37). La famiglia di seminorme $Q = \{q_n\}_n$ è separante: se $x \neq 0$, risulta $x \notin B_{1/n}(0)$ per n opportuno cosicché si ha $x \notin V_n$ e da ciò segue $q_n(x) \geq 1$. Denotiamo con $\mathcal{T}'$ la topologia localmente convessa di X generata dalla famiglia di seminorme Q e proviamo che risulta $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.
Sia U un insieme $\mathcal{T}-$aperto e non vuoto. Dato $x \in U$, l'insieme traslato $U - x$ è un insieme $\mathcal{T}-$aperto contenente l'origine per l'invarianza per traslazioni di $\mathcal{T}$ (Proposizione 4.3). Si ha allora $B_{1/n}(0) \subset U - x$ per n opportuno da cui segue

$$V(q_n; 1) \subset V_n \subset B_{1/n}(0) \subset U - x.$$

Pertanto, $x + V(q_n; 1) \subset U$ e quindi U è un $\mathcal{T}'-$intorno di x. Dall'arbitrarietà di $x \in U$ segue che U è $\mathcal{T}'-$aperto e questo prova che risulta $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.
Viceversa si ha

$$\eta V_n \subset V(q_n; \varepsilon)$$

per ogni $0 < \eta < \varepsilon$ e per ogni n (Proposizione 4.37). Poiché ogni insieme della forma ηV_n è un $\mathcal{T}-$intorno aperto dell'origine, gli insiemi

$$V(q_{n_1}, \ldots, q_{n_k}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k),$$

che al variare di $q_{n_h} \in Q$ e $\varepsilon_h > 0$ $(h = 1, \ldots, k)$ formano una base di $\mathcal{T}'-$intorni dell'origine risultano essere dei $\mathcal{T}-$intorni dell'origine. Dall'invarianza per traslazioni di $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ si ricava come prima che ogni insieme $\mathcal{T}'-$aperto è $\mathcal{T}-$aperto e questo conclude la dimostrazione di (a).
(b) Sia $P = \{p_n\}_n$ una famiglia (al più) numerabile di seminorme che genera la topologia di X e, con le notazioni di $(*)$ e $(**)$, siano V_n gli intorni bilanciati e convessi dell'origine definiti da

$$V_n = V(p_1, \ldots, p_n; 1/2^n, \ldots, 1/2^n), \qquad n \geq 1.$$

La famiglia di intorni di $\mathcal{V}_0 = \{V_n\}_n$ così definita è una base d'intorni dell'origine per la quale risulta

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$$

per ogni n. A partire da questo punto si procede esattamente come nella dimostrazione di Teorema 4.10 costruendo una metrica invariante e limitata d su X che genera la topologia di X. In tale metrica le palle aperte con centro nell'origine sono $B_\delta = X$ per $\delta > 1$ e

$$B_\delta = \left\{x \in X : \, p(x) < \delta\right\} = \bigcup \left\{A(r) : \, r \in \mathbb{Q}_d \text{ e } 0 < r < \delta\right\},$$

per $0 < \delta \leq 1$ dove gli insiemi $A(r)$ $(r \in \mathbb{Q}_d$ e $0 < r \leq 1)$ sono definiti come nella dimostrazione di Teorema 4.10. Tali insiemi sono bilanciati, convessi e totalmente ordinati per inclusione e quindi anche le palle aperte $B_\delta(0)$ risultano avere le medesime proprietà. $\square$

La costruzione della metrica d nel teorema precedente si semplifica notevolmente se si rinuncia alla richiesta che le palle siano insiemi convessi come illustrato nel risultato seguente.

Corollario 4.44. *Sia X uno spazio localmente convesso sul campo $\mathbb{K}$ e sia $P = \{p_n\}_n$ una famiglia (al più) numerabile di seminorme di X che genera la topologia di X. Allora, la funzione*

$$d(x,y) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}, \qquad x,y \in X,$$

è una metrica invariante su X che genera la topologia $\mathcal{T}$ di X.

Dimostrazione. La funzione d è ben definita poiché la serie a secondo membro converge totalmente e da

- $0 \le s < t \qquad \Longrightarrow \qquad \dfrac{s}{1+s} < \dfrac{t}{1+t}$;
- $s,t \ge 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dfrac{s+t}{1+s+t} \le \dfrac{s}{1+s} + \dfrac{t}{1+t}$;

segue facilmente che d è una metrica invariante per traslazioni su X. Inoltre, dalla continuità della somma, dalla continuità delle seminorme e dalla convergenza totale della serie si ricava che la funzione $d\colon X \times X \to [0,+\infty)$ è $(\mathcal{T} \times \mathcal{T})-$continua e quindi le palle

$$B_r(x_0) = \left\{x \in X : d(x,x_0) < r\right\}, \qquad r > 0, \quad x_0 \in X,$$

sono $\mathcal{T}-$aperte. Quindi, denotata con $\mathcal{T}_d$ la topologia generata da d, risulta $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}$. Viceversa sia U un intorno $\mathcal{T}-$aperto dell'origine. Allora, con le notazioni di $(*)$ e $(**)$, esiste

$$V = V(p_{n_1}, \dots, p_{n_k}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

per $p_{n_h} \in P$ e $\varepsilon_h > 0$ opportuni $(h = 1, \dots, k)$ tale che risulti $V \subset U$. Sia $r > 0$. Per ogni $x \in B_r(0)$ risulta

$$\frac{1}{2^n} \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} < r$$

per ogni n e quindi per $r > 0$ sufficientemente piccolo si ha

$$x \in B_r(0) \qquad \Longrightarrow \qquad p_{n_h}(x) < \varepsilon_h \qquad h = 1, \dots, k$$

da cui segue $B_r(0) \subset V$ per $r > 0$ sufficientemente piccolo. Per l'invarianza per traslazioni di d si ha $B_r(x) = x + B_r(0)$ per ogni $r > 0$ e per ogni x e per l'invarianza per traslazioni di $\mathcal{T}$ risulta allora $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_d$ e questo completa la dimostrazione. $\square$

A conclusione di questa parte caratterizziamo gli spazi localmente convessi tra gli spazi vettoriali topologici in termini di basi d'intorni dell'orgine e gli spazi normabili tra gli spazi localmente convessi.

Teorema 4.45. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *X è uno spazio localmente convesso;*
(b) *esiste $\mathcal{V}_0$ base d'intorni bilanciati, assorbenti e convessi dell'origine.*

Questo risultato motiva il nome dato agli spazi localmente convessi.

Dimostrazione. Proviamo solo che (b) implica (a) poiché l'altra implicazione è ovvia.
Sia $\mathcal{V}_0$ una base d'intorni dell'origine come in (b). Allora, il funzionale di Minkowski

$$p_V(x) = \mu_V(x), \qquad x \in X,$$

di un intorno $dell'origine V \in \mathcal{V}_0$ è una seminorma di X (Proposizione 4.37). Sia $P = \{p_V : V \in \mathcal{V}_0\}$ la famiglia di tali seminorme e siano $\mathcal{T}_P$ la topologia localmente convessa generata da P e $\mathcal{T}$ la topologia di X corrispondente alla base d'intorni $\mathcal{V}_0$. Da

$$V(p_V; 1) \subset V$$

(Proposizione 4.37) segue $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_P$. Viceversa da

$$\eta V \subset V(p_V; \varepsilon)$$

per $0 < \eta < \varepsilon$ (Proposizione 4.37) segue l'inclusione opposta $\mathcal{T}_P \subset \mathcal{T}$ e questo completa la dimostrazione. □

Teorema 4.46. *Sia X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$. Allora, le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(a) *X è normabile;*

(b) *esiste V intorno dell'origine convesso e limitato.*

Dimostrazione. (a) Sia $\|\cdot\|$ la norma che genera la topologia $\mathcal{T}$ di X. Proviamo che la palla

$$B_1(0) = \big\{x \in X : \|x\| < 1\big\}$$

che è un intorno $\mathcal{T}-$aperto di 0 è limitata. Sia V un intorno dell'origine in X e supponiamo senza perdita di generalità che V sia anche bilanciato. Poiché la topologia di X coincide con quella generata dalla norma, esiste $r > 0$ tale che risulti

$$B_r(0) = \big\{x \in X : \|x\| < r\big\} \subset V$$

da cui segue $B_1(0) \subset V/r$. Posto allora $s = s(V) = 1/r$, per ogni $t > s$ risulta $B_1(0) \subset sV \subset tV$ poiché V è bilanciato. Pertanto $B_1(0)$ è un intorno limitato dell'origine in X.

(b) Sia V intorno aperto e limitato dell'origine e supponiamo senza perdita di generalità che V sia bilanciato e convesso. Allora, la funzione definita da

$$\|x\| = \mu_V(x), \qquad x \in X,$$

dove μ_V è il funzionale di Minkowski di V è una seminorma su X (Proposizione 4.37) e, poiché gli insiemi V/n ($n \geq 1$) costituiscono una base d'intorni di 0 (Teorema 4.16), per ogni $x \neq 0$ si ha $x \notin V/n$ per $n \geq 1$ opportuno cosicché risulta

$$\|x\| = \mu_V(x) \geq 1/n > 0.$$

Pertanto, $\|\cdot\|$ è una norma su X le cui palle denotiamo con $B_r(x)$ come al solito. Si ha

$$B_1(0) = \{x : \mu_V(x) < 1\} \subset V \subset \{x : \mu_V(x) \leq 1\}$$

(Proposizione 4.37) da cui segue

$$B_r(0) = \{x : \mu_V(x) < r\} \subset rV \subset \{x : \mu_V(x) \leq r\}$$

per ogni $r > 0$ e ciò implica

$$0 < p < r \qquad \Longrightarrow \qquad pV \subset \{x : \mu_V(x) \leq p\} = \{x : \|x\| \leq p\} \subset B_r(0).$$

Supponiamo ora di aver provato che risulti

$$(***) \qquad rV = \bigcup_{0<p<r} pV, \qquad r > 0.$$

Risulta allora $rV = B_r(0)$ cosicché, essendo $\{rV : r > 0\}$ una base d'intorni dell'origine in X, dall'invarianza per traslazioni della topologia di X si conclude che la topologia di X coincide con quella generata dalla norma.

Resta quindi da provare soltanto (∗∗∗). Essendo V bilanciato, risulta $pV \subset rV$ per $0 < p < r$ da cui segue

$$\bigcup_{0<p<r} pV \subset rV.$$

Viceversa sia $x \in Vr$. Poiché rV è aperto, dalla continuità di $\lambda \in \mathbb{K} \mapsto \lambda x$ si deduce l'esistenza di $\delta > 0$ tale che risulti $\lambda x \in rV$ per ogni $|\lambda - 1| \leq \delta$. In particolare, si ha $(1+\delta)x \in rV$ cosicché, posto $p = r/(1+\delta)$, si ha $0 < p < r$ e $x \in pV$ e questo conclude la dimostrazione di (∗∗∗). □

Esempi di spazi localmente convessi. Esaminiamo in questa parte alcuni esempi di spazi localmente convessi che sono significativi per le applicazioni.

Esempio 4.47. Sia Ω un aperto (non vuoto) di $\mathbb{R}^N$ e sia K_n $(n \geq 1)$ una *esaustione di compatti di* Ω (Teorema I–2.194) ovvero una successione di insiemi compatti tali che

- $K_n \subset \mathrm{int}(K_{n+1})$ per ogni n;
- $\Omega = \bigcup_n K_n$.

Per ogni n la funzione

$$p_n(u) = \sup\left\{|u(x)| : \, x \in K_n\right\}, \qquad u \in C(\Omega),$$

è una seminorma su $C(\Omega)$ (Esempio 4.34) e la famiglia numerabile di seminorme $P = \{p_n\}_n$ è separante. Pertanto, $C(\Omega)$ è uno spazio localmente convesso ed è facile verificare che, se $P' = \{p'_n\}_n$ è la famiglia di seminorme associata ad un'altra esaustione compatta $\{K'_n\}_n$ di Ω, le topologie generate dalle famiglie di seminorme P e P' coincidono.
Dalla definizione delle seminorme p_n è chiaro che la convergenza di una successione di funzioni in $C(\Omega)$ è precisamente la convergenza uniforme sui compatti di Ω della successione di funzioni: se $u_k \in C(\Omega)$ $(k \geq 1)$ è una successione di funzioni continue e $u \in C(\Omega)$, si ha

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = u \text{ in } C(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to+\infty} u_k = u \text{ uniformemente sui compatti di } \Omega.$$

Inoltre, un insieme $E \subset C(\Omega)$ risulta limitato in $C(\Omega)$ se e solo se E è un insieme di funzioni continue uniformemente limitate sui compatti di Ω: per ogni insieme $K \subset \Omega$ compatto esiste $M = M(K) \geq 0$ tale che

$$|u(x)| \leq M, \qquad x \in K, \quad u \in E.$$

Proviamo che lo spazio localmente convesso $C(\Omega)$ così definito ha le seguenti proprietà:

(a) $C(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet;
(b) $C(\Omega)$ non è normabile.

(a) Poiché la famiglia di seminorme P che genera la topologia di $C(\Omega)$ è numerabile, lo spazio localmente convesso $C(\Omega)$ è metrizzabile.
Proviamo che $C(\Omega)$ è anche completo. A tal fine, siano $u_k \in C(\Omega)$ $(k \geq 1)$ gli elementi di una successione di Cauchy in $C(\Omega)$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $n \geq 1$ esiste un intero $k_0 = k_0(n, \varepsilon) \geq 1$ tale che risulti

$$h, k \geq k_0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_n(fu_k - u_h) \leq \varepsilon.$$

Pertanto, la successioni di funzioni $\{u_k\}_k$ è uniformemente di Cauchy su ciascun compatto K_n cosicché esiste una funzione $\overline{u}_n \colon K_n \to \mathbb{C}$ continua su K_n tale che

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = \overline{u}_n \qquad \text{uniformemente su } K_n.$$

Da $K_n \subset K_{n+1}$ segue $\overline{u}_n = \overline{u}_{n+1}$ su K_n per ogni n cosicché la funzione $u\colon \Omega \to \mathbb{C}$ definita da

$$u(x) = \overline{u}_n(x), \qquad x \in K_n,$$

è ben definita. Inoltre, per ogni $x \in \Omega$, esiste n tale che $x \in \mathrm{int}(K_n)$ e quindi, da $u = \overline{u}_n$ su $\mathrm{int}(K_n)$, segue che u è continua in x e quindi in Ω per l'arbitrarietà di $x \in \Omega$. Pertanto, $u \in C(\Omega)$ e da $u_k \to \overline{u}_n = u$ uniformemente su K_n per ogni n per $k \to +\infty$ segue che $u_k \to u$ per $k \to +\infty$ in $C(\Omega)$. Pertanto, $C(\Omega)$ è completo e quindi $C(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet.

(b) Poiché risulta $p_n \le p_{n+1}$ per ogni n, gli insiemi

$$V_n = V(p_n, 1/n) = \left\{u \in C(\Omega) :\ p_n(u) \le 1/n\right\}, \qquad n \ge 1,$$

costituiscono una base d'intorni bilanciati, assorbenti e convessi di 0 in $C(\Omega)$.
Proviamo che nessun intorno W_n è limitato.
Fissato n, sia $x_0 \in \Omega \setminus K_n$ e per ogni $k \ge 1$ sia $u_k \in C(\Omega)$ una funzione continua tale che

$$\begin{cases} u_k(x) = 0 & \text{se } x \in K_n \\ u_k(x_0) = k & \text{se } x = x_0. \end{cases} \qquad k \ge 1.$$

Allora, $u_k \in V_n$ per ogni k e, fissato

$$n_0 = \min\left\{m :\ x_0 \in K_m\right\},$$

risulta

$$p_{n_0}(u_k) \ge k$$

per ogni k. Pertanto V_n non è normabile. □

Esempio 4.48. Sia Ω un insieme aperto (non vuoto) del piano complesso $\mathbb{C}$ e sia

$$H(\Omega) = \left\{u\colon \Omega \to \mathbb{C} \text{ olomorfa}\right\}$$

lo spazio vettoriale complesso delle funzioni olomorfe in Ω.
Identificando Ω con il corrispondente aperto di $\mathbb{R}^2$, lo spazio $H(\Omega)$ si identifica con un sottospazio di $C(\Omega)$. Poiché il limite di una successione di funzioni olomorfe di $H(\Omega)$ che convergono uniformemente sui compatti di Ω è una funzione olomorfa in Ω, il sottospazio $H(\Omega)$ risulta essere un sottospazio chiuso di $C(\Omega)$ e dunque uno spazio di Fréchet nella topologia indotta da $C(\Omega)$.
Inoltre, $H(\Omega)$ ha la proprietà di Heine–Borel. Infatti, se E è un insieme chiuso e limitato di $H(\Omega)$, per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste $M = M(K) \ge 0$ tale che

$$|f(x)| \le M, \qquad x \in K, \quad u \in E,$$

e quindi le funzioni di E sono equilimitate sui compatti di Ω. Per il teorema di Montel (Teorema 14.6 in [54]), ogni successione $\{u_k\}_k$ di funzioni di $H(\Omega)$ equilimitate sui compatti di Ω ha una sottosuccessione $\{u_{k_h}\}_h$ che converge uniformemente sui compatti di Ω a una funzione $u \in H(\Omega)$. Pertanto, la sottosuccessione $\{u_{k_h}\}_h$ converge a u in $H(\Omega)$ e $u \in E$ poiché E è chiuso.
Abbiamo così provato che E è compatto in $H(\Omega)$ e quindi $H(\Omega)$ ha la proprietà di Heine–Borel e non può essere uno spazio normato avendo dimensione infinita (Corollario 1.25). □

Esempio 4.49. Siano Ω un aperto (non vuoto) di $\mathbb{R}^n$ e K_n $(n \ge 1)$ una esaustione di compatti di Ω. Ogni funzione

$$p_n(u) = \sup\left\{|\partial_\alpha u(x)| :\ x \in K_n \text{ e } |\alpha| \le n\right\}, \qquad u \in C^\infty(\Omega),$$

è una seminorma su $C^\infty(\Omega)$ e la famiglia numerabile di seminorme $P = \{p_n\}_n$ è separante. Pertanto, $C^\infty(\Omega)$ è uno spazio localmente convesso e, come nel caso di $C(\Omega)$, è facile verificare che la topologia di $C^\infty(\Omega)$ non dipende dalla scelta dell'esaustione di compatti di Ω.

Dalla definizione delle seminorme p_n segue che la convergenza di una successione di funzioni in $C^\infty(\Omega)$ è precisamente la convergenza uniforme sui compatti di Ω delle successioni di funzioni e di tutte le derivate: se $u_k \in C^\infty(\Omega)$ $(k \geq 1)$ è una successione di funzioni infinite volte differenziabili in Ω e $u \in C^\infty(\Omega)$, si ha

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = u \qquad \text{in } C^\infty(\Omega)$$

se e solo se risulta

$$\lim_{k\to+\infty} \partial_\alpha u_k = \partial_\alpha u \qquad \text{uniformemente su } K$$

per ogni compatto $K \subset \Omega$ compatto e per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Inoltre, un insieme $E \subset C^\infty(\Omega)$ risulta limitato in $C^($$\Omega$) se e solo se E è un insieme di funzioni di classe C^∞ in Ω che sono uniformemente limitate sui compatti di Ω: per ogni insieme $K \subset \Omega$ compatto e per ogni $k \geq 1$ esiste $M = M(K) \geq 0$ tale che

$$|D^\alpha u(x)| \leq M, \qquad x \in K, \quad |\alpha| \leq k, \quad u \in E.$$

Procedendo come nel caso di $C(\Omega)$ si verifica che $C^\infty(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet non normabile in quanto non è localmente limitato.
Proviamo infine che $C^\infty(\Omega)$ ha la proprietà di Heine–Borel. A tal fine, sia $E \subset C^\infty(\Omega)$ un insieme chiuso e limitato cosicché si ha

$$p_n(u) \leq M_n \qquad u \in E, \quad n \geq 0,$$

per opportune costanti $M_n \geq 0$ $(n \geq 0)$. Consideriamo ora un multiindice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ e un insieme compatto $K \subset \Omega$ fissati. Per n tale che $n \geq |\alpha| + 1$ e $K \subset \mathrm{int}(K_n)$ risulta

$$|\partial_m \partial_\alpha u(x)| \leq M_n, \qquad x \in K, \quad m = 1, \ldots, N,$$

per ogni $u \in E$. Pertanto, per ogni multi-indice α le funzioni dell'insieme

$$\big\{\partial_\alpha u : \ u \in E\big\}$$

sono equicontinue ed equilimitate su K. Pertanto, per il teorema di Ascoli–Arzelà (Teorema 2.13), per ogni successione di funzioni $u_k \in E$ $(k \geq 1)$ si determinano una sottosuccessione $u_h = u_{k_h}$ $(h \geq 1)$ e una funzione continua $u_{K,\alpha}\colon K \to \mathbb{K}$ tale che $\partial_\alpha u_h \to u_{K,\alpha}$ uniformemente su K per $h \to +\infty$. Con metodo diagonale si determinano quindi un'unica sottosuccessione $u_h = u_{k_h}$ $(h \geq 1)$ e per ogni multi-indice α un'unica funzione $u_\alpha \in C(\Omega)$ tale che risulti

$$\lim_{h\to+\infty} \partial_\alpha u_{k_h} = u_\alpha \qquad \text{uniformemente su } K$$

per ogni compatto K di Ω. Ciò implica che esista $u \in C^\infty(\Omega)$ tale che risulti

$$\partial_\alpha u = u_\alpha \qquad \text{in } \Omega$$

e per tale u risulta $\partial_\alpha u_{k_h} \to \partial_\alpha u$ per $h \to +\infty$ uniformemente sui compatti di Ω per ogni multi-indice α. Pertanto, la sottosuccessione $\{u_{k_h}\}_h$ converge a u in $C^\infty(\Omega)$ e $u \in E$ poiché E è chiuso.
Abbiamo così provato che E è compatto in $C^\infty(\Omega)$ e quindi $C^\infty(\Omega)$ ha la proprietà di Heine–Borel. $\square$

4.3. Convessità e teorema di Hahn–Banach

Il ruolo della convessità negli spazi localmente convessi si manifesta essenzialmente attraverso il teorema di Hahn–Banach che, come nel caso degli spazi normati, permette di estendere i funzionali lineari continui definiti su sottospazi e, nella sua forma geometrica, permette di separare gli insiemi convessi disgiunti.
In tutta questa parte denotiamo come al solito con X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ evidenziando di volta in volta, quando necessario, i risultati che valgono per una scelta specifica del campo $\mathbb{K}$.

Teorema di Hahn Banach. Presentiamo in questa parte il teorema di estensione di Hahn–Banach nella versione per funzioni positivamente omogenee di grado uno e subadditive.

TEOREMA 4.50 (H. Hahn–S. Banach). *Sia X uno spazio vettoriale reale e siano*

- $p\colon X \to [0, +\infty)$ *una funzione tale che*
$$\begin{aligned} &p(x+y) \leq p(x) + p(y) && x\,, y \in X; \\ &p(tx) = tp(x) && x \in X \ \text{e}\ t \geq 0; \end{aligned}$$
- $M_0 \subset X$ *un sottospazio di X;*
- $L_0 \in \mathcal{L}(M_0, \mathbb{R})$ *un funzionale lineare tale che*
$$L_0 x \leq p(x), \qquad x \in M_0.$$

Allora, esiste un funzionale lineare $L \in \mathcal{L}(X\,, \mathbb{R})$ tale che

(a) $Lx = L_0 x$ *per ogni* $x \in M_0$*;*
(b) $Lx \leq p(x)$ *per ogni* $x \in X$*.*

La funzione p dell'enunciato è positivamente omogenea di grado uno e subadditiva. In particolare risulta $p(0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'insieme $\mathcal{M}$ formato da tutte le coppie (M', L') con M' sottospazio di X e $L' \in \mathcal{L}(M', \mathbb{R})$ funzionale lineare su M' tali che

- $M \subset M'$;
- $L' = L_0$ su M_0 e $L'(x) \leq p(x)$ per ogni $x \in M'$;

e muniamo l'insieme $\mathcal{M}$ dell'ordinamento parziale definito da
$$(M', L') \leq (M'', L'') \qquad \text{se} \qquad M' \subset M'' \text{ e } L' = L'' \text{ su } M'.$$
Per il teorema di massimalità di Hausdorff (Teorema I–1.5) esiste un sottoinsieme totalmente ordinato $\mathcal{M}_{\max}$ di $\mathcal{M}$ che è massimale rispetto all'inclusione. Essendo $\mathcal{M}_{\max}$ totalmente ordinato, l'insieme
$$M = \bigcup \big\{ M' : \ (M', L') \in \mathcal{M}_{\max} \big\}$$
è un sottospazio di X contenente M_0 e la funzione $L\colon M \to \mathbb{R}$ definita da
$$Lx = L'x \qquad \text{se } (M', L') \in \mathcal{M}_{\max} \text{ e } x \in M'$$
è ben definita. Inoltre, per lo stesso motivo L è un funzionale lineare e risulta
$$Lx \leq p(x), \qquad x \in M.$$
Per completare la dimostrazione resta solo da provare che risulta $M = X$. Supponiamo per assurdo che risulti $M \neq X$ e scegliamo quindi $x_0 \notin M$. Risulta allora
$$Lx + Ly = L(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x - x_0) + p(y + x_0)$$
da cui segue
$$A_x = Lx - p(x - x_0) \leq p(y + x_0) - Ly = B_y$$

per ogni $x, y \in M$. Possiamo allora scegliere $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo che si abbia

$$\sup\left\{A_x : x \in M\right\} \le \alpha \le \inf\left\{B_y : y \in M\right\}$$

cosicché risulta in particolare

$$Lx - \alpha \le p(x - x_0) \qquad \text{e} \qquad Lx + \alpha \le p(x + x_0)$$

per ogni $x \in M$. Mettendo ora x/t con $x \in M$ e $t > 0$ al posto di x e t nelle due disuguaglianze precedenti si ottiene

$$Lx - \alpha t \le p(x - tx_0) \qquad \text{e} \qquad Lx + \alpha t \le p(x + tx_0)$$

per ogni $x \in M$ e $t > 0$ da cui segue infine

$$(*) \qquad Lx + \alpha t \le p(x + tx_0), \qquad x \in M, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo quindi il sottospazio M' definito da

$$M' = \operatorname{span}\{M, x_0\} = M \oplus \mathbb{R}x_0 = \left\{x + tx_0 : x \in M \text{ e } t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ogni vettore $x' \in M'$ ha così un'unica rappresentazione nella forma $x' = x + tx_0$ con $x \in M$ e $t \in \mathbb{R}$. Definiamo allora $L' \colon M' \to \mathbb{R}$ ponendo

$$L'x' = L'(x + tx_0) = Lx + \alpha t, \qquad x' = x + tx_0 \in M' \quad (t \in \mathbb{R}).$$

È chiaro che la funzione L' così definita è un funzionale lineare su M' che verifica $L = L'$ su M e $L'x \le p(x)$ per ogni $x \in M'$ per $(*)$ ovvero risulta $(M', L') \in \mathcal{M}$. Se dunque fosse $M \ne X$, l'insieme $\mathcal{M}_{\max} \cup \{(M', L')\}$ sarebbe un sottoinsieme totalmente ordinato di $\mathcal{M}$ contenente $\mathcal{M}_{\max}$ in contraddizione con la massimalità di $\mathcal{M}_{\max}$. Abbiamo così provato che risulta $M = X$ e questo completa la dimostrazione del teorema. $\square$

Nel caso di uno spazio vettoriale munito di una seminorma come conseguenza del teorema di Hahn–Banch si ha il seguente risultato di estensione di funzionali lineari.

Teorema 4.51. *Siano X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, $p \colon X \to [0, +\infty)$ una seminorma su X, M un sottospazio di X e $L_0 \in \mathcal{L}(M, \mathbb{K})$ un funzionale lineare su M tale che*

$$|L_0 x| \le p(x), \qquad x \in M.$$

Allora, esiste un funzionale lineare $L \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ tale che

(a) *$Lx = L_0 x$ per ogni $x \in M$;*
(b) *$|Lx| \le p(x)$ per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione. Nel caso reale $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la conclusione segue direttamente dal teorema di Hahn–Banach (Teorema 4.50) in quanto si ha $p(-x) = p(x)$ per ogni $x \in X$.
Consideriamo quindi il caso complesso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e sia $\Lambda_0 = \operatorname{Re}(L_0)$. Per ipotesi si ha

$$|\Lambda_0 x| \le |L_0 x| \le p(x), \qquad x \in M,$$

e quindi per il teorema di Hahn–Banach (Teorema 4.50) esiste un funzionale $\mathbb{R}-$lineare $\Lambda \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ tale che risulti

$$\begin{aligned} \Lambda x &= \Lambda_0 x, && x \in M; \\ |\Lambda x| &\le p(x), && x \in X. \end{aligned}$$

Il funzionale $\mathbb{R}-$lineare Λ determina un funzionale $\mathbb{C}-$lineare $L \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ mediante la formula

$$Lx = \Lambda x - i\Lambda(ix), \qquad x \in X,$$

(Proposizione 1.20) e dalla corrispondente formula che lega Λ_0 e L_0 su M si ricava che risulta $Lx = L_0 x$ per ogni $x \in M$. Infine, per ogni $x \in X$ esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tale che risulti $|Lx| = \lambda Lx$ cosicché si ha

$$|Lx| = \lambda Lx = L(\lambda x) = \Lambda(\lambda x) \leq p(\lambda x) = p(x)$$

e questo conclude la dimostrazione. □

Separazione di convessi. Il teorema di Hahn–Banach ha un'importante formulazione geometrica in termini di separazione degli insiemi convessi e disgiunti di uno spazio localmente convesso mediante funzionali ($\mathbb{R}-$lineari) continui. Questo risultato vale in particolare negli spazi normati. Consideriamo in questa parte uno spazio normato X reale e denotiamo come al solito con $\|\cdot\|$ la relativa norma.

TEOREMA 4.52. *Sia X uno spazio localmente convesso reale e siano $C_i \subset X$ $(i = 1, 2)$ due insiemi convessi (non vuoti) tali che $C_1 \cap C_2 = \varnothing$. Allora,*

(a) *se C_1 è aperto, esistono $L \in X^*$ e $c \in \mathbb{R}$ tali che*

$$Lx < c \leq Ly \qquad \text{per ogni } x \in C_1 \text{ e } y \in C_2;$$

(b) *se C_1 è compatto e C_2 è chiuso, esistono $L \in X^*$ e $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ con $c_1 < c_2$ tali che*

$$Lx \leq c_1 < c_2 \leq Ly \qquad \text{per ogni } x \in C_1 \text{ e } y \in C_2.$$

Nella terminologia geometrica di iperpiani e semispazi, nel caso (a) i due insiemi convessi e disgiunti sono contenuti nei due semispazi distinti – l'uno aperto e l'altro chiuso – individuati da un iperpiano chiuso e nel caso (b) sono contenuti in semispazi disgiunti associati a iperpiani chiusi distinti. Nel primo caso si parla di *separazione debole* degli insiemi convessi C_1 e C_2 e nell'altro caso di *separazione forte* degli stessi.

DIMOSTRAZIONE. (a) Siano $x_0 \in C_1$ e $y_0 \in C_2$ due vettori fissati e sia $z_0 = y_0 - x_0 \in C_2 - C_1$. L'insieme

$$V = C_1 - C_2 + z_0 = \bigcup_{y \in C_2} (C_1 - y + z_0)\,.$$

è convesso e aperto poiché C_1 è tale. Inoltre, V contiene l'origine poiché $z_0 \in C_2 - C_1$ mentre $z_0 \notin V$ poiché altrimenti si avrebbe

$$z_0 \in V \quad \Longrightarrow \quad z_0 = x - y + z_0 \text{ con } x \in C_1 \text{ e } y \in C_2 \quad \Longrightarrow \quad x = y$$

e ciò non può essere poiché C_1 e C_2 sono disgiunti.
Consideriamo quindi la funzione $p\colon X \to \mathbb{R}$ definita come il funzionale di Minkowski

$$p(x) = \mu_V(x) = \inf \big\{ t > 0 : \; x \in tV \big\}\,, \qquad x \in X,$$

di V. Essa verifica le ipotesi del teorema di Hahn–Banach e inoltre risulta $p(z_0) \geq 1$ poiché $z_0 \notin V$. Consideriamo quindi il sottospazio

$$M_0 = \big\{ tz_0 : \; t \in \mathbb{R} \big\}$$

e il funzionale lineare $L_0 \in \mathcal{L}(M_0, \mathbb{R})$ definito da

$$L_0 z = L_0(tz_0) = t, \qquad z = tz_0 \in M_0 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Risulta allora $L_0(tz_0) = t < 0$ per $t < 0$ e $L_0(tz_0) = t \leq tp(z_0) = p(tz_0)$ per $t \geq 0$ ovvero

$$L_0(z) \leq p(z), \qquad z \in M_0,$$

esiste un funzionale lineare $L \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ che estende L_0 e che verifica $Lx \leq p(x)$ per ogni $x \in X$ (Teorema 4.51). Da ciò segue $|Lx| \leq p(x)$ per ogni $x \in V \cap (-V)$ e quindi risulta $L \in X^*$ (Teorema 4.25).

Infine, per ogni $x \in C_1$ e $y \in C_2$, da $x - y + z_0 \in V$ con V aperto segue che risulta anche

$$t(x - y + z_0) = x - y + z_0 + (t - 1)(x - y + z_0) \in V$$

per $t-1 < 0$ sufficientemente piccolo in valore assoluto. Risulta allora $p(x-y+z_0) < 1$ per ogni $x \in C_1$ e $y \in C_2$ cosicché, essendo $Lz_0 = 1$, risulta

$$Lx - Ly = L(x - y) = L(x - y + z_0) - 1 < 0, \qquad x \in C_1 \text{ e } y \in C_2.$$

Abbiamo così provato che gli insiemi $L(C_1)$ e $L(C_2)$ sono sottoinsiemi convessi (intervalli) e disgiunti di $\mathbb{R}$ con $L(C_1)$ posto a sinistra di $L(C_2)$. Inoltre, $L(C_1)$ è aperto (Teorema 4.25) cosicché, scegliendo

$$c = \sup\{Lx : \, x \in C_1\}$$

si ha la tesi cercata.

(b) Sia V un intorno aperto, convesso e simmetrico dell'origine tale che

$$(C_1 + V) \cap C_2 = \varnothing$$

(Teorema 4.5) cosicché l'insieme $C_1 + V$ è aperto, disgiunto da C_2 e convesso. Infatti, fissati due punti $x'_i \in C_1 + V$ $(i = 0, 1)$, esistono $x_i \in C_1$ tali che $x'_i - x_i \in V$ per $i = 0, 1$ e per ogni $0 \le t \le 1$ risulta $tx_1 + (1 - t)x_0 \in C_1$ e

$$\begin{aligned} tx'_1 + (1 - t)x'_0 &= tx_1 + (1 - t)x_0 + t(x'_1 - x_1) + (1 - t)(x'_0 - x_0) \in \\ &\in C_1 + tV + (1 - t)V \subset tx_1 + (1 - t)x_0 + V. \end{aligned}$$

Per (a) esistono allora un funzionale lineare limitato $L \in X^*$ e un numero $c_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$Lx < c_2 \le Ly, \qquad x \in C_1 + V \text{ e } y \in C_2.$$

Poiché C_1 è compatto con $C_1 \subset C_1 + V$, esiste $c_1 < c_2$ tale che $Lx \le c_1$ per ogni $x \in C_1$ e questo completa la dimostrazione. $\square$

Per illustrare la versione complessa del teorema di separazione dei convessi conviene evidenziare che, quando X è uno spazio localmente convesso complesso, anche il corrispondente spazio vettoriale reale $X_{\mathbb{R}}$ risulta essere uno spazio localmente convesso reale con la stessa topologia e la relazione che intercorre tra i relativi duali è illustrata nella proposizione seguente che va confrontata con Proposizione 1.20.

Proposizione 4.53. *Siano X uno spazio localmente convesso complesso e $X_{\mathbb{R}}$ il corrispondente spazio localmente convesso reale e siano $L \in \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ e $\Lambda = \mathrm{Re}(L)$. Allora,*

$$L \in X^* \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Lambda \in X^*_{\mathbb{R}}.$$

Pertanto, come nel caso degli spazi normati, ogni elemento del duale X^* di uno spazio localmente convesso complesso X è univocamente determinato dalla sua parte reale che è un elemento del duale $X^*_{\mathbb{R}}$ di $X_{\mathbb{R}}$ e viceversa ogni elemento di $X^*_{\mathbb{R}}$ determina univocamente un elemento di X^*.

Dimostrazione. Si ha evidentemente $|\Lambda x| \le |Lx|$ per ogni $x \in X$ e quindi da $L \in X^*$ segue $\Lambda \in X^*_{\mathbb{R}}$ (Teorema 4.25).
Viceversa, sia $\Lambda \in X^*_{\mathbb{R}}$ e sia V un intorno di 0 in $X_{\mathbb{R}}$ tale che risulti

$$|\Lambda x| \le M, \qquad x \in V,$$

per $M \ge 0$ opportuno (Teorema 4.25). Con le notazioni di $(**)$ della sezione precedente, esiste $W \in \mathcal{W}_0$ intorno bilanciato di 0 in X tal che $W \subset V$ e per ogni $x \in W$ esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tale che risulti $|Lx| = \lambda Lx$. Poichè $\lambda x \in W \subset V$, si ha

$$|Lx| = \lambda Lx = L(\lambda x) = \Lambda(\lambda x) \le M$$

e questo conclude la dimostrazione (Teorema 4.25). $\square$

TEOREMA 4.54. *Sia X uno spazio localmente convesso complesso e siano $C_i \subset X$ $(i = 1, 2)$ due insiemi convessi (non vuoti) tali che $C_1 \cap C_2 = \varnothing$. Allora,*

(a) *se C_1 è aperto, esistono $L \in X^*$ e $c \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\mathrm{Re}(Lx) < c \leq \mathrm{Re}(Ly) \qquad \textit{per ogni } x \in C_1 \textit{ e } y \in C_2;$$

(b) *se C_1 è compatto e C_2 è chiuso, esistono $L \in X^*$ e $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ con $c_1 < c_2$ tali che*

$$\mathrm{Re}(Lx) \leq c_1 < c_2 \leq \mathrm{Re}(Ly) \qquad \textit{per ogni } x \in C_1 \textit{ e } y \in C_2.$$

Se X è uno spazio normato complesso, la separazione di insiemi convessi disgiunti avviene quindi tramite un iperpiano chiuso reale $\pi_u = \{x : \ \mathrm{Re}(Lx) = u\}$ $(u \in \mathbb{R})$ poichè gli iperpiani chiusi complessi $\pi_z = \{x : \ Lx = z\}$ ($z \in \mathbb{C}$ e $u = \mathrm{Re}(z)$) sono sottoinsiemi propri di π_u che, come nel caso degli spazi normati, non disconnettono X (Proposizione 1.19).

DIMOSTRAZIONE. Sia $X_{\mathbb{R}}$ lo spazio normato reale corrispondente a X. Se C_1 e C_2 sono insiemi non vuoti, convessi e disgiunti che verificano le ipotesi (a) o (b), esiste un funzionale $\mathbb{R}-$lineare continuo $\Lambda \in X_{\mathbb{R}}^*$ che li separa (Teorema 4.52). La conclusione segue con $L \in X^*$ definito da $Lx = \Lambda x - i\Lambda(ix)$ per $x \in X$ (Proposizione 4.53). $\square$

La proprietà di separazione dei convessi appena dimostrata permette di estendere al caso degli spazi localmente convessi le note proprietà di estensione dei funzionali lineari continui su spazi normati.

COROLLARIO 4.55. *Sia X uno spazio localmente convesso sul campo $\mathbb{K}$. Allora, X^* separa i punti di X.*

DIMOSTRAZIONE. Se $x_i \in X$ $(i = 1, 2)$ con $x_1 \neq x_2$, la conclusione segue dai risultati precedenti con $C_i = \{x_i\}$. $\square$

COROLLARIO 4.56. *Sia X uno spazio localmente convesso sul campo $\mathbb{K}$ e siano $M_0 \subset X$ un sottospazio, $L_0 \in M_0^*$ un funzionale lineare continuo su M_0 e $x_0 \in X$ un punto. Allora,*

(a) *se $x_0 \notin \mathrm{cl}(M_0)$, esiste $L \in X^*$ tale che*

$$\begin{cases} Lx = 0 & \textit{se } x \in M_0 \\ Lx_0 = 1; \end{cases}$$

(b) *esiste $L \in X^*$ tale che*

$$Lx_0 = Lx, \qquad x \in M_0.$$

DIMOSTRAZIONE. (a) Posto $C_1 = \{x_0\}$ e $C_2 = \mathrm{cl}(M_0)$, esiste $L \in X^*$ tale che risulti

$$\mathrm{Re}(Lx_0) < \mathrm{Re}(Lx), \qquad x \in M_0.$$

Poiché $0 \in M_0$, deve essere $\mathrm{Re}(Lx_0) < 0$ e quindi $\mathrm{Re}(L(M_0))$ risulta essere un sosttospazio proprio di $\mathbb{R}$. Deve allora essere $\mathrm{Re}(Lx) = 0$ per ogni $x \in M_0$ da cui segue $Lx = 0$ per ogni $x \in M_0$ (Proposizione 1.20). Moltiplicando L per un opportuna costante si ottiene che sia $Lx_0 = 1$

(b) Supponiamo che L_0 non sia identicamente nullo su M. Allora il nucleo

$$\ker(L_0) = \big\{x \in M_0 : \ L_0 x = 0\big\}$$

di L_0 è un sottospazio proprio di M_0 che è chiuso nella topologia indotta da X su M_0. Sia quindi $x_0 \in M_0$ tale che $L_0(x_0) = 1$. Essendo L_0 continuo in M_0, il punto

x_0 non appartiene alla chiusura di $\ker(L_0)$ in X. Per (a) esiste allora un funzionale lineare continuo $L \in X^*$ tale che

$$Lx_0 = 1 \qquad \text{e} \qquad Lx = 0 \text{ per ogni } x \in \ker(L_0).$$

Per ogni $x \in M_0$ si ha

$$x - (L_0x)x_0 \in \ker(L_0)$$

e di conseguenza risulta

$$0 = L(x - (L_0x)x_0) = Lx - L_0xLx_0 = Lx - L_0x.$$

Pertanto risulta $Lx = L_0x$ per ogni $x \in M_0$ e questo completa la dimostrazione. $\square$

Esercizi

4.1. Siano X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ e $C \subset X$ un insieme convesso. Provate che $\mathrm{cl}(C)$ e $\mathrm{int}(C)$ sono convessi.

4.2. Siano X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ e Y un sottospazio di X. Provate che $Y = \{0\}$.

4.3. Siano X uno spazio vettoriale topologico sul campo $\mathbb{K}$ e $E, F \subset X$ due insiemi limitati. Provate che $E + F$ e λE ($\lambda \in \mathbb{K}$) sono insiemi limitati.

CAPITOLO 5

Topologie deboli

Una limitazione alle applicazioni della teoria degli spazi di Banach e di Hilbert e delle operazioni lineari tra di essi alla risoluzione di problemi di analisi ha origine nella stessa ricchezza della topologia degli spazi normati di dimensione infinita. Da ciò deriva che solo insiemi relativamente piccoli nel senso di essere privi di punti interni possono essere compatti (Corollario 1.25). Ci proponiamo in questo capitolo di introdurre negli spazi normati e nei relativi duali delle strutture di spazi localmente convessi nelle quali il problema della scarsità di insiemi compatti può trovare una parziale soluzione.
Come in precedenza, in tutto questo capitolo denoteremo con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ il campo dei numeri complessi o reali.

5.1. Topologie deboli

La nozione di topologia su uno spazio vettoriale definita mediante una famiglia di seminorme consente di munire ogni spazio normato di una struttura di spazio localmente convesso in cui la topologia è definita mediante i funzionali lineari del duale. Questa topologia prende il nome di *topologia debole* e, come suggerisce il nome, risulta più debole della topologia normata originale. In conseguenza di ciò, essa possiede migliori proprietà di compattezza pur lasciando inalterati i funzionali lineari continui del duale dello spazio normato originale. Analogamente, sul duale di uno spazio normato è possibile definire una struttura di spazio localmente convesso la cui topologia prende il nome di *topologia debole**. Nella topologia debole* la convergenza delle successioni di funzionali lineari equivale alla convergenza puntuale e, come vedremo nella sezione successiva, questa topologia gode di eccellenti proprietà di compattezza. La topologia debole di uno sopazio normato di dimensione infinita non è mai metrizzabile e lo stesso vale per la topologia debole* del duale di uno spazio di Banach di dimensione infinita.
Introduciamo in questa sezione queste topologie e ne esaminiamo le principali proprietà con particolare riguardo alla compattezza e alle relazioni tra topologia debole e topologia debole* del biduale di uno spazio di Banach riflessivo.
Denotiamo in tutta questa sezione con X uno spazio normato o di Banach sul campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, con $\|\cdot\|$ la sua norma e con τ la relativa topologia. Denotiamo inoltre con X^* il duale di X, con lo stesso simbolo $\|\cdot\|$ la norma di X^* e con τ^* la topologia di X^*. Utilizziamo altresì per gli elementi del duale X^* e per la loro azione sugli elementi di X le notazioni già introdotte in Sezione 1.4.

Topologia debole. Per ogni funzionale lineare continuo $x^* \in X^*$, la funzione

$$p_{x^*}(x) = |\langle x^*, x\rangle|, \qquad x \in X,$$

è una seminorma su X e la famiglia di seminorme $P = \{p_{x^*} : x^* \in X^*\}$ è separante per il teorema di Hahn–Banach (Corollario 1.46).

DEFINIZIONE 5.1. Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$. La topologia localmente convessa τ_w su X generata dalla famiglia separante di seminorme P si dice *topologia debole di* X. □

Lo spazio localmente convesso $(X\,,\tau_w)$ si denota brevemente con X_w.
Una base di intorni bilanciati e convessi dell'origine in X_w è quindi data dagli insiemi della forma $(*)$ di Sezione 4.2 che denotiamo per brevità con

$$V = V(x_1^*,\ldots,x_n^*;\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) = \big\{x \in X:\ |\langle x_m^*\,,x\rangle| < \varepsilon_m \text{ per } m = 1,\ldots,n\big\}$$

al variare di $x_1^*,\ldots,x_n^* \in X^*$ e di $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n > 0$ $(n \geq 1)$.
Nel seguito utilizzeremo espressioni autoesplicative come $w-$intorno e $w-$chiusura, insieme debolmente aperto, debolmente chiuso o debolmente compatto, funzione debolmente continua e così via per distinguere proprietà topologiche di insiemi e funzioni che sono riferite alla topologia debole dalle corrispondenti affermazioni riferite alla topologia normata originale dello spazio.
Il risultato seguente identifica la topologia debole di uno spazio normato X con la topologia inversa su X generata dal duale X^* di X.

Teorema 5.2. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e siano τ la topologia su X indotta dalla norma e τ_w la topologia debole di X. Allora,*

(a) *τ_w è la topologia inversa su X generata da $\mathbb{K}$ e dai funzionali lineari di X^*;*
(b) *$\tau_w \subset \tau$ e $(X_w)^* = X^*$.*

La topologia debole dello spazio normato X è quindi la più debole topologia di X che rende continui tutti gli elementi del duale X^* di X ed è più debole della topologia normata di X. Inoltre, il duale di X_w come spazio localmente convesso coincide con il duale X^* di X come spazio normato e da ciò segue che risulta $(X_w)_w = X_w$ con ovvio significato dei simboli[1].

Dimostrazione. (a) Sia τ_{X^*} la topologia inversa su X generata da $\mathbb{K}$ e dai funzionali lineari continui di X^* ovvero la più debole topologia su X che rende continui gli elementi del duale X^* di X (Sezione I–2.2). Una base di intorni di $x_0 \in X$ per τ_{X^*} è data dagli insiemi

$$\begin{aligned} W_{x_0}(x_1^*,\ldots,x_n^*;\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) &= \\ &= \big\{x \in X : |\langle x_m^*\,,x\rangle - \langle x_m^*\,,x_0\rangle| < \varepsilon_m \text{ per } m = 1,\ldots,n\big\} \end{aligned}$$

al variare di $x_1^*,\ldots,x_n^* \in X^*$ e di $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n > 0$ con $n \geq 1$ (Teorema I–2.33 – (b)).
Risulta evidentemente

$$\begin{aligned} \big\{x \in X:\ |\langle x_m^*\,,x\rangle - \langle x_m^*\,,x_0\rangle| < \varepsilon_m \text{ per } m = 1,\ldots,n\big\} &= \\ &= \big\{x \in X:\ p_{x_m^*}(x - x_0) < \varepsilon_m \text{ per } m = 1,\ldots,n\big\} \end{aligned}$$

per ogni m e da ciò segue

$$W_{x_0}(x_1^*,\ldots,x_n^*;\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) = x_0 + V(x_1^*,\ldots,x_n^*;\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$$

per ogni $x_1^*,\ldots,x_n^* \in X^*$ e $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n > 0$ con $n \geq 1$. Poiché gli insiemi a destra al variare di $x_1^*,\ldots,x_n^* \in X^*$ e di $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n > 0$ e $n \geq 1$ costituiscono a loro volta una base di intorni di x_0 nella topologia debole τ_w di X, risulta $\tau_{X^*} = \tau_w$ e questo prova l'asserto.
(b) Per la topologia normata τ di X tutti gli elementi del duale X^* sono continui e quindi per (a) risulta $\tau_w = \tau_{X^*} \subset \tau$. Per lo stesso motivo risulta $X^* \subset (X_w)^*$ e viceversa ogni elemento $L \in (X_w)^*$ è un funzionale lineare τ_w-continuo e quindi

[1] Lo spazio localmente convesso X_w non è mai uno spazio normato a meno che X abbia dimensione finita (Teorema 5.3) e quindi non potremmo parlare di topologia debole di X_w secondo la definizione data sopra. Tuttavia, un attimo di riflessione mostra che la definizione di topologia debole può essere estesa senza modifiche a tutti gli spazi localmente convessi.

anche $\tau-$continuo poiché risulta $\tau_w \subset \tau$. Quindi, $L \in X^*$ e questo completa la dimostrazione. $\square$

Esaminiamo ora più in dettaglio le relazioni che intercorrono tra X come spazio normato e X_w con la topologia debole. Il risultato seguente mostra che X e X_w sono molto diversi quando X ha dimensione infinita.

TEOREMA 5.3. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ con $\dim X = +\infty$. Allora,*

(a) *ogni intorno U dell'origine in X_w contiene un sottospazio di dimensione infinita;*

(b) *X_w non è metrizzabile.*

In particolare, se X ha dimensione infinita, nessun intorno dell'origine in X_w può essere debolmente limitato né limitato in norma e la topologia debole di X non è mai metrizzabile ed è quindi strettamente più debole della topologia normata.

DIMOSTRAZIONE. (a) Sia U un intorno di 0 in X_w cosicché risulta $V \subset U$ con

$$V = V(x_1^*, \ldots, x_n^*; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

per $x_m^* \in X^*$ e $\varepsilon_m > 0$ opportuni $(m = 1, \ldots, n)$. Sia $T \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K}^n)$ l'operatore lineare definito da

$$Tx = (\langle x_1^*, x\rangle, \ldots, \langle x_n^*, x\rangle), \qquad x \in X,$$

e, per ogni $k \geq 1$, siano X_k un sottospazio di X con $\dim(X_k) = k$ e $T_k \in \mathcal{L}(X_k, \mathbb{K}^n)$ la restrizione di T a X_k. Posto $N = \ker(T)$, risulta $\ker(T_k) \subset N$ per ogni k. Si ha allora

$$k = \dim(X_k) = \dim(\ker(T_k)) + \dim(\mathrm{im}(T_k)) \leq \dim N + n$$

per ogni k e quindi deve essere $\dim N = +\infty$. Da $N \subset V$ segue l'asserto.

(b) Proviamo equivalentemente che, se X_w è metrizzabile, deve essere $\dim X < +\infty$. Supponiamo quindi che d sia una metrica su X che induce la topologia debole τ_w di X cosicché le palle

$$B_{1/k}(0) = \{x \in X : \, d(x, 0) < 1/k\}, \qquad k \geq 1,$$

sono una base di intorni di 0 in X_w. Pertanto, per ogni $k \geq 1$ esistono un insieme finito di funzionali lineari $\Lambda_k \subset X^*$ e un numero positivo $\varepsilon_k > 0$ tali che risulti

$$V_k = \{x \in X : \, |\langle x^*, x\rangle| < \varepsilon_k \text{ per ogni } x^* \in \Lambda_k\} \subset B_{1/k}(0)$$

per ogni k. Consideriamo ora l'insieme (al più) numerabile

$$\Lambda = \bigcup_{k \geq 1} \Lambda_k$$

e proviamo che risulta $\mathrm{span}(\Lambda) = X^*$. A tal fine, sia $x_0^* \in X^*$ fissato. Allora, l'insieme

$$V = V(x_0^*; 1) = \{x \in X : \, |\langle x_0^*, x\rangle| < 1\}$$

è un intorno dell'origine in X_w e quindi si ha $V_k \subset B_{1/k}(0) \subset V$ per $k \geq 1$ opportuno. Per ogni

$$(*) \qquad x \in \bigcap \{\ker(x^*) : \, x^* \in \Lambda_k\}$$

si ha allora

$$\langle x^*, \lambda x\rangle = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{K}, \quad x^* \in \Lambda_k,$$

e quindi risulta $\lambda x \in V_k \subset V$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$. Conseguentemente risulta

$$|\langle x_0^*, \lambda x\rangle| < 1, \qquad \lambda \in \mathbb{K},$$

per ogni x tale che valga $(*)$. Abbiamo così provato che risulta

$$\bigcap \big\{\ker(x^*):\ x^* \in \Lambda_k\big\} \subset \ker(x_0^*)$$

e da ciò segue $x_0^* \in \mathrm{span}(\Lambda)$ (Lemma 1.49).
Poiché X^* è uno spazio di Banach, Λ deve essere finito per il teorema di Baire (Esercizio 1.2) e quindi X^* deve essere uno spazio di Banach di dimensione finita. Lo stesso vale allora per il biduale X^{**} e quindi anche X deve avere dimensione finita essendo isomorfo come spazio vettoriale ad un sottospazio di X^{**}. $\square$

Corollario 5.4. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$. Allora,*

$$X = X_w \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dim X < +\infty.$$

Dimostrazione. Se $X = X_w$, allora X_w ha un intorno dell'origine limitato in norma e quindi deve essere $\dim X < +\infty$ (Teorema 5.3).
Viceversa, se $\dim X < +\infty$, l'identità $\mathrm{id}_X \in \mathcal{L}(X\,, X_w)$ come isomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita è anche un isomorfismo di spazi vettoriali topologici (Corollario 4.27) e questo prova la tesi. $\square$

Per tutti gli spazi normati di dimensione infinita la topologia debole è dunque strettamente più debole della topologia normata originale e la chiusura debole di un insieme può essere molto più grande della chiusura nella norma come risulta dall'esempio seguente.

Esempio 5.5. Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ con $\dim X = +\infty$ e sia

$$S = \big\{x \in X:\ \|x\| = 1\big\}$$

la sfera unitaria. Allora, la chiusura di S in X_w coincide con la palla chiusa di raggio unitario B di X ovvero risulta

$$\mathrm{cl}_w(S) = B = \big\{x \in X:\ \|x\| \le 1\big\}\,.$$

Per il teorema di Hahn–Banach risulta

$$B = \bigcap_{\|x^*\|=1} \big\{x:\ |\langle x^*, x\rangle| \le 1\big\}\,.$$

Pertanto, la palla B è chiusa in X_w e contiene S e dunque risulta $\mathrm{cl}_w(S) \subset B$.
Viceversa, dati un qualunque punto $x_0 \in X$ con $\|x_0\| < 1$ e un generico intorno V dell'origine in X_w della forma

$$V = V(x_1^*, \ldots, x_n^*; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

($x_m^* \in X^*$ e $\varepsilon_m > 0$ per $m = 1, \ldots, n$) proviamo che risulta $(x_0 + V) \cap S \ne \varnothing$. Consideriamo a tal fine il sottospazio N definito da

$$N = \ker(x_1^*) \cap \cdots \cap \ker(x_n^*).$$

Chiaramente risulta $N \subset V$ e, procedendo come in Teorema 5.3 – (a), si prova che N ha dimensione infinita cosicché esiste almeno un vettore $y_0 \in N$ con $y_0 \ne 0$. Allora, la funzione $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(t) = \|x_0 + t y_0\|, \qquad t \in \mathbb{R},$$

è continua e tale che

$$\varphi(0) = \|x_0\| < 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$$

cosicché si ha $\varphi(t_0) = 1$ per $t_0 > 0$ opportuno. Per tale t_0 risulta allora $x_0 + t_0 y_0 \in S$ e $x_0 + t_0 y_0 \in x_0 + N \subset x_0 + V$ da cui segue $(x_0 + V) \cap S \ne \varnothing$. Dall'arbitrarietà di x_0 e V segue $B \subset \mathrm{cl}_w(S)$ e questo prova l'asserto. $\square$

Esaminiamo ora quali forme assumono le nozioni di limitatezza e convergenza di successioni nella topologia debole.
Sia X uno spazio normato X sul campo $\mathbb{K}$. Un insieme $B \subset X$ è *limitato in* X_w ovvero *debolmente limitato in* X se risulta

$$\sup\left\{|\langle x^*, x\rangle| : \, x \in B\right\} < +\infty, \qquad x^* \in X^*,$$

(Proposizione 4.40). Poiché la topologia debole di X_w è più debole della topologia normata di X, ogni insieme $B \subset X$ limitato in norma è anche debolmente limitato e dal principio di uniforme limitatezza si ricava l'equivalenza tra le due nozioni.

TEOREMA 5.6. *Siano* X *uno spazio normato sul campo* $\mathbb{K}$ *e* $B \subset X$ *un insieme. Allora, le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(a) B *è limitato in norma;*
(b) B *è debolmente limitato.*

In particolare, ogni insieme debolmente compatto è limitato in norma.

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente provare che ogni insieme debolmente limitato è limitato in norma.
Sia B un insieme debolmente limitato. Per definizione, per ogni $x^* \in X^*$ risulta

$$\sup\left\{|\langle x^*, x\rangle| : \, x \in B\right\} < +\infty.$$

Denotata con $J\colon X \to X^{**}$ l'immmersione canonica di X nel suo biduale, i funzionali lineari di $J(B)$ risultano puntualmente limitati su X^* cosicché si ha $\|Jx\| \le M$ per ogni $x \in B$ per $M \ge 0$ opportuno per il teorema di Banach–Steinhaus (Teorema 1.50). Essendo J un'isometria, si ha

$$\|x\| = \|Jx\| \le M, \qquad x \in B,$$

e questo completa la dimostrazione. □

Sia X uno spazio normato X sul campo $\mathbb{K}$. Una successione $\{x_k\}_k$ di elementi di X *converge a* $x \in X$ *in* X_w ovvero *converge debolmente a* $x \in X$ se risulta

$$\lim_{k\to+\infty} \langle x^*, x_k\rangle = \langle x^*, x\rangle, \qquad x^* \in X^*,$$

(Proposizione 4.41) nel qual caso scriveremo $x_k \rightharpoonup x$ in X_w per $k \to +\infty$ ovvero

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x \qquad \text{in } X_w.$$

Poiché la topologia debole di X_w è più debole della topologia normata di X, ogni successione $\{x_k\}_k$ che converge a x nello spazio normato X converge allo stesso limite anche nella topologia debole cioè si ha

$$x_k \to x \text{ in } X \text{ per } k \to +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad x_k \rightharpoonup x \text{ in } X_w \text{ per } k \to +\infty.$$

L'implicazione opposta è in genere falsa come provano gli esempi seguenti[2].

ESEMPIO 5.7. (a) Sia $e_k \in c_0$ $(k \ge 1)$ la successione definita da

$$e_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \ne k \end{cases} \qquad k \ge 1,$$

Poiché si ha $c_0^* = \ell_1$ e

$$\langle y, x\rangle = \sum_n y(n)x(n), \qquad x \in c_0 \text{ e } y \in \ell_1,$$

[2] Tuttavia per le successioni di alcuni spazi di Banach la convergenza debole e la convergenza in norma coincidono (Teorema 5.14).

(Esercizio 1.16), risulta

$$\lim_{k\to+\infty} \langle y\,,e_k\rangle = \lim_{k\to+\infty} y(k) = 0, \qquad y \in \ell_1,$$

e quindi si ha $e_k \rightharpoonup 0$ debolmente in c_0 per $k \to +\infty$ ma la successione $\{e_k\}_k$ non converge in c_0 poiché si ha $\|e_k - e_h\|_u = 1$ per $h \neq k$.

(b) Siano H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e $\{u_n\}_n$ un insieme ortonormale di H. Si ha allora

$$\lim_{n\to+\infty} \langle u_n\,|\,x\rangle = \lim_{n\to+\infty} \hat{x}(n) = 0, \qquad x \in H,$$

(Teorema 3.16) e quindi $u_n \rightharpoonup 0$ debolmente in H per $n \to +\infty$ ma la successione $\{u_n\}_n$ non converge in H poiché si ha $\|u_n - u_m\| = \sqrt{2}$ per $m \neq n$. □

Dall'equivalenza di limitatezza debole e limitatezza in norma (Teorema 5.6) segue la limitatezza in norma delle successioni debolmente convergenti. Diamo di ciò un'altra dimostrazione basata direttamente sul principio di uniforme limitatezza.

Teorema 5.8. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e siano $x_k \in X$ $(k \geq 1)$ e $x \in X$ vettori tali che*

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x \qquad \text{in } X_w.$$

Allora,

$$\sup_k \|x_k\|_k < +\infty \qquad e \qquad \|x\| \leq \liminf_{k\to+\infty} \|x_k\|.$$

In particolare, la norma $x \in X_w \mapsto \|x\| \in [0,+\infty)$ è una funzione sequenzialmente debolmente semicontinua inferiormente che non è in genere debolmente sequenzialmente continua (Esempio 5.7 e Teorema 5.14).

Dimostrazione. Sia $J\colon X \to X^{**}$ l'immersione canonica di X nel biduale X^{**}. Si ha $Jx_k \to Jx$ puntualmente in X^* per $k \to +\infty$ per ipotesi e la conclusione segue da Corollario 1.51 essendo J un'isometria di X in X^{**}. □

Analogamente, una successione di elementi $x_k \in X$ $(k \geq 1)$ verifica la *condizione di Cauchy in X_w* ovvero è *debolmente di Cauchy in X* se per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x^* \in X^*$ esiste $k_0 = k_0(x^*, \varepsilon) \geq 1$ tale che

$$k \geq h \geq k_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\langle x^*, x_k - x_h\rangle| \leq \varepsilon$$

(Proposizione 4.41). Come accade per la convergenza debole, ogni successione $\{x_k\}_k$ che verifica la condizione di Cauchy nello spazio normato X verifica anche la condizione di Cauchy in X_w e non vale il viceversa. Ogni successione debolmente convergente in X è debolmente di Cauchy in X e ogni successione debolmente di Cauchy in X è limitata in norma (Teoremi 4.20 e 5.6). Lo spazio normato X si dice *debolmente* (*sequenzialmente*) *completo* se ogni successione debolmente di Cauchy in X converge debolmente ad un elemento di X. Ogni spazio di Banach riflessivo è sequenzialmente completo mentre spazi di Banach non riflessivi possono essere debolmente sequenzialmente completi oppure no (Esercizio 5.4).

Definizioni e considerazioni analoghe si ripetono per le successioni generalizzate per le quali valgono i risultati di Sezione 4.1. In particolare, uno spazio normato X in cui tutte le successioni generalizzate debolmente di Cauchy sono debolmente convergenti si dice *debolmente completo.* Il teorema seguente mostra che solo gli spazi di dimensione finita possono essere debolmente completi

Teorema 5.9. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$. Allora, le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(a) *X è debolmente completo;*
(b) $\dim X < +\infty$.

Dimostrazione. (a) Sia X debolmente completo e sia $L\colon X^* \to \mathbb{K}$ un funzionale lineare sul duale di X. Per ogni insieme finito $\Lambda = \{x_1^*, \dots, x_n^*\} \subset X^*$, la restrizione di L a span (Λ) è limitata (Corollario 1.22) e, denotata con $M = \|L\|_\Lambda$ la norma di tale restrizione, risulta

$$\|\lambda_1 L x_1^* + \cdots \lambda_n L x_n^*\| \le M \|\lambda_1 x_1^* + \cdots + \lambda_n x_n^*\|$$

per ogni $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Per il teorema di Helly (Teorema 1.48) esiste allora $x_\Lambda \in X$ tale che

$$\langle x_m^*, x_\Lambda \rangle = L x_m^*, \qquad m = 1, \dots, n.$$

La successione generalizzata $\{x_\Lambda\}_\Lambda$ così definita sull'insieme filtrante degli insiemi finiti Λ di X^* è debolmente di Cauchy in X poichè per ogni $x^* \in X^*$ fissato la successione generalizzata $\{\langle x^*, x_\lambda \rangle\}_\Lambda$ è definitivamente costante: per ogni $x^* \in X^*$ risulta

$$\Lambda \subset X^* \text{ finito e } x^* \in \Lambda \qquad \Longrightarrow \qquad \langle x^*, x_\Lambda \rangle = L x^*.$$

Essendo X debolmente completo, per $x \in X$ opportuno si ha

$$\lim_{\Lambda \text{ finito}} \langle x^*, x_\Lambda \rangle = \langle x^*, x \rangle, \qquad x^* \in X^*,$$

e quindi, per ogni $x^* \in X^*$ fissato e per ogni $\varepsilon > 0$, per un opportuno insieme finito $\Lambda_0 = \Lambda_0(\varepsilon) \subset X^*$ risulta

$$\Lambda \subset X^* \text{ finito e } \Lambda_0 \cup \{x^*\} \subset \Lambda \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} |\langle x^*, x_\Lambda \rangle - \langle x^*, x \rangle| \le \varepsilon \\ \langle x^*, x_\Lambda \rangle = L x^*. \end{cases}$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, si ha $\langle x^*, x \rangle = L x^*$ per ogni x^* ovvero $L = Jx$ e ciò prova che L è continuo.
Abbiamo così provato che, se X è debolmente completo, ogni funzionale lineare sul duale di X è limitato. Questo implica che X^* abbia dimensione finita (Esempio 1.11) e ciò a sua volta implica lo stesso per X.

(b) Se X ha dimensione finita, risulta $X = X_w$ (Corollario 5.4) con X completo (Corollario 1.22) e dall'equivalenza di completezza e completezza sequenziale per gli spazi metrici segue (a). □

Benché in uno spazio normato di dimensione infinita la topologia debole sia strettamente più debole della topologia normata, la chiusura debole di un insieme convesso coincide con la sua chiusura nella topologia della norma.

Teorema 5.10 (B. Mazur). *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e sia $E \subset X$ un insieme convesso. Allora, si ha*

$$\mathrm{cl}_w(E) = \mathrm{cl}(E).$$

Conseguentemente, un insieme convesso E è chiuso (denso) in X se e solo se è chiuso (denso) in X_w. In particolare, queste equivalenze valgono per i sottospazi di X.

Dimostrazione. La chiusura debole $\mathrm{cl}_w(E)$ è debolmente chiusa e quindi è chiusa per la topologia della norma cosicché risulta

$$\mathrm{cl}(E) \subset \mathrm{cl}_w(E).$$

Viceversa sia $x_0 \in X$ un punto tale che $x_0 \notin \mathrm{cl}(E)$. Gli insiemi $\{x_0\}$ e $\mathrm{cl}(E)$ sono due insiemi convessi (Esercizio 4.1) e disgiunti e sono inoltre l'uno compatto e l'altro chiuso in X. Per il teorema di separazione dei convessi (Teorema 4.54) esistono un funzionale lineare continuo $x^* \in X^*$ e un numero $t \in \mathbb{R}$ per i quali risulta

$$\mathrm{Re}(\langle x^*, x_0 \rangle) < t < \mathrm{Re}(\langle x^*, x \rangle), \qquad x \in \mathrm{cl}(E).$$

Pertanto, l'insieme $\{x \in X : \operatorname{Re}(\langle x^*, x\rangle) < t\}$ è un intorno di x_0 in X_w che non interseca $\operatorname{cl}(E)$ e quindi neppure E. Di conseguenza $x_0 \notin \operatorname{cl}_w(E)$ e da questo segue

$$\operatorname{cl}_w(E) \subset \operatorname{cl}(E)$$

e questo completa la dimostrazione. □

Il teorema di Mazur assicura che la chiusura debole di un insieme convesso coincide con la chiusura nella norma mentre nel caso di insiemi non convessi in uno spazio normato di dimensione infinita la chiusura debole può essere molto più grande della chiusura nella norma (Esempio 5.5).

COROLLARIO 5.11. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e siano $\{x_k\}_k$ una successione in X e $x \in X$ tali che $x_k \rightharpoonup x$ in X_w per $k \to +\infty$. Allora, esiste una successione $\{y_j\}_j$ in X con le seguenti proprietà:*

- *$y_j \in \operatorname{co}(\{x_k\}_k)$ per ogni j;*
- *$y_j \to x$ per $j \to +\infty$ in X.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $C = \operatorname{co}(\{x_k\}_k)$ l'inviluppo convesso della successione $\{x_k\}_k$. Allora, $x \in \operatorname{cl}_w(C)$ e da $\operatorname{cl}_w(C) = \operatorname{cl}(C)$ (Teorema 5.10) segue che x è il limite in X di una successione $\{y_j\}_j$ di elementi di C. □

L'esempio seguente illustra la portata del risultato precedente.

ESEMPIO 5.12. Sia K uno spazio topologico di Hausdorff compatto e siano $f_k : K \to \mathbb{K}$ $(k \geq 1)$ e $f : K \to \mathbb{K}$ funzioni continue tali che

- $|f_k(x)| \leq 1$ per ogni $x \in K$ e $k \geq 1$;
- $f_k \to f$ puntualmente su K per $k \to +\infty$.

Lo spazio $C(K)$ delle funzioni continue su K munito della norma dell'estremo superiore è uno spazio di Banach e la convergenza nella norma di $C(K)$ coincide con la convergenza uniforme su K. Inoltre, per il teorema di rappresentazione di Riesz (Teorema 2.16), il duale di $C(K)$ si identifica con lo spazio di Banach $\mathcal{M}(K)$ delle misure di Radon reali o complesse su K.
Nelle ipotesi fatte sulle funzioni f_k e su f, per il teorema di convergenza dominata si ha allora

$$\lim_{k \to +\infty} \int_K f_k d\,\mu = \int_K f\, d\mu$$

per ogni misura di Borel reale o complessa μ su K e quindi $f_k \rightharpoonup f$ debolmente in $C(K)$ per $k \to +\infty$. Per il teorema di Mazur esiste quindi una successione di combinazioni convesse delle funzioni f_k che convergono uniformemente a f. □

Concludiamo questo rapido esame della topologia debole osservando che la topologia debole di uno spazio normato è ereditata dai sottospazi nel senso illustrato dal risultato seguente.

PROPOSIZIONE 5.13. *Siano X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e Y un sottospazio di X. Allora, $Y_w = X_w \cap Y$.*

Nell'enunciato precedente, Y_w denota lo spazio vettoriale Y munito della topologia debole di Y mentre $Y \cap X_w$ denota lo spazio vettoriale Y munito della topologia indotta dalla topologia debole di X.

DIMOSTRAZIONE. Nelle notazioni di $(**)$ di Sezione 4.2 le basi di intorni dell'origine $\mathcal{V}_X$ e $\mathcal{V}_Y$ di X_w e Y_w sono formate dagli insiemi

$$V_X = \big\{x \in X : |\langle x_m^*, x\rangle| < \varepsilon_m \text{ per } m = 1, \ldots, n\big\}$$
$$V_Y = \big\{y \in Y : |\langle y_m^*, y\rangle| < \varepsilon_m \text{ per } m = 1, \ldots, n\big\}$$

al variare di $x_m^* \in X^*$, $y_m^* \in Y^*$ e di $\varepsilon_m > 0$ per $m = 1, \dots, n$.
Per ogni elemento V_X della base $\mathcal{V}_X$ risulta

$$V_X \cap Y = \{y \in Y : |\langle x_m^*, y\rangle| < \varepsilon_m \text{ per } m = 1, \dots, n\}$$

e quindi, posto $y_m^* = (x_m^*)_{|Y}$, si ha $y_m^* \in Y^*$ e $V_X \cap Y = V_Y$. Abbiamo così provato che risulta $\mathcal{V}_X \cap Y \subset \mathcal{V}_Y$.
Viceversa, ogni elemento $y_m^* \in Y^*$ del duale di Y si estende ad un elemento x_m^* del duale di X per il teorema di Hahn–Banach (Teorema 1.44). Ogni intorno V_Y della base $\mathcal{V}_Y$ è quindi della forma $V_Y = V_X \cap Y$ per $V_X \in \mathcal{V}_X$ opportuno cosicché $\mathcal{V}_Y \subset \mathcal{V}_X \cap Y$ e questo conclude la dimostrazione. □

Quando convergenza debole implica convergenza in norma? Quando una successione debolmente convergente di uno spazio normato di dimensione infinita è convergente in norma? In relazione a questa domanda esaminiamo in questa parte alcuni risultati che illustrano le relazioni tra convergenza debole e convergenza in norma muovendo dal sorprendente fatto che per le successioni di ℓ_1 i due tipi di convergenza coincidono benché la topologia normata di ℓ_1 sia strettamente più fine della topologia debole. Questo risultato prende il nome di *lemma di Schur.*

TEOREMA 5.14 (I. Schur). *Siano $x_k \in \ell_1$ $(k \geq 1)$ e $x \in \ell_1$ successioni di ℓ_1. Allora,*

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x \textit{ in } \ell_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{k\to+\infty} x_k = x \textit{ debolmente in } \ell_1.$$

Gli spazi normati di dimensione infinita in cui ogni successione debolmente convergente è convergente si dicono avere la *proprietà di Schur.* In tali spazi l'origine, pur essendo nella chiusura debole della sfera unitaria (Esempio 5.5), non è il limite di alcuna successione debolmente convergente e la norma $x \mapsto \|x\|$ risulta essere una funzione debolmente sequenzialmente continua a differenza di quanto accade in c_0 e negli spazi di Hilbert (Esempio 5.7).

DIMOSTRAZIONE. Occorre provare solo l'implicazione $\Longleftarrow$ e non è restrittivo supporre che sia $x = 0$. Prendendo $e_m \in \ell_\infty$ $(m \geq 1)$ definito da

$$e_m(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases} \qquad m \geq 1,$$

risulta

$$0 = \lim_{k\to+\infty} \langle e_m, x_k\rangle = \lim_{k\to+\infty} x_k(m)$$

per ogni m e quindi $x_k \to 0$ puntualmente su $\mathbb{N}_+$ per $k \to +\infty$.
Supponiamo per assurdo che $\{x_k\}_k$ non converga a zero in norma ℓ_1. Esistono allora $\varepsilon > 0$ ed una sottosuccessione $\{x_{k_h}\}_h$ con $h \geq 1$ per cui risulta

$$\sum_{n\geq 1} |x_{k_h}(n)| = \|x_{k_h}\|_1 \geq 5\varepsilon$$

per ogni h. Ricordando che $x_k \to 0$ puntualmente su $\mathbb{N}_+$ per $k \to +\infty$, sia $k_{h_1} \geq 1$ tale che $|x_{k_{h_1}}(1)| \leq \varepsilon$ e sia quindi $N_1 \geq 2$ tale che

$$\sum_{n\geq N_1+1} |x_{k_{h_1}}(n)| \leq \varepsilon$$

cosicché, posto $N_0 = 0$, risulta

$$\sum_{N_0<n\leq N_1} |x_{k_{h_1}}| \geq 3\varepsilon.$$

Procedendo come prima, scegliamo $k_{h_2} > k_{h_1}$ tale che

$$\sum_{1\leq n\leq N_1} |x_{k_{h_2}}| \leq \varepsilon$$

e scegliamo poi $N_2 > N_1$ tale che

$$\sum_{n \geq N_2+1} |x_{k_{h_2}}| \leq \varepsilon$$

da cui segue ancora

$$\sum_{N_1 < n \leq N_2} |x_{k_{h_2}}| \geq 3\varepsilon.$$

Iterando questo argomento si determinano una successione strettamente crescente di interi N_h $(h \geq 0)$ con $N_0 = 0$ e una sottosuccessione $x_{k_{h_j}}$ $(j \geq 1)$ tale che

$$\sum_{N_{j-1} < n \leq N_j} |x_{k_{h_j}}| \geq 3\varepsilon; \qquad \sum_{1 \leq n \leq N_{j-1}} |x_{k_{h_j}}| \leq \varepsilon; \qquad \sum_{n \geq N_j+1} |x_{k_{h_j}}| \leq \varepsilon;$$

per ogni $j \geq 1$. Sia quindi $y \in \ell_\infty$ definito da

$$y(n) = \operatorname{sgn}\left(x_{k_{h_j}}\right), \qquad N_{j-1} < n \leq N_j \text{ e } j \geq 1.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}
\left|\langle y, x_{k_{h_j}}\rangle\right| &= \left|\sum_{n \geq 1} y(n) x_{k_{h_j}}(n)\right| = \\
&= \left|\sum_{i \geq 1}\left(\sum_{N_{i-1} < n \leq N_i} y(n) x_{k_{h_j}}(n)\right)\right| = \\
&= \left|\sum_{i \geq 1}\left(\sum_{N_{i-1} < n \leq N_i} \operatorname{sgn}\left(x_{k_{h_j}}\right) x_{k_{h_j}}(n)\right)\right| \geq \\
&\geq \sum_{N_{j-1} < n \leq N_j} \left|x_{k_{h_j}}(n)\right| - \sum_{i \geq 1, i \neq j}\left(\sum_{N_{i-1} < n \leq N_i} \left|x_{k_{h_j}}(n)\right|\right) = \\
&= \sum_{N_{j-1} < n \leq N_j} \left|x_{k_{h_j}}(n)\right| - \sum_{1 \leq i \leq N_{j-1}} \left|x_{k_{h_j}}(n)\right| - \sum_{i \geq N_j+1} \left|x_{k_{h_j}}(n)\right| \geq \\
&\geq 3\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

per ogni $j \geq 1$ e ciò è assurdo. □

Una condizione evidentemente necessaria affinché una successione di vettori $\{x_n\}_n$ di uno spazio normato che è debolmente convergente ad un vettore x sia convergente in norma è che la successione delle norme $\{\|x_n\|\}_n$ converga alla norma $\|x\|$ di x. Gli spazi per cui tale condizione è anche sufficiente si dicono avere la *proprietà di Radon–Riesz*. Il teorema seguente mostra che gli spazi di Banach uniformemente convessi godono di tale proprietà.

TEOREMA 5.15. *Sia X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ con norma uniformemente convessa e siano $x_n \in X$ $(n \geq 1)$ e $x \in X$. Allora,*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \text{ in } X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \bullet \ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \text{ debolmente in } X; \\ \bullet \ \lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Occorre provare solo l'implicazione $\Longleftarrow$ e possiamo supporre che sia $x \neq 0$ altrimenti non c'è nulla da provare e conseguentemente che sia $x_n \neq 0$ per ogni n. Posto $y_n = x_n/\|x_n\|$ per ogni n e $y = x/\|x\|$, risulta $\|y_n\| = \|y\| = 1$ per ogni n e $y_n \rightharpoonup y$ in X_w per $n \to +\infty$. Inoltre, dall'uguaglianza

$$\|x_n - x\| = \big\|\|x_n\| y_n - \|x\| x\big\| \leq \|x_n\|\|y_n - y\| + \big|\|x_n\| - \|x\|\big|, \qquad n \geq 1,$$

segue che basta provare che risulta $y_n \to y$ in X per $n \to +\infty$. Se così non fosse, si avrebbe $\|y_{n_k} - y\| \geq \varepsilon$ per ogni k per $\varepsilon > 0$ opportuno e per un'opporrtuna sottosuccessione $\{y_{n_k}\}_k$ cosicché si avrebbe anche

$$\left\| \frac{y_{n_k} + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$$

per ogni k con $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0,1)$ associato a ε dall'uniforme convessità di X. Preso allora $y^* \in X^*$ tale che $\|y^*\| = 1$ e $\langle y^*, y\rangle = 1$ (Corollario 1.46), si avrebbe

$$\left| \langle y^*, \frac{y_{n_k} + y}{2} \rangle \right| \leq \left\| \frac{y_{n_k} + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$$

per ogni k e

$$\langle y^*, \frac{y_{n_k} + y}{2} \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle y^*, \frac{y_{n_k} + y}{2} \rangle + 1 \right) \to 1$$

per $k \to +\infty$ e ciò è assurdo. □

Dalle disuguaglianze di Clarkson (Teorema 2.46) segue immediatamente che gli spazi L_p con $1 < p < +\infty$ hanno la proprietà di Radon–Riesz.

Corollario 5.16 (J. Radon–F. Riesz). *Sia* $(\Omega, \mathcal{S}, \lambda)$ *uno spazio con misura positiva e siano* $1 < p < +\infty$ *e* $f_n \in L_p(\lambda)$ $(n \geq 1)$ *e* $f \in L_p(\lambda)$ *funzioni tali che*

- $f_n \to f$ *debolmente in* $L_p(\lambda)$ *per* $n \to +\infty$*;*
- $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ *per* $n \to +\infty$*.*

Allora, $f_n \to f$ *in* $L_p(\lambda)$ *per* $n \to +\infty$*.*

Topologia debole*. Consideriamo uno spazio normato X sul campo $\mathbb{K}$ con duale X^* e denotiamo per semplicità con il medesimo simbolo $\|\cdot\|$ le norme di X e X^*. Per ogni vettore $x \in X$, la funzione

$$p_x(x^*) = |\langle x^*, x\rangle|, \qquad x^* \in X^*,$$

è una seminorma su X^* e la famiglia di seminorme $P^* = \{p_x : x \in X\}$ è separante per X^* (Corollario 1.46).

Definizione 5.17. Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$. La topologia localmente convessa $\tau^*_{w^*}$ su X^* generata dalla famiglia separante di seminorme P^* si dice *topologia debole* di* X^*. □

Lo spazio localmente convesso $(X^*, \tau^*_{w^*})$ si denota brevemente con $X^*_{w^*}$.
Una base di intorni bilanciati e convessi dell'origine in $X^*_{w^*}$ è quindi data dagli insiemi

$$V = V(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \big\{ x^* \in X^* : |\langle x^*, x_m\rangle| < \varepsilon_m \text{ per } m = 1, \ldots, n \big\}$$

al variare di $x_1, \ldots, x_n \in X$ e di $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ $(n \geq 1)$.
Anche in questo caso utilizzeremo espressioni autoesplicative come w^*-intorno e w^*-chiusura, insieme debolmente* aperto, debolmente* chiuso o debolmente* compatto, funzione debolmente* continua e così via per distinguere proprietà topologiche di insiemi e funzioni che sono riferite alla topologia debole* dalle corrispondenti affermazioni riferite alla topologia normata originale del duale.
Anche la topologia debole* può esere identificata come la più debole topologia su X^* che rende continui i funzionali lineari su X^* definiti come valutazione nei punti di X. Denotata infatti con $J\colon X \to X^{**}$ l'immersione canonica di X nel biduale X^{**} (Sezione 1.4), si ha la seguente caratterizzazione della topologia debole* da confrontare con Teorema 5.2.

Teorema 5.18. *Siano* X *uno spazio normato sul campo* $\mathbb{K}$ *e* X^* *il suo duale e siano* τ^* *la topologia su* X^* *indotta dalla norma e* $\tau^*_{w^*}$ *la topologia debole* di* X^**. Allora,*

(a) *$\tau^*_{w^*}$ è la topologia inversa su X^* generata da $\mathbb{K}$ e dai funzionali lineari di $J(X) \subset X^{**}$;*

(b) *$\tau^*_{w^*} \subset \tau^*$ e $(X^*_{w^*})^* = \{Jx : \, x \in X\}$.*

La topologia debole* del duale X^* di X è quindi la più debole topologia di X^* che rende continui tutti i funzionali lineari di $J(X) \subset X^{**}$ ed è più debole della topologia normata di X^*. Inoltre, il duale di X_{w^*} come spazio localmente convesso coincide con $J(X)$ e in particolare risulta isomorfo a X come spazio vettoriale.

Dimostrazione. (a) Si procede come in Teorema 5.2 – (a).

(b) Per la topologia normata τ^* di X^* tutti i funzionali lineari Jx ($x \in X$) sono continui e quindi per (a) risulta $\tau^*_{w^*} \subset \tau^*$. Per lo stesso motivo risulta

$$\big\{Jx : \, x \in X\big\} \subset (X^*_{w^*})^*.$$

Viceversa, sia $L \in (X^*_{w^*})^*$. Allora, l'inseme

$$U = \big\{x^* \in X^* : \, |Lx^*| < 1\big\}$$

è un w^* – intorno di 0 in X^* cosicché risulta $V \subset U$ con

$$V = V(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

per $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ opportuni ($n \geq 1$). Procedendo come nella dimostrazione di Teorema 5.3 – (b), per ogni

$$x^* \in \ker(Jx_1) \cap \cdots \cap \ker(Jx_n)$$

si ha

$$\langle \lambda x^*, x_m \rangle = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{K},$$

per $m = 1, \ldots, n$ e quindi risulta $\lambda x^* \in V \subset U$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$. Deve essere allora $\Lambda x^* = 0$ e questo prova che risulta

$$\ker(Jx_1) \cap \cdots \cap \ker(Jx_n) \subset \ker(L).$$

Pertanto, risulta $L \in \mathrm{span}(\{Jx_1, \ldots, Jx_n\})$ (Lemma 1.49) e questo completa la dimostrazione. $\square$

Teorema 5.19. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ con $\dim X = +\infty$. Allora,*

(a) *ogni intorno U dell'origine in $X^*_{w^*}$ contiene un sottospazio di dimensione infinita;*

(b) *se X è uno spazio di Banach, $X^*_{w^*}$ non è metrizzabile.*

Dimostrazione. (a) Si ripete con ovvie modifiche la corrispondente dimostrazione di Teorema 5.3.

(b) Sia X uno spazio di Banach con $\dim X = +\infty$. Se $X^*_{w^*}$ fosse metrizzabile, ragionando come nella corrispondente dimostrazione di Teorema 5.3 si proverebbe che risulta

$$J(X) = \mathrm{span}\,(J(\Lambda))$$

per un opportuno insieme (al più) numerabile $\Lambda \subset X$ da cui seguirebbe $X = \mathrm{span}\,(\Lambda)$ poiché J è un isomorfismo di spazi vettoriali. Essendo X uno spazio di Banach, sarebbe $\dim X < +\infty$ (Esercizio 1.2) e ciò contraddice l'ipotesi. $\square$

Come abbiamo fatto per la topologia debole, esaminiamo le nozioni di limitatezza e convergenza di successioni nell'ambito della topologia debole*.

Sia X^* il duale di uno spazio normato X sul campo $\mathbb{K}$. Un insieme $B \subset X^*$ è *debolmente* limitato* se risulta

$$\sup\big\{|\langle x^*, x\rangle| : \, x^* \in B\big\} < +\infty, \qquad x \in X,$$

(Proposizione 4.40). Poiché la topologia debole di $X^*_{w^*}$ è più debole della topologia normata di X^*, ogni insieme $B \subset X^*$ limitato in norma è anche debolmente* limitato e dal principio di uniforme limitatezza si ricava l'equivalenza tra le due nozioni nel caso del duale di uno spazio di Banach.

Teorema 5.20. *Siano X^* il duale di uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e $B \subset X^*$ un insieme. Allora, le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(a) *B è limitato in norma;*

(b) *B è debolmente* limitato.*

Sia X^* il duale di uno spazio normato X sul campo $\mathbb{K}$. Una successione $\{x^*_k\}_k$ di elementi di X^* *converge debolmente* a* $x^* \in X^*$ se risulta

$$\lim_{k \to +\infty} \langle x^*_k, x \rangle = \langle x^*, x \rangle, \qquad x \in X,$$

(Proposizione 4.41) nel qual caso scriveremo $x^*_k \rightharpoonup x^*$ in $X^*_{w^*}$ per $k \to +\infty$ ovvero

$$\lim_{k \to +\infty} x^*_k = x^* \qquad \text{in } X^*_{w^*}.$$

La convergenza nella topologia debole* di una successione di funzionali lineari continui di X^* coincide dunque con la convergenza puntuale su X. Se X è uno spazio di Banach, con la stessa dimostrazione di Teorema 5.8 si prova la limitatezza in norma delle successioni debolmente* convergenti di funzionali lineari limitati.

Teorema 5.21. *Sia X^* il duale di uno spazio di Banach X sul campo $\mathbb{K}$ e siano $x^*_k \in X^*$ $(k \geq 1)$ e $x^* \in X$ funzionali lineari limitati tali che*

$$\lim_{k \to +\infty} x^*_k = x^* \qquad \textit{in } X_w.$$

Allora,

$$\sup_k \|x^*_k\|_k < +\infty \qquad e \qquad \|x^*\| \leq \liminf_{k \to +\infty} \|x^*_k\|.$$

A differenza di quanto accade per la convergenza debole, in tutti i risultati precedenti l'ipotesi che X sia uno spazio di Banach non può essere eliminata: se X è uno spazio normato non completo di dimensione infinita, $X^*_{w^*}$ può essere metrizzabile e può contenere successioni debolmente* convergenti che non sono limitate in norma (Esercizio 5.5). Inoltre, per la topologia debole* del duale di uno spazio non riflessivo non vale il teorema di Mazur (Teorema 5.10): esistono insiemi convessi di X^* che sono chiusi nella norma ma che non sono debolmente* chiusi.

Esempio 5.22. Sia X uno spazio di Banach non riflessivo o più in generale uno spazio normato non completo sul campo $\mathbb{K}$ e sia $J\colon X \to X^{**}$ immersione canonica di X nel biduale X^{**}. Per ogni $x^{**} \in X^{**} \setminus J(X)$, l'insieme convesso

$$H = \big\{x^* \in X^* : \langle x^{**}, x^* \rangle = 0\big\}$$

è chiuso ma non è debolmente* chiuso.

Infatti, se H fosse chiuso in $X^*_{w^*}$, il funzionale lineare x^{**} sarebbe continuo in $X^*_{w^*}$ (Teorema 4.25) e quindi sarebbe un elemento di $(X^*_{w^*})^*$ da cui seguirebbe $x^{**} = Jx$ per qualche $x \in X$ (Teorema 5.18 − (b)) in contraddizione con l'ipotesi. □

Spazi di Banach riflessivi e topologia debole. Esaminiamo in questa parte le relazioni che sussistono tra le topologie deboli e deboli* che possono essere definite su uno spazio di Banach e sul suo duale e biduale.

Consideriamo a tal fine uno spazio normato X sul campo $\mathbb{K}$ con duale X^* e biduale X^{**} e denotiamo per semplicità con il medesimo simbolo $\|\cdot\|$ le norme di X, X^* e X^{**}. Sia inoltre $J\colon X \to X^{**}$ l'immersione canonica di X nel biduale X^{**} cosicché gli elementi di $J(X)$ sono precisamente i funzionali lineari su X^* che sono debolmente* continui (Teorema 5.18 – (b)). Sullo spazio normato X e sul suo duale X^* e biduale X^{**}, oltre alle rispettive topologie normate che denotiamo con τ, τ^* e τ^{**} rispettivamente, possiamo definire

- su X la topologia debole τ_w;
- su X^* la topologia debole* $\tau^*_{w^*}$ e la topologia debole τ^*_w generata dal biduale X^{**};
- su X^{**} la topologia debole* $\tau^{**}_{w^*}$;

e conseguentemente denotare con X_w, $X^*_{w^*}$, X^*_w e $X^{**}_{w^*}$ gli spazi muniti delle corrispondenti topologie. Queste topologie ed i corrispondenti spazi sono illustrati nella tabella seguente:

X	X^*	X^{**}
τ	τ^*	τ^{**}
τ_w	$\tau^*_{w^*}$ e τ^*_w	$\tau^{**}_{w^*}$

Il risultato seguente illustra la relazione tra topologia debole di X e la topologia debole* indotta dal biduale X^{**} su $J(X)$.

TEOREMA 5.23. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e siano*

$$B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \qquad e \qquad B^{**} = \{x^{**} \in X^{**} : \|x^{**}\| \leq 1\}$$

le palle unitarie di X e X^{**}. Allora,

(a) *si ha $\tau^*_{w^*} \subset \tau^*_w$ e risulta $\tau^*_{w^*} = \tau^*_w$ se e solo se X è riflessivo;*
(b) *$J\colon X \to X^{**}$ è un omeomorfismo di X_w su $J(X)$ con la topologia indotta da $X^{**}_{w^*}$;*
(c) *$J(B)$ è denso in B^{**} nella topologia di $X^{**}_{w^*}$.*

In particolare, se X è uno spazio di Banach riflessivo, risulta $X^*_{w^*} = X^*_w$ e J è un omeomorfismo di X_w su $X^{**}_{w^*}$. Inoltre, l'affermazione (c) prende il nome di *teorema di Goldstine* e ricaveremo successivamente come conseguenza del teorema di Banach–Alaoglu (Teorema 5.24) che la chiusura di $J(B)$ in $X^{**}_{w^*}$ coincide proprio con la palla chiusa B^{**} (Corollario 5.25).

DIMOSTRAZIONE. (a) L'inclusione $\tau^*_{w^*} \subset \tau^*_w$ è conseguenza di $J(X) \subset X^{**}$. Se X è riflessivo, si ha $J(X) = X^{**}$ che implica $\tau^*_{w^*} = \tau^*_w$. Viceversa, se $J(X) \neq X^{**}$, l'insieme H di Esempio 5.22 è chiuso in X^*_w (Teorema 5.10) ma non è chiuso in $X^*_{w^*}$ e quindi risulta $\tau^*_{w^*} \neq \tau^*_w$.
(b) Le basi di intorni dell'origine in X_w e in $X^{**}_{w^*}$ sono formate dagli insiemi

$$V = V(x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \{x \in X : |\langle x_m^*, x\rangle| < \varepsilon_m \text{ per } m = 1, \dots, n\}$$
$$V^{**} = V^{**}(x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) =$$
$$= \{x^{**} \in X^{**} : |\langle x^{**}, x_m^*\rangle| < \varepsilon_m \text{ per } m = 1, \dots, n\}$$

al variare di $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ e di $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ $(n \geq 1)$. Si ha chiaramente

$$J(W) = V^{**} \cap J(X)$$

e dall'invarianza per traslazioni della topologia di X_w e di $X^{**}_{w^*}$ segue l'asserto.
(c) Supponiamo che X sia uno spazio di Banach complesso e sia x_0^{**} un elemento di X^{**} che non appartiene alla chiusura $\mathrm{cl}_{w^*}(J(B)$ di $J(B)$ in $X^{**}_{w^*}$. Per il teorema di Hahn–Banach (Teorema 4.54) esiste allora un funzionale lineare $L\colon X^{**}_{w^*} \to \mathbb{C}$ continuo tale che risulti

$$\mathrm{Re}(L(Jx)) \leq c_1 < c_2 \leq \mathrm{Re}(Lx_0^{**}), \qquad x \in B,$$

per $c_1 < c_2$ opportuni. Il duale $(X^{**}_{w^*})^*$ di $X^{**}_{w^*}$ si identifica come spazio vettoriale con X^* (Teorema 5.18) e dunque esiste $x^* \in X^*$ tale che risulti

$$Lx^{**} = \langle x^{**}, x^* \rangle, \qquad x^{**} \in X^{**}$$

e non è restrittivo supporre che sia $\|x^*\| = 1$. Da

$$\sup \big\{ \mathrm{Re}(\langle x^*, x\rangle) : \|x\| \le 1 \big\} = \sup \big\{ |\langle x^*, x\rangle| : \|x\| \le 1 \big\} = \|x^*\| = 1$$

(Proposizione 1.20) si conclude che deve essere

$$1 < \mathrm{Re}(\langle x^{**}_0, x^* \rangle) \le |\langle x^{**}_0, x^* \rangle|$$

che implica $\|x^{**}_0\| > 1$. Quindi, risulta $B^{**} \subset \mathrm{cl}_{w^*}(J(B)$ e questo conclude la dimostrazione nel caso complesso. La dimostrazione nel caso reale è la stessa a meno della diversa notazione. $\square$

5.2. Compattezza debole e debole*

Esaminiamo in questa sezione le proprietà di compattezza della topologia debole di uno spazio normato e della topologia debole* del duale di uno spazio normato. In tutta questa sezione denoteremo con X uno spazio normato o di Banach sul campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ con norma $\|\cdot\|$.

Compattezza debole*. La topologia debole* sul duale di uno spazio normato coincide con la topologia della convergenza puntuale sulla palla unitaria dello spazio normato e quindi, nel caso di un insieme equilimitato di funzionali lineari, gode delle buone proprietà di compattezza che derivano dal teorema di Tikhonov. È questa la più importante proprietà della topologia debole* di uno spazio normato.

TEOREMA 5.24 (S. Banach–L. Alaoglu). *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$. Allora, la palla unitaria*

$$B^* = \big\{ x^* \in X^* : \|x^*\| \le 1 \big\}$$

del duale X^* è debolmente compatta.*

DIMOSTRAZIONE. Sia P il prodotto cartesiano

$$P = \prod_{x \in X} \big\{ \lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \le \|x\| \big\}$$

munito della topologia prodotto τ_P. Lo spazio topologico (P, τ_P) è di Hausdorff e compatto per il teorema di Tikhonov (Teorema I–2.176). Gli elementi di P sono le funzioni $f \colon X \to \mathbb{K}$ (non necessariamente lineari) per le quali si ha

$$|f(x)| \le \|x\|, \qquad x \in X.$$

Si ha quindi $B^* = P \cap X^*$ e dunque B^* eredita due topologie: la topologia $\tau^*_{w^*}$ da $X^*_{w^*}$ e la topologia τ_P da P. Supponiamo di aver provato che risulti

- $B^* \cap \tau^*_{w^*} = B^* \cap \tau_P$;
- B^* chiuso in P;

ovvero che la topologie indotte su B^* da P e da $X^*_{w^*}$ coincidano e che B^* sia chiuso in P. In tal caso, per la seconda affermazione, B^* è un sottoinsieme τ_P – chiuso di P e quindi è τ_P – compatto ma, poiché per la prima affermazione la restrizione della topologia τ_P a B^* coincide con la restrizione della topologia $\tau^*_{w^*}$ a B^*, si conclude che B^* è $\tau^*_{w^*}$ – compatto.

Per concludere la dimostrazione è quindi sufficiente provare le due affermazioni precedenti. Per la prima, fissato un funzionale lineare limitato $x_0^* \in B^*$, consideriamo le collezioni di insiemi $\mathcal{V}_{x_0^*}$ e $\mathcal{W}_{x_0^*}$ formate dagli insiemi

$$\begin{aligned} V_{x_0^*} &= \{x^* \in X^* : \ |\langle x^*, x_m\rangle - \langle x_0^*, x_m\rangle| < \varepsilon_m \text{ per } m = 1, \dots, n\} \\ W_{x_0^*} &= \{f \in P : \ |f(x_m) - \langle x_0^*, x_m\rangle| < \varepsilon_m \text{ per } m = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

al variare di $x_1, \dots, x_n \in X$ e di $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ $(n \geq 1)$ le quali costituiscono basi di intorni di x_0^* per le topologie $\tau_{w^*}^*$ e τ_P rispettivamente. Da $B^* = P \cap X^*$ segue $V_{x_0^*} \cap B^* = W_{x_0^*} \cap B^*$. Risulta pertanto $\mathcal{V}_{x_0^*} \cap B^* = \mathcal{W}_{x_0^*} \cap B^*$ e questo prova la prima affermazione.
Per la seconda affermazione, consideriamo $f_0 \in P$ tale che $f_0 \in \mathrm{cl}_P(B^*)$ ove $\mathrm{cl}_P(B^*)$ denota la chiusura di B^* in P. Per ogni coppia di punti $x_i \in X$ e scalari $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $(i = 1, 2)$ e per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme

$$W_\varepsilon = \{f \in P : \ |f(y) - f_0(y)| < \varepsilon \text{ per } y \in \{x_1, x_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\}\}$$

è un τ_P-intorno di f_0. Esiste quindi $x_\varepsilon^* \in B^* \cap W_\varepsilon$ e dunque risulta

$$|\langle x_\varepsilon^*, y\rangle - f_0(y)| < \varepsilon$$

per $y = x_i$ $(i = 1, 2)$ e $y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$. Per linearità si ha

$$\begin{aligned} &f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1 f_0(x_1) - \lambda_2 f_0(x_2) = \\ &\qquad = (f_0 - x_\varepsilon^*)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1 (f_0 - x_\varepsilon^*)(x_1) - \lambda_2 (f_0 - x_\varepsilon^*)(x_2) \end{aligned}$$

e da ciò segue

$$|f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1 f_0(x_1) - \lambda_2 f_0(x_2)| \leq (1 + |\lambda_1| + |\lambda_2|)\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ la funzione $f_0 \in P$ è lineare e da $f_0 \in P$ segue

$$|f_0(x)| \leq \|x\|, \qquad x \in X.$$

Pertanto $f_0 \in B^*$ e questo completa la dimostrazione. $\square$

Corollario 5.25. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e siano*

$$B = \{x \in X : \ \|x\| \leq 1\} \qquad e \qquad B^{**} = \{x^{**} \in X^{**} : \ \|x^{**}\| \leq 1\}$$

le palle unitarie di X e X^{**} e $J\colon X \to X^{**}$ l'immersione canonica di X in X^{**}. Allora,

$$\mathrm{cl}_{w^*}(J(B) = B^{**}.$$

Dimostrazione. La palla B^{**} del biduale è compatta in $X_{w^*}^{**}$ per il teorema di Banach–Alaoglu e quindi è anche chiusa in $X_{w^*}^{**}$ e la conclusione segue dal teorema di Goldstine (Teorema 5.23 – (c)). $\square$

Quando lo spazio normato X è separabile, la topologia debole* sulla palla unitaria del duale è metrizzabile e la compattezza debole* può essere espressa in termini di successioni.

Teorema 5.26. *Sia X uno spazio normato separabile sul campo $\mathbb{K}$. Allora, la topologia debole* sulla palla unitaria*

$$B^* = \{x^* \in X^* : \ \|x^*\| \leq 1\}$$

del duale X^* è metrizzabile.

È importante sottolineare che questo teorema non afferma che la topologia debole* sia metrizzabile cosa che è falsa se lo spazio ha dimensione infinita ma solo che lo è la topologia indotta da $X_{w^*}^*$ su B^*. Ciò è conseguenza del seguente risultato di metrizzabilità.

LEMMA 5.27. *Sia X uno spazio topologico compatto e siano $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ funzioni continue che separano i punti di X. Allora, X è metrizzabile.*

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre che risulti $|f_n(x)| \leq 1$ per ogni $x \in X$ e per ogni n. Allora, la funzione

$$d(x\,,y) = \sum_n \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{2^n}, \qquad x\,,y \in X,$$

è una metrica su X che è continua nella topologia prodotto $X \times X$ poiché ogni funzione f_n è continua in X e la serie converge totalmente. Pertanto, denotato con X_d lo spazio metrico $(X\,,d)$, la funzione identità $\mathrm{id}_X\colon X \to X_d$ risulta continua. Essendo iniettiva, essa è un omeomorfismo di X in X_d e questo prova l'asserto. □

DIMOSTRAZIONE (TEOREMA 5.26). Sia $\{x_n\}_n$ un insieme numerabile e denso di punti di X. Le funzioni $f_n\colon X^* \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ definite da

$$f_n(x^*) = \langle x^*, x_n\rangle, \qquad x^* \in X^*,$$

sono debolmente* continue per definizione di topologia debole* e separano i punti di X^*. La conclusione segue quindi da Lemma 5.27. □

COROLLARIO 5.28. *Sia X uno spazio normato separabile sul campo $\mathbb{K}$. Allora, ogni successione limitata di elementi di X^* ha una sottosuccessione debolmente* convergente.*

Esplicitamente ciò significa che, se X è uno spazio normato separabile, per ogni successione $\{x_k^*\}_k$ in X^* con $\|x_k^*\| \leq M$ per ogni k esistono una sottosuccessione $\{x_{k_h}^*\}_h$ ed un elemento $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| \leq M$ tale che $x_k^* \rightharpoonup x^*$ in $X_{w^*}^*$ per $k \to +\infty$.

Compattezza debole. La topologia debole di uno spazio normato non gode in generale delle stesse buone proprietà di compattezza della topologia debole* come provano gli esempi seguenti.

ESEMPIO 5.29. Le palle unitarie

$$\text{(a)}\quad B = \big\{x \in c_0 :\ \|x\|_u \leq 1\big\}\,; \qquad\qquad \text{(b)}\quad B = \big\{x =\in \ell_1 :\ \|x\|_1 \leq 1\big\}\,;$$

di c_0 e di ℓ_1 sono insiemi debolmente chiusi e debolmente limitati che non sono debolmente compatti.

(a) La palla B è convessa, chiusa e limitata nella norma di c_0 e quindi è debolmente chiusa (Teorema 5.10) e debolmente limitata. Proviamo che B non è debolmente compatta nei due modi seguenti.

Conveniamo di denotare le successioni come funzioni scrivendo $x\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{K}$ e $x(n)$ per il valore di x in n in luogo di $x = \{x_n\}_n$ e x_n e consideriamo le successioni $e_j \in c_0$ $(j \geq 1)$ e $s_k \in c_0$ $(k \geq 1)$ definite da

$$(*) \qquad e_j(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = j \\ 0 & \text{se } n \neq j \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s_k = e_1 + \cdots + e_k$$

per ogni j e k. Chiaramente risulta $s_k \in B$ per ogni k.
Supponiamo per assurdo che la palla B sia debolmente compatta. Poiché c_0 è separabile, la topologia debole di c_0 ristretta a B sarebbe metrizzabile per il successivo Teorema 5.31 e quindi ogni successione di B avrebbe una sottosuccessione che converge debolmente ad un elemento di B: esisterebbero dunque una sottosuccessione $\{s_{k_h}\}_h$ ed un elemento $s \in B$ per i quali si avrebbe

$$\lim_{h\to+\infty} \langle y^*, s_{k_h}\rangle = \langle y^*, s\rangle, \qquad y^* \in c_0.$$

Ricordando che il duale di c_0 si identifica con ℓ_1 e che la dualità tra gli elementi x di c_0 e y^* di ℓ_1 è data da

$$\langle y^*, x\rangle = \sum_{n\geq 1} y^*(n)x(n),$$

(Esercizio 1.16 o Teorema 2.16), per ogni j fissato potremmo scegliere $y^* = e_j$ con e_j definito da $(*)$ come elemento di ℓ_1 su cui testare la convergenza debole di $\{s_{k_h}\}_h$. Si avrebbe allora

$$\lim_{h\to+\infty} \langle e_j\,, s_{k_h}\rangle = \langle e_j\,, s\rangle = s(j)$$

per ogni j e da $k_h \geq j$ per $h \geq j$ seguirebbe

$$\langle e_j\,, s_{k_h}\rangle = s_{k_h}(j) = 1, \qquad h \geq j.$$

Si avrebbe allora $s(j) = 1$ per ogni j e ciò è assurdo poiché $s \in c_0$.
Alternativamente, è possibile provare che B non può essere un insieme debolmente compatto anche senza ricorrere al successivo Teorema 5.31 utilizzando il seguente argomento.
Se la palla B di c_0 fosse debolmente compatta, la successione $\{s_k\}_k$ definita da $(*)$ avrebbe un punto limite $s \in B$: per ogni intorno debole V dell'origine e per ogni $h \geq 1$ si avrebbe $s_k \in s + V$ per $k \geq h$ opportuno. Con le notazioni di $(*)$ di Sezione 5.1, scegliendo $V = V(e_j;\varepsilon)$ con $e_j \in \ell_1 = c_0^*$ definito da $(*)$ e $\varepsilon > 0$, l'insieme

$$\big\{k :\ s_k \in s + V(e_j;\varepsilon)\big\} = \big\{k :\ |\langle e_j\,, s_k - s\rangle| < \varepsilon\big\}$$

sarebbe infinito per ogni j e $\varepsilon > 0$ e quindi per ogni j esisterebbe una sottosuccessione s_{k_h} (dipendente da j) per cui si avrebbe

$$\lim_{h\to+\infty} \langle e_j, s_{k_h}\rangle = \langle e_j\,, s\rangle.$$

Con le stesse considerazioni già svolte si avrebbe $s(j) = 1$ per ogni j che è assurdo.
(b) La palla B di ℓ_1 è debolmente chiusa e debolmente limitata per le stesse ragioni per cui lo è la palla B di c_0 e non può essere debolmente compatta per effetto dei due argomenti seguenti, a seconda che si voglia utilizzare il successivo Teorema 5.31 oppure no.
Nel primo caso, supposta la palla B debolmente compatta in ℓ_1, come in (a) la topologia debole di ℓ_1 ristretta a B sarebbe metrizzabile poiché ℓ_1 è separabile (Teorema 5.31) e quindi ogni successione di elementi di B avrebbe una sottosuccessione che converge debolmente ad un elemento di B. Con le stesse notazioni di (a), consideriamo allora la successione $\{e_k\}_k$ degli elementi di B definiti da $(*)$: esisterebbero dunque una sottosuccessione $\{e_{k_h}\}_h$ ed un elemento $e \in B$ per i quali si avrebbe

$$\lim_{h\to+\infty} \langle y\,, e_{k_h}\rangle = \langle y\,, e\rangle$$

per ogni $y \in \ell_1^*$. Poiché c_0^* e ℓ_1^* si identificano isometricamente con ℓ_1 e ℓ_∞ rispettivamente (Esercizio 1.16 o Teorema 2.16), tra gli elementi y di ℓ_∞ con cui si può testare la convergenza debole di $\{e_{k_h}\}_h$ a e vi sono le immagini degli elementi di c_0 mediante l'immersione canonica J di c_0 in ℓ_∞. Scegliendo in particolare $y = Je_k$, da $k_h > k$ per $h > k$ seguirebbe

$$\langle Je_k\,, e_{k_h}\rangle = \langle e_{k_h}\,, e_k\rangle = e_k(k_h) = 0.$$

Risulterebbe allora $\langle Je_k\,, e\rangle = \langle e, e_k\rangle = e(k) = 0$ per ogni k cioè $e = 0$. D'altra parte, in conseguenza del teorema di Mazur esisterebbe una successione $\{x_j\}_j$ di combinazioni convesse di elementi della sottosuccessione $\{e_{k_h}\}_h$ tale che

$$\lim_{j\to+\infty} \|x_j\| = 0$$

(Corollario 5.11). Ogni x_j sarebbe della forma

$$x_j = \lambda_1 e_{k_{h_1}} + \cdots \lambda_i e_{k_{h_i}}$$

per opportuni elementi $e_{kh_1}, \ldots, e_{k_{h_i}}$ della successione $\{e_{k_h}\}_h$ e per opportuni scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_i \geq 0$ tali che $\lambda_1 + \cdots + \lambda_i = 1$. Si avrebbe allora

$$\|x_j\| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_i = 1$$

per ogni j e ciò è assurdo.
Alternativamente, supponendo nuovamente che B sia debolmente compatto in ℓ_1, la successione $\{e_k\}_k$ avrebbe un punto limite $e \in B$: degli elementi di B definiti da $(*)$: esisterebbero dunque una sottosuccessione $\{e_{k_h}\}_h$ ed un elemento $e \in B$: per ogni intorno debole V dell'origine e per ogni $h \geq 1$ si avrebbe $e_k \in e + V$ per $k \geq h$ opportuno. Scegliendo con le stesse notazioni di (a) $V = V(e_j\,; \varepsilon)$ con $e_j \in \ell_\infty$ e $\varepsilon > 0$ e ragionando come in (a), si determinerebbe una sottosuccessione e_{k_h} (dipendente da j) per cui si avrebbe

$$\lim_{h \to +\infty} \langle e_j\,, e_{k_h} \rangle = \langle e_j\,, e \rangle$$

e da ciò seguirebbe $e = 0$ come prima. Scegliendo invece $V = V(s\,, \varepsilon)$ con $s \in \ell_\infty$ definita da $s(n) = 1$ per ogni n e $\varepsilon > 0$, per un'altra sottosuccessione e_{k_h} si avrebbe

$$\lim_{h \to +\infty} \langle s\,, e_{k_h} \rangle = \langle s\,, e \rangle = \sum_{n \geq 1} e(n).$$

Essendo $\langle s\,, e_{k_h} \rangle = 1$ per ogni h si avrebbe

$$\sum_{n \geq 1} e(n) = 1$$

che contraddice $e = 0$. □

Benché, come abbiamo visto, la palla unitaria di uno spazio normato non sia in genere debolmente compatta, negli spazi riflessivi la topologia debole eredita comunque le buone proprietà di compattezza della topologia debole* del biduale come prova il teorema seguente.

Teorema 5.30 (S. Kakutani). *Sia X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$. Allora, le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(a) *X è riflessivo;*
(b) *la palla unitaria*

$$B = \big\{x \in X : \|x\| \leq 1\big\}$$

di X è debolmente compatta.

Dimostrazione. (a) Per il teorema di Banach–Alaoglu, la palla unitaria del biduale

$$B^{**} = \big\{x^{**} \in X^{**} : \|x^{**}\| \leq 1\big\}$$

è compatta in $X^{**}_{w^*}$. Poiché X è riflessivo, si ha $J(B) = B^{**}$ e la conclusione segue da Teorema 5.23 − (b).
(b) L'immersione canonica $J \colon X \to X^{**}$ è un omeomorfismo di X_w su $J(X)$ con la topolgia di $X^{**}_{w^*}$ (Teorema 5.23 − (b)). Poiché la palla B è compatta in X_w, la sua immagine $J(B)$ è compatta in $X^{**}_{w^*}$ e quindi in particolare è debolmente* chiusa. Essendo $J(B)$ denso in B^{**} per la stessa topologia (Teorema 5.23 − (c)), risulta $J(B) = B^{**}$ e questo prova che X è riflessivo. □

Benché la topologia debole di uno spazio normato non sia metrizzabile se non in dimensione finita, la sua restrizione agli insiemi debolmente compatti risulta metrizzabile ed in tal caso gli insiemi debolmente compatti risultano anche sequenzialmente compatti.

TEOREMA 5.31. *Sia X uno spazio normato separabile sul campo $\mathbb{K}$ e sia $K \subset X$ un insieme debolmente compatto. Allora, la topologia debole su K è metrizzabile.*

Questo risultato va confrontato con il precedente Teorema 5.26 e per esso valgono le stesse considerazioni già svolte a riguardo del teorema citato. In particolare, questo teorema non afferma che la topologia debole sia metrizzabile cosa che è falsa se lo spazio ha dimensione infinita ma solo che lo è la topologia indotta da X_w su K.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{x_n\}_n$ un insieme denso nella sfera unitaria

$$S = \big\{x \in X : \ \|x\| = 1\big\}$$

e per ogni n sia $x_n^* \in X^*$ tale che risulti

$$\|x_n^*\| = 1 \qquad \text{e} \qquad \langle x_n^*, x_n\rangle = 1$$

per ogni n. Fissato $x \in X$ con $\|x\| = 1$, sia $\{x_{n_k}\}_k$ una successione tale che risulti $\|x_{n_k} - x\| \to 0$ per $k \to +\infty$. Si ha allora

$$|\langle x_{n_k}^*, x\rangle| \geq |\langle x_{n_k}^*, x_{n_k}\rangle| - |\langle x_{n_k}^*, x_{n_k} - x\rangle| \geq 1 - \|x_{n_k} - x\| \to 1$$

per $k + \infty$ e quindi per ogni $x \in X$ con $x \neq 0$ esiste n tale che risulti $\langle x_n^*, x\rangle \neq 0$.
Le restrizioni all'insieme debolmente compatto K dei funzionali lineari $\{x_n^*\}_n$ sono una famiglia numerabile di funzioni debolmente continue che separa i punti e quindi la topologia indotta su K è metrizzabile (Lemma 5.27). □

COROLLARIO 5.32. *Sia X uno spazio normato separabile sul campo $\mathbb{K}$ e sia $K \subset X$ un insieme debolmente compatto. Allora, ogni successione di elementi di K ha una sottosuccessione che converge debolmente ad un elemeto di K.*

Esplicitamente ciò significa che, se K è un insieme debolmente compatto di uno spazio normato separabile X, per ogni successione $\{x_k\}_k$ di elementi di K esistono una sottosuccessione $\{x_{k_h}\}_h$ ed un elemento $x \in K$ tale che $x_k \rightharpoonup x$ in X_w per $k \to +\infty$.
Sulle relazioni tra i vari tipi di compattezza nella topologia debole ritorneremo nel paragrafo successivo.
Concludiamo questa parte osservando che, come accade per gli insiemi debolmente compatti, anche gli insiemi debolmente numerabilmente compatti e debolmente sequenzialmente compatti sono limitati in norma.

PROPOSIZIONE 5.33. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e sia $K \subset X$ un insieme debolmente numerabilmente compatto. Allora, K è limitato in X.*

Lo stesso risultato vale per gli insiemi debolmente sequenzialmente compatti (Teorema I–2.178).

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $x^* \in X^*$, l'insieme $x^*(K)$ è un insieme numerabilmente compatto di $\mathbb{K}$ (Teorema I–2.184) e quindi è limitato. Come nella dimostrazione di Teorema 5.6, i funzionali lineari di $J(K)$ dove J denota come al solito l'immersione canonica di X nel suo biduale risultano puntualmente limitati su X^* e quindi per il teorema di Banach–Steinhaus (Teorema 1.50) risultano uniformemente limitati: esiste $M \geq 0$ tale che risulti

$$\|x\| = \|Jx\| \leq M, \qquad x \in K,$$

e questo prova l'asserto. □

Teorema di Eberlein–Šmulian. Il teorema di Eberlein–Šmulian che esaminiamo in questa parte recupera per la topologia debole degli spazi normati un'importante proprietà della compattezza in spazi metrici: l'equivalenza tra compattezza, compattezza per successioni e compattezza numerabile (Sezione I–2.5). Questa equivalenza non si estende alla topologia debole*.

TEOREMA 5.34 (W. F. Eberlein–V. Šmulian). *Sia X uno spazio di Banach sul campo $\mathbb{K}$ e sia $K \subset X$ un insieme. Allora le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(a) *K è debolmente compatto;*

(b) *K è debolmente sequenzialmente compatto;*

(c) *K è debolmente numerabilmente compatto.*

In particolare, ogni insieme debolmente numerabilmente o sequenzialmente compatto è debolmente chiuso e inoltre, in conseguenza del teorema di Kakutani, uno spazio di Banach risulta essere riflessivo se e solo se ogni successione limitata ha una sottosuccessione debolmente convergente.
Alla dimostrazione premettiamo il lemma seguente.

LEMMA 5.35. *Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ e sia $Y \subset X^*$ un sottospazio con $\dim Y < +\infty$. Allora, esistono $n \geq 1$ e $x_m \in X$ con $\|x_m\| = 1$ $(m = 1, \ldots, n)$ tali che risulti*

$$\frac{\|y^*\|}{2} \leq \max\left\{|\langle y^*, x_m\rangle| : \, m = 1, \ldots, n\right\}, \qquad y^* \in Y.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$S_Y = \left\{y^* \in Y : \, \|y^*\| = 1\right\}$$

la sfera unitaria di Y. Poiché Y ha dimensione finita, la sfera S_Y è un insieme compatto e quindi esistono $y_m^* \in S_Y$ $(m = 1, \ldots, n)$ con $n \geq 1$ opportuno tali che le palle di centro nei punti y_m^* e raggio $1/4$ ricoprono S_Y:

$$S_Y \subset B_{1/4}(y_1^*) \cup \cdots \cup B_{1/4}(y_n^*).$$

Per ogni m sia $x_m \in X$ tale che risulti

$$\|x_m\| = 1 \qquad \text{e} \qquad |\langle y_m^*, x_m\rangle| > 3/4.$$

Allora, per ogni $y^* \in S_Y$ e per un opportuna scelta dell'indice m si ha

$$|\langle y^*, x_m\rangle| \geq |\langle y_m^*, x_m\rangle| - |\langle y^* - y_m^*, x_m\rangle| > 3/4 - \|y^* - y_m^*\| \geq 3/4 - 1/4 = 1/2$$

e la formula con $y^* \in Y$ segue per linearità. □

DIMOSTRAZIONE (TEOREMA 5.34). È sufficiente provare che (a) implica (b) e che (c) implica (a) poiché la restante implicazione vale per qulunque spazio topologico (Teorema I–2.178).

(a) Sia $\{x_n\}_n$ una successione di elementi di K e sia X' lo spazio di Banach separabile definito da

$$X' = \mathrm{cl}_w\big(\mathrm{span}(\{x_n\}_n)\big) = \mathrm{cl}\big(\mathrm{span}(\{x_n\}_n)\big)$$

(Teorema 5.10). L'insieme $K \cap X'$ è debolmente chiuso e quindi è debolmente compatto oltre che contenuto in X'. Poiché la topologia debole di X ristretta a X' coincide con la topologia debole di X' (Proposizione 5.13), $K \cap X'$ è debolmente compatto anche in X' con X' spazio di Banach separabile. Esistono allora una sottosuccessione x_{n_k} $(k \geq 1)$ di $\{x_n\}_n$ e un punto $x \in K \cap X'$ tali che

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \qquad \text{debolmente in } X' \text{ per } k \to +\infty$$

ovvero debolmente in X (Proposizione 5.13).
Abbiamo così provato che K è debolmente sequenzialmente compatto e questo prova (b).

(c) Sia K un insieme debolmente numerabilmente compatto di X_w. Allora, K è limitato in X (Proposizione 5.33) e conseguentemente anche la sua immagine $J(K)$ mediante l'immersione canonica di X in X^{**} è limitata in X^{**}. Supponiamo ora di aver provato che $J(K)$ sia debolmente* chiuso. Allora, $J(K)$ è debolmente* compatto per il teorema di Banach–Alaoglu cosicché, essendo J un omeomorfismo

da X_w su $J(X)$ con la topologia indotta da $X^{**}_{w^*}$ ed essendo $J(K))$ compatto in $X^{**}_{w^*}$, l'insieme K risulta compatto in X_w e questo prova la tesi.
Resta dunque da provare soltanto che $J(K)$ è debolmente* chiuso. A tal fine, denotiamo con

$$S_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| = 1\}$$

la sfera unitaria del duale X^* e consideriamo un punto $x^{**} \in \mathrm{cl}_{w^*}(J(K))$ fissato. Poniamo

$$Y_1 = \mathrm{span}(x^{**})$$

e fissiamo $n_1 = 1$ e $x^*_1 \in S_{X^*}$. Essendo x^{**} aderente a $J(K)$ in $X^{**}_{w^*}$, ogni intorno di x^{**} in $X^{**}_{w^*}$ contiene Jx per qualche $x \in K$ e quindi in particolare esiste $x_1 \in K$ tale che

$$|\langle Jx_1 - x^{**}, x^*_1\rangle| < 1.$$

Consideriamo ora il sottospazio di X^{**} definito da

$$Y_2 = \mathrm{span}\big(\{x^{**}, x^{**} - Jx_1\}\big)\,.$$

Per il lemma precedente applicato a X^* e al sottospazio Y_2 di X^{**} esistono allora dei funzionali lineari $x^*_2, \dots, x^*_{n_2} \in S_{X^*}$ tali che risulti

$$\frac{\|y^{**}\|}{2} \le \max\big\{|\langle y^{**}, x^*_m\rangle| : \ m = 1, \dots, n_2\big\}\,, \qquad y^{**} \in Y_2,$$

e nuovamente, essendo x^{**} aderente a $J(K)$ in $X^{**}_{w^*}$, l'intorno debole* di x^{**} determinato da x^*_m per $m = 1, \dots, n_2$ e da $\varepsilon = 1/2$ contiene un elemento di $J(K)$ ovvero risulta

$$|\langle Jx_2 - x^{**}, x^*_m\rangle| < 1/2, \qquad m = 1, \dots, n_2,$$

per qualche $x_2 \in K$. Posto

$$Y_3 = \mathrm{span}\big(\{x^{**}, x^{**} - Jx_1, x^{**} - Jx_2\}\big)\,,$$

per il lemma precedente esistono $x^*_{n_2+1}, \dots, x^*_{n_3} \in S_{X^*}$ tali che risulti

$$\frac{\|y^{**}\|}{2} \le \max\big\{|\langle y^{**}, x^*_m\rangle| : \ m = 1, \dots, n_3\big\}\,, \qquad y^{**} \in Y_3.$$

Iterando questo argomento, si determinano una successione di elementi $x_k \in K$ $(k \ge 1)$, una successione strettamente crescente di interi n_k $(k \ge 1)$ e una successione di elementi $x^*_h \in S_{X^*}$ $(h \ge 1)$ della sfera unitaria del duale tali che

$$|\langle Jx_k - x^{**}, x^*_h\rangle| < 1/k, \qquad h = 1, \dots, n_k;$$
$$\frac{\|y^{**}\|}{2} \le \max\big\{|\langle y^{**}, x^*_h\rangle| : \ h = 1, \dots, n_k\big\}\,, \qquad y^{**} \in Y_k;$$

ove $Y_1 = \mathrm{span}(x^{**})$ e

$$Y_k = \mathrm{span}\big(\{x^{**}, x^{**} - Jx_1, x^{**} - Jx_2, \dots, x^{**} - Jx_{k-1}\}\big)\,, \qquad k \ge 2.$$

Posto

$$Y = \mathrm{span}\big(\{x^{**}, x^{**} - Jx_1, x^{**} - Jx_2, \dots\}\big)\,,$$

la costruzione dei funzionali $x^*_h \in S_{X^*}$ e dei vettori $x_k \in K$ assicura che si abbia

$$(****) \qquad \frac{\|y^{**}\|}{2} \le \sup_{h \ge 1} |\langle y^{**}, x^*_h\rangle|, \qquad y^{**} \in Y.$$

Poiché ciascuna funzione $\varphi_h\colon X^{**} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi_h(x^{**}) = |\langle x^{**}, x^*_h\rangle| - \frac{\|x^{**}\|}{2}, \qquad x^{**} \in X^{**},$$

è $1-$lipschitziana e la successione di funzioni φ_h è puntualmente limitata su X^{**}, la funzione $\varphi\colon X^{**} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(x^{**}) = \sup_{h\geq 1} |\langle x^{**}, x_h^*\rangle| - \frac{\|x^{**}\|}{2}, \qquad x^{**} \in X^{**},$$

è anch'essa 1 - lipschitziana su X^{**} (Esercizio I–3.18) cosicché, essendo non negativa su Y, deve essere tale anche sulla chiusura $\mathrm{cl}(Y)$ di Y in X^{**}.
Poiché K è debolmente numerabilmente compatto, la successione $\{x_k\}_k$ ha un punto limite $x \in K$ nella topologia debole di X (Teorema I–2.178). Proviamo che risulta

$$x^{**} - Jx \in \mathrm{cl}(Y).$$

Infatti, essendo x un punto limite della successione $\{x_k\}_k$ in X_w, risulta

$$x \in \mathrm{cl}_w\big(\mathrm{span}(\{x_k :\ k \geq 1\})\big)$$

e quindi, per il teorema di Mazur (Teorema 5.10), esiste una successione di elementi $\overline{x}_j$ $(j \geq 1)$ tali che

- $\overline{x}_j \in \mathrm{span}(\{x_k :\ k \geq 1\}$ per ogni j;
- $\overline{x}_j \to x$ in X per $j \to +\infty$.

Ogni elemento $\overline{x}_j$ è della forma

$$\overline{x}_j = \sum_{k\in F_j} \lambda_{j,k} x_k$$

per un opportuno insieme finito $F_j \subset \mathbb{N}_+$ e per opportuni coefficienti $\lambda_{j,k} \in \mathbb{K}$ per ogni $k \in F_j$ cosicché risulta

$$x^{**} - J\overline{x}_j = x^{**} - \sum_{k\in F_j} \lambda_{j,k} Jx_k = \left(1 - \sum_{k\in F_j} \lambda_{j,k}\right) x^{**} + \sum_{k\in F_j} \lambda_{j,k}\,(x^{**} - Jx_k) \in Y$$

per ogni j e da $x^{**} - J\overline{x}_j \to x^{**} - Jx$ in X^{**} per $j \to +\infty$ segue $x^{**} - Jx \in \mathrm{cl}(Y)$.
Poiché $({*}{*}{*}{*})$ vale per gli elementi di $\mathrm{cl}(Y)$ si ha

$$\frac{\|x^{**} - Jx\|}{2} \leq \sup_{h\geq 1} |\langle x^{**} - Jx\,, x_h^*\rangle|$$

e per ogni h fissato risulta

$$|\langle x^{**} - Jx\,, x_h^*\rangle| \leq |\langle x^{**} - Jx_{k_j}\,, x_h^*\rangle| + |\langle Jx_{k_j} - Jx\,, x_h^*\rangle| \leq 1/k_j + |\langle x_h^*, x_{k_j} - x\rangle|$$

per ogni j tale che $n_{k_j} \geq h$. Da $x_{k_j} \rightharpoonup x$ in X_w per $j \to +\infty$ si conclude che risulta

$$\langle x^{**} - Jx\,, x_h^*\rangle = 0$$

per ogni h cosicché deve essere $x^{**} = Jx$. Abbiamo così provato che risulta

$$\mathrm{cl}_{w^*}(J(K)) = J(K)$$

ovvero che $J(K)$ è debolmente* chiuso e questo completa la dimostrazione. □

Con una dimostrazione analoga si prova che un insieme A di X è relativamente debolmente compatto se e solo se ogni successione di elementi di A ha una sottosuccessione che converge ad un elemento della chiusura debole di A.
L'equivalenza tra le nozioni di compattezza nella topologia debole degli spazi normati non si estende alla topologia debole* come prova l'esempio seguente che non è altro che un riadattamento di Esempio 2.182 al contesto della topologia debole* degli spazi di Banach.

ESEMPIO 5.36. Sia $I = [0,1]$ e siano $\ell_1(I)$ e $\ell_\infty(I)$ gli spazi di Banach di funzioni sommabili ovvero limitate sull'intervallo I (Esempio 2.19). Il duale di $\ell_1(I)$ è isometricamente isomorfo a $\ell_\infty(I)$ anche se la misura del conteggio su I non è $\sigma-$finita (Esercizio 2.21). Allora,

(a) la palla chiusa

$$B^* = \big\{x^* \in \ell_\infty(I) : \ \|x^*\|_\infty \le 1\big\}$$

di $\ell_\infty(I)$ è debolmente* compatta ma non è debolmente* sequenzialmente compatta;

(b) l'insieme

$$B^*_{\text{cnt}} = B^* \cap \big\{x^* \in \ell_\infty(I) : \ \{t \in I : \ x^*(t) \ne 0\} \text{ (al più) numerabile}\big\}$$

dato dall'intersezione di B^* con il sottospazio di $\ell_\infty(I)$ formato dalle funzioni nulle al di fuori di un insieme al più numerabile è debolmente* sequenzialmente compatto in $\ell_\infty(I)$ ma non è debolmente* compatto.

(a) La palla unitaria B^* di $\ell_\infty(I)$ è un insieme debolmente* compatto per il teorema di Banach–Alouglu (Teorema 5.24). Per provare che B^* non è debolmente* sequenzialmente compatto, consideriamo la rappresentazione binaria

$$t = 0.t_1t_2t_3\ldots = \sum_{n\ge 1} \frac{t_n}{2^n}, \qquad t \in I,$$

dei numeri $t \in I$ in cui la successione di cifre binarie $t_n \in \{0,1\}$ $(n \ge 1)$ non è definitivamente uguale a 1 se non nel caso della rappresentazione di $t = 1$ e consideriamo la successione di funzioni $x_n^* \in \ell_\infty(I)$ $(n \ge 1)$ definita da

$$x_n^*(t) = (-1)^{t_n}, \qquad t = 0.t_1t_2t_3\ldots \in I \quad (n \ge 1),$$

ove t_n è l'$n-$esima cifra binaria di $t = 0.t_1t_2t_3\ldots$.
Chiaramente risulta $\|x_n^*\|_\infty = 1$ per ogni n e tuttavia la successione $\{x_n^*\}_n$ non ha alcuna sottosuccessione che converge nella topologia debole*.
Se una qualche sottosuccessione $\{x_{n_k}^*\}_k$ di $\{x_n^*\}_n$ convergesse nella topologia debole*, la successione $\{x_{n_k}(t)\}_k$ convergerebbe per ogni $t \in I$ (Esercizio 5.9) ma, scegliendo come $t \in I$ uno dei numeri le cui cifre binarie t_n $(n \ge 1)$ verificano

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = n_k \text{ e } k \text{ pari} \\ 1 & \text{se } n = n_k \text{ e } k \text{ dispari,} \end{cases}$$

risulterebbe

$$x_{n_k}^*(t) = (-1)^k, \qquad k \ge 1,$$

e ciò è assurdo.

(b) Sia $\{x_n^*\}_n$ una successione di B^*_{cnt} e sia I_0 un insieme (al più) numerabile di numeri $t \in I$ tali che $x_n^*(t) = 0$ per ogni n e per ogni $t \in I \setminus I_0$. Con metodo diagonale (Lemma I–2.181) si determina una sottosuccessione $\{x_{n_k}^*\}_k$ che converge puntualmente su I_0. Posto

$$x^*(t) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}^*(t) & \text{se } t \in I_0 \\ 0 & \text{se } t \in I \setminus I_0, \end{cases}$$

risulta $x^* \in B^*_{\text{cnt}}$ e $x_{n_k}^* \rightharpoonup x^*$ in $w^*-\ell_\infty(I)$ per $k \to +\infty$ (Esercizio 5.9). Pertanto, B^*_{cnt} è debolmente* sequenzialmente compatto.

Proviamo che B^*_{cnt} non è debolmente* chiuso e quindi neppure debolmente* compatto provando che la palla B^* è la chiusura debole* di B^*_{cnt}. Consideriamo a tal fine una funzione $x^*_0 \in B^*_{\text{cnt}}$ fissata e proviamo che, per il generico elemento

$$V = \left\{ x^* \in \ell_\infty(I) : \left| \sum_i x^*(i) x_m(i) \right| < \varepsilon_m \text{ per } m = 1, \dots, n \right\}$$

($x_m \in \ell_1(I)$ e $\varepsilon_m > 0$ per $m = 1, \dots, n$) della base d'intorni dell'origine nella topologia debole* di $\ell_\infty(I)$ risulta

$$(x^*_0 + V) \cap B^*_{\text{cnt}} \neq \varnothing.$$

Sia infatti I_0 un insieme (al più) numerabile di numeri $t \in I$ tali che $x_m(t) = 0$ per ogni $t \in I \setminus I_0$ e per ogni $m = 1, \dots, n$ (Teorema I–2.127) e sia $x^* \in B^*_{\text{cnt}}$ la funzione definita da

$$x^*(t) = \begin{cases} x^*_0(t) & \text{se } t \in I_0 \\ 0 & \text{se } t \in I \setminus I_0. \end{cases}$$

Si ha allora

$$\sum_t \left[x^*(t) - x^*_0(t) \right] x_m(t) = 0$$

per ogni m da cui segue $x^* \in (x^*_0 + V) \cap B^*_{\text{cnt}}$.
Abbiamo così provato che risulta $B^* \subset \mathrm{cl}_{w^*}(B^*_{\text{cnt}})$ e questo prova l'asserto poiché l'inclusione opposta ovvia. □

e sia

5.3. Convergenza e compattezza debole in L_p e $C(K)$

Bla, bla, bla ...

Convergenza debole in $C(K)$. Bla, bla, bla ...

TEOREMA 5.37. *Siano X uno spazio di Hausdorff compatto e $f_n \in C(K)$ $(n \geq 1)$ e $f \in C(K)$ funzioni continue. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *$f_n \rightharpoonup f$ debolmente in $C(K)$ per $n \to +\infty$;*

(b) $\begin{cases} \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_u < +\infty; \\ f_n \to f \text{ puntualmente in } K \text{ per } n \to +\infty. \end{cases}$

Lo stesso risultato vale per $C_0(X)$ con X spazio di Hausdorff localmente compatto.

Convergenza debole in L_p. Sia $\lambda \colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva su una σ – algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di un insieme (non vuoto) X che supporremo fissata in tutta questa sezione e le cui eventuali ulteriori proprietà verranno specificate di volta in volta. Bla, bla, bla ...

TEOREMA 5.38. *Sia $1 < p < +\infty$ e siano $f_n \in L_p(\lambda)$ $(n \geq 1)$ una successione di funzioni e $f \in L(\lambda)$ una funzione misurabile tali che*

- $\sup_{n \geq 1} \|f_n\|_p < +\infty$;
- *$f_n \to f$ λ – quasi ovunque in X per $n \to +\infty$.*

Allora, $f \in L_p(\lambda)$ e $f_n \rightharpoonup f$ in $L_p(\lambda)$ per $n \to +\infty$.

Nel caso della misura del conteggio l'implicazione precedente può essere invertita (Esercizio 5.9).

DIMOSTRAZIONE. Bla, bla, bla ... □

Lo stesso risultato vale per $p = +\infty$ con la topologia debole* di $L_\infty(\lambda)$ al posto della topolgia debole ed è falso per $p = 1$ come si vede considerando la successione di funzioni di $L_1([0,1])$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } 0 \le x < 1/n \\ 0 & \text{se } 1/n \le x \le 1 \end{cases} \qquad n \ge 1,$$

che è limitata in $L_1([0,1])$ e converge a zero quasi ovunque in $[0,1]$ ma per cui risulta

$$\int_0^1 f_n = 1$$

per ogni n. Si noti che per ogni $1 < p < +\infty$ risulta $f_n \in L_p([0,1])$ per ogni n ma $\|f_n\|_p \to +\infty$ per $n \to +\infty$.

Compattezza debole in L_1. Bla, bla, bla ...
Denotiamo a tal fine con $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di un insieme (non vuoto) X che supporremo fissata in tutta questa sezione e le cui eventuali ulteriori proprietà verranno specificate di volta in volta.

Definizione 5.39. Un insieme $K \subset L_1(\lambda)$ si dice

- λ – *equintegrabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che
$$E \in \mathcal{S} \text{ e } \lambda(E) \le \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{f\in K} \int_E |f|\, d\lambda \le \varepsilon;$$
- *uniformemente* λ – *integrabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $c = c(\varepsilon) > 0$ tale che
$$\sup_{f\in K} \int_{\{|f|>c\}} |f|\, d\lambda \le \varepsilon. \qquad \square$$

Nel seguito parleremo brevemente di insiemi equintagrabili e uniformemente integrabili senza riferimento alla misura λ in tutti i casi in cui tale riferimento sia evidente dal contesto e in particolare nel caso della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$.
La nozione di equintegrabilità esclude la possibilità che le funzioni di K diano luogo a fenomeni di concentrazione e la condizione di uniforme integrabilità si esprime in maniera equivalente nella forma seguente

$$\lim_{c\to+\infty} \left(\sup_{f\in K} \int_{\{|f|>c\}} |f|\, d\lambda \right) = 0.$$

Le relazioni tra equintegrabilità e uniforme integrabilità sono illustrate nel risultato seguente.

Teorema 5.40. *Sia $K \subset L_1(\lambda)$ un insieme di funzioni λ – integrabili in X. Allora,*

(a) *K uniformemente integrabile $\Longrightarrow$ K equintegrabile;*
(b) *K equintegrabile e limitato $\Longrightarrow$ K uniformemente integrabile.*

Inoltre, se risulta $\lambda(X) < +\infty$, si ha

(c) *K uniformemente integrabile $\Longleftrightarrow$ K equintegrabile e limitato.*

Dimostrazione. (a) Per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ con $\lambda(E) < +\infty$ e per ogni $c > 0$ si ha

$$\int_E |f|\, d\lambda = \int_{E\cap\{|f|\le c\}} |f|\, d\lambda + \int_{E\cap\{|f|>c\}} |f|\, d\lambda \le c\lambda(E) + \int_{\{|f|>c\}} |f|\, d\lambda$$

per ogni funzione $f \in K$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $c = c(\varepsilon) > 0$ tale che risulti

$$\int_{\{|f|>c\}} |f|\, d\lambda \le \varepsilon/2, \qquad f \in K,$$

cosicché per $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $0 < \delta \leq \varepsilon/2c$ e per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ con $\lambda(E) \leq \delta$ risulta

$$\int_E |f|\, d\lambda \leq c\lambda(E) + \int_{\{|f|>c\}} |f|\, d\lambda \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

per ogni funzione $f \in K$ e questo prova che l'insieme K è equintegrabile.

(b) Sia $M \geq 0$ tale che risulti $\|f\|_1 \leq M$ per ogni $f \in K$. Si ha allora

$$\lambda(\{|f| > c\}) \leq \frac{1}{c} \int_X |f|\, d\lambda \leq M/c, \qquad c > 0,$$

per ogni funzione $f \in K$ (Teorema II–2.25) cosicché, fissato $\varepsilon > 0$ e scelto $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che risulti

$$E \in \mathcal{S} \text{ e } \lambda(E) \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \int_E |f|\, d\lambda \leq \varepsilon, \qquad f \in K,$$

per $c = c(\varepsilon) > 0$ tale che $M/c \leq \delta$ risulta infine

$$\int_{\{|f|>c\}} |f|\, d\lambda \leq \varepsilon, \qquad f \in K,$$

e questo prova (a).

(c) Occorre provare soltanto che, quando $\lambda(X) < +\infty$, ogni insieme di funzioni $K \subset L_1(\lambda)$ uniformemente integrabile è limitato in $L_1(\lambda)$. Per K siffatto, sia $c > 0$ tale che

$$\int_{\{|f|>c\}} |f|\, d\lambda \leq 1, \qquad f \in K,$$

cosicché, procedendo come in (a), risulta

$$\int_X |f|\, d\lambda \leq c\lambda(X) + \int_{\{|f|>c\}} |f|\, d\lambda \leq c\lambda(X) + 1$$

per ogni funzione $f \in K$ e dunque K è limitato. □

È facile verificare che, se λ è una misura positiva e priva di atomi, ogni insieme equintegrabile di $L_1(\lambda)$ risulta limitato in $L_1(\lambda)$ nel qual caso le nozione di equintegrabilità e di uniforme integrabilità coincidono. L'esempio seguente mostra che tra le proprietà di equintegrabilità, uniforme integrabilità e limitatezza di un insieme di funzioni di $L_1(\lambda)$ non sussistono in genere altre relazioni oltre a quelle elencate nel teorema precedente.

Esempio 5.41. (a) Ogni insieme di $\ell_1(X)$ è equintegrabile incluso quando X è un insieme finito. Vi sono quindi insiemi equintegrabili che non sono né limitati né uniformemente integrabili indipendentemente dal fatto che λ sia finita o infinita.

(b) In $L_1(\mathbb{R})$ con la misura di Lebesgue gli insiemi formati dalle successioni di funzioni $\{u_n\}_n$ e $\{v_n\}_n$ definite da

$$u_n(t) = 1_{[0,n]}(t) \qquad \text{e} \qquad v_n(t) = n1_{[0,1/n]}(t)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $n \geq 1$ sono rispettivamente un insieme uniformemente integrabile che non è limitato e un insieme limitato che non è equintegrabile. □

Possiamo ora caratterizzare gli insiemi debolmente compatti di L_1.

Teorema 5.42 (N. Dunford–B. J. Pettis). *Sia $\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva e sia $K \subset L_1(\lambda)$ un insieme. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *K è relativamente debolmente compatto in $L_1(\lambda)$;*

(b) *K ha le seguenti proprietà:*
  - *K è limitato ed equintegrabile;*

- *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $E_\varepsilon \in \mathcal{S}$ con $\lambda(E_\varepsilon) < +\infty$ tale che*

$$(*) \qquad \sup_{f \in K} \int_{X \setminus E_\varepsilon} |f| \, d\lambda \le \varepsilon.$$

Come osservato in precedenza, le ipotesi di equintegrabilità e di limitatezza di K escludono la possibilità di fenomeni di concentrazione mentre $(*)$ esclude la possibilità di perdita di massa all'infinito.

Dimostrazione. (a) Sia $K \subset L_1(\lambda)$ un insieme relativamente debolmente compatto in $L_1(\lambda)$. Allora K è limitato in $L_1(\lambda)$ (Teorema 5.6) e proviamo ragionando per assurdo che K è equintegrabile e che gli integrali delle funzioni di K sono uniformemente piccoli sul complementare di insiemi di misura finita.
Supponiamo dapprima che esista $\varepsilon_0 > 0$ con la seguente proprietà: per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ con $\lambda(E) < +\infty$ risulta

$$\sup_{f \in K} \int_{X \setminus E} |f| \, d\lambda > 2\sqrt{2}\varepsilon_0.$$

In particolare, per $E = \varnothing$, risulta

$$\sup_{f \in K} \int_{X} |f| \, d\lambda > 2\sqrt{2}\varepsilon_0$$

e quindi esistono una funzione $f_1 \in K$ e un insieme $E_1' \in \mathcal{S}$ per i quali risulta

$$\left| \int_{E_1'} f_1 \, d\lambda \right| > \varepsilon_0.$$

Non è restrittivo supporre che sia $E_1' \subset \{|f_1| > 0\}$ e quindi, essendo l'insieme $\{|f_1| > 0\}$ $\sigma-$finito per la misura λ (Teorema II–2.27), esiste un insieme $E_1 \in \mathcal{S}$ con $E_1 \subset E_1'$ e $\lambda(E_1) < +\infty$ tale che

$$\left| \int_{E_1} f_1 \, d\lambda \right| > \varepsilon_0.$$

Inoltre, per l'ipotesi iniziale, deve necessariamente essere

$$\sup_{f \in K} \int_{X \setminus E_1} |f| \, d\lambda > 2\sqrt{2}\varepsilon_0$$

e quindi, ripetendo lo stesso argomento, si determinano una funzione $f_2 \in K$ ed un insieme $E_2 \in \mathcal{S}$ con $E_2 \subset X \setminus E_1$ e $\lambda(E_2) < +\infty$ tali che

$$\left| \int_{E_2} f_2 \, d\lambda \right| > \varepsilon_0 \qquad \text{e} \qquad \sup_{f \in K} \int_{X \setminus (E_1 \cup E_2)} |f| \, d\lambda > 2\sqrt{2}\varepsilon_0.$$

Iterando questo argomento si determinano quindi una successione di funzioni $f_n \in K$ $(n \ge 1)$ e di insiemi $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \ge 1)$ disgiunti tali che

$$\left| \int_{E_n} f_n \, d\lambda \right| > \varepsilon_0, \qquad n \ge 1.$$

Poiché K è debolmente relativamente compatto, per il teorema di Eberlein–Šmulian (Teorema 5.34) esistono una sottosuccessione di $\{f_n\}_n$ che continuiamo a denotare con $\{f_n\}_n$ e una funzione $f \in L_1(\lambda)$ tali che risulti $f_n \rightharpoonup f$ debolmente in $L_1(\lambda)$ per $n \to +\infty$ da cui segue in particolare

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E f_n \, d\lambda = \int_E f \, d\lambda$$

per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$. Pertanto, le misure complesse $\mu_n \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ definite per ogni n da

$$\mu_n(E) = \int_E f_n \, d\lambda, \qquad E \in \mathcal{S},$$

convergono puntualmente su $\mathcal{S}$ e al contempo sono tali che risulti $|\mu_n(E_n)| > \varepsilon_0$ per ogni n con $\{E_n\}_n$ insiemi disgiunti e ciò è assurdo (Corollario II–4.37).
Abbiamo così provato che K è limitato e che per ogni $\varepsilon > 0$ vale $(*)$ sul complementare di qualche insieme di misura λ finita e resta solo da provare che K è equintegrabile. Ragionaimo nuovamente per assurdo supponendo che K non sia equintegrabile. Esiste allora $\varepsilon_0 > 0$ con la seguente proprietà: per ogni $n \geq 1$ esistono un insieme $E'_n \in \mathcal{S}$ ed una funzione $f_n \in K$ tali che risulti

$$\lambda(E'_n) \leq 1/n \qquad \text{e} \qquad \int_{E'_n} |f_n| \, d\lambda > 2\sqrt{2}\varepsilon_0$$

e da ciò segue l'esistenza di un insieme $E_n \in \mathcal{S}$ con $E_n \subset E'_n$ tale che

$$\lambda(E_n) \leq 1/n \qquad \text{e} \qquad \left| \int_{E_n} f_n \, d\lambda \right| > \varepsilon_0.$$

Ragioniamo ora come nella parte precedente: passando ad una opportuna sottosuccessione che denotiamo ancora con $\{f_n\}_n$, si ha $f_n \rightharpoonup f$ debolmente in $L_1(\lambda)$ per $n \to +\infty$ per qualche $f \in L_1(\lambda)$ e le corrispondenti misure complesse μ_n definite sopra convergono puntualmente su $\mathcal{S}$ cosicché devono essere assolutamente $\lambda-$continue per il teorema di Vitali–Hahn–Saks (Teorema II–4.34) ma ciò non può essere poiché risulta $|\mu_n(E_n)| > \varepsilon_0$ per ogni n con $\lambda(E_n) \leq 1/n$ per ogni n.
(b) Per ogni $n \geq 1$ sia $X_n \in \mathcal{S}$ un insieme con $\lambda(X_n) < +\infty$ tale che risulti

$$\sup_{f \in K} \int_{X \setminus X_n} |f| \, d\lambda \leq 1/n.$$

Non è restrittivo supporre che sia $X_{n+1} \subset X_n$ per ogni n cosicché, posto $X_\infty = \bigcup_n E_n$, risulta $f = 0$ $\lambda-$quasi ovunque in $X \setminus X_\infty$ per ciascuna funzione $f \in K$. La restrizione λ_∞ della misura λ alla $\sigma-$algebra $\mathcal{S}(X_\infty) = \{E \in \mathcal{S} : \, E \subset X_\infty\}$ è una misura $\sigma-$finita e chiaramente l'insieme K è relativamente debolmente compatto in $L_1(\lambda)$ se e solo se l'insieme delle restrizioni a X_∞ delle funzioni di K è relativamente debolmente compatto in $L_1(\lambda_\infty)$. Conseguentemente, non è restrittivo supporre che λ stessa sia una misura positiva $\sigma-$finita su $\mathcal{S}$.
Sia quindi Φ l'isomorfismo canonico di $L_1(\lambda)$ in $[L_1(\lambda)]^{**}$ che possiamo identificare con $[L_\infty(\lambda)]^*$ poiché la misura λ è $\sigma-$finita per quanto osservato sopra e sia

$$L \in \mathrm{cl}_{w^*}(\Phi(K)).$$

Come nella dimostrazione del teorema di Riesz (Teorema 2.39), consideriamo la misura complessa finitamente additiva e limitata $\mu \colon \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ definita su $\mathcal{S}$ da

$$\mu(E) = \langle L, 1_E \rangle, \qquad E \in \mathcal{S},$$

e proviamo che risulta

$$(**) \qquad |\mu(E)| \leq \sup_{f \in K} \int_E |f| \, d\lambda, \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Sia $E \in \mathcal{S}$ fissato. Poiché L appartiene alla chiusra in $w^*-[L_\infty(\lambda)]^*$ di $\Phi(K)$, con le notazioni di Sezione 5.1, risulta

$$\Phi(K) \cap \big(L + V(1_E, \varepsilon)\big) \neq \varnothing$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $f_\varepsilon \in K$ tale che

$$|\langle \Phi(f_\varepsilon) - L, 1_E \rangle| < \varepsilon.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}|\mu(E)| = |\langle L, 1_E\rangle| &\leq |\langle \Phi(f_\varepsilon), 1_E\rangle| + |\langle \Phi(f_\varepsilon) - L, 1_E\rangle| \leq \\ &\leq |\langle 1_E, f_\varepsilon\rangle| + \varepsilon = \\ &= \left|\int_E f_\varepsilon \, d\lambda\right| + \varepsilon \leq \sup_{f\in K} \int_E |f| \, d\lambda + \varepsilon\end{aligned}$$

e dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue l'asserto.
Proviamo ora che μ è numerabilmente additiva su $\mathcal{S}$ e quindi risulta $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$. Consideriamo a tal fine insiemi $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ disgiunti e proviamo che, posto $E = \bigcup_n E_n$, risulta

$$\mu(E) = \sum_n \mu(E_n).$$

Fissato $\varepsilon > 0$, sia $E_\varepsilon \in \mathcal{S}$ un insieme tale che risulti

$$\lambda(E_\varepsilon) < +\infty \qquad \text{e} \qquad \sup_{f\in K} \int_{X\setminus E_\varepsilon} |f| \, d\lambda \leq \varepsilon/2$$

e $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che risulti

$$E \in \mathcal{S} \text{ e } \lambda(E) \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{f\in K} \int_E |f| \, d\lambda \leq \varepsilon/2.$$

Sia ha

$$\lambda(E \cap E_\varepsilon) = \sum_n \lambda(E_n \cap E_\varepsilon) < +\infty$$

e quindi esiste $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1$ tale che risulti

$$n \geq n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda\big((E \setminus (E_1 \cup \cdots E_n)) \cap E_\varepsilon\big) \leq \delta$$

cosicché per $n \geq n_0$ risulta

$$\begin{aligned}\left|\mu(E) - \sum_{1\leq m\leq n} \mu(E_m)\right| &= \left|\mu\big(E \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_n)\big)\right| \leq \\ &\leq \left|\mu\big((E \setminus (E_1 \cup \cdots E_n)) \cap E_\varepsilon\big)\right| + \left|\mu\big((E \setminus (E_1 \cup \cdots E_n)) \setminus E_\varepsilon\big)\right| \leq \\ &\leq \sup_{f\in K} \int_{X\setminus(E\setminus(E_1\cup\cdots E_n))\cap E_\varepsilon} |f| \, d\lambda + \varepsilon/2 \leq \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Abbiamo così provato che $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ e da ciò segue $L = \Phi(f)$ per qualche $f \in L_1(\lambda)$ (Teorema 2.44). Pertanto, essendo $\Phi(K)$ limitato in norma, anche $\mathrm{cl}_{w^*}(\Phi(K))$ risulta tale in $[L_\infty(\lambda)]^*$ e quindi risulta anche debolmente* compatto in $[L_\infty(\lambda)]^*$ per il teorema di Banach–Alaoglu (Teorema 5.24). Conseguentemente K è relativamente debolmente compatto in $L_1(\lambda)$ (Teorema 5.23 – (b)). □

Concludiamo questa parte con la classica caratterizzazione degli insiemi uniformemente integrabili di L_1 di *de la Vallée Poussin.*

Teorema 5.43 (C. de La Vallée Poussin). *Sia λ una misura positiva su $\mathcal{S}$ e sia $K \subset L_1(\lambda)$ un insieme. Allora, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *K è uniformemente integrabile in $L_1(\lambda)$;*
(b) *K è limitato in $L_1(\lambda)$ ed esiste una funzione $Q\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ crescente e convessa con*

$$Q(0) = 0 \qquad e \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{Q(t)}{t} = +\infty$$

tale che risulti

$$\sup_{f\in K}\int_X Q(|f|)\,d\lambda < +\infty.$$

Dimostrazione. (a) Essendo K uniformemente integrabile, determiniamo una successione di interi positivi $k_n \in \mathbb{N}_+$ $(n \geq 1)$ tale che

- $0 < k_n < k_{n+1}$ per ogni n;
- $\displaystyle\sup_{f\in K}\int_{\{|f|>k_n\}} |f|\,d\lambda \leq 1/2^n$ per ogni n;

e costruiamo la funzione Q nel modo seguente. Poniamo $q_0 = 0$ e

$$q_m = \mathrm{card}\,(\{n \geq 1 :\ k_n \leq m\}), \qquad m \geq 1,$$

cosicché la successione $\{q_m\}_m$ così definita risulta evidentemente crescente e divergente a $+\infty$: scelto infatti $n \geq 1$ e posto $m_0 \geq k_n$, per $m \geq m_0$ risulta $q_m \geq q_{m_0} \geq n$. Definiamo quindi la funzione costante a tratti $q\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ ponendo

$$q(t) = q_n, \qquad t \in [n\,, n+1),$$

per ogni n e consideriamo la sua funzione integrale

$$Q(x) = \int_0^x q(t)\,dt, \qquad x \geq 0,$$

che risulta essere quindi una funzione crescente e convessa e tale che $Q(0) = 0$. Si ha inoltre

$$x \geq n \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{Q(x)}{x} \geq \frac{q_n(x-n)}{x}$$

per ogni n cosicché da $q_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ segue $Q(x)/x \to +\infty$ per $x \to +\infty$. La funzione Q così definita ha dunque le proprietà elencate nell'enunciato e risulta anche

$$Q(x) = \int_0^x q(t)\,dt \leq \sum_{0\leq m\leq n}\int_m^{m+1} q(t)\,dt = \sum_{1\leq m\leq n} q_m, \qquad x \in (n\,, n+1],$$

per ogni $n \geq 1$, essendo $q_0 = 0$.

Valutiamo ora gli integrali di $Q(|f|)$ su X al variare di f in K. Essendo Q nulla nell'intervallo $[0,1]$, per ogni funzione $f \in K$ si ha

$$\begin{aligned}\int_X Q(|f|)\,d\lambda &= \int_{\{|f|>1\}} Q(|f|)\,d\lambda = \\ &= \sum_{n\geq 1}\int_{\{n<|f|\leq n+1\}} Q(|f|)\,d\lambda \leq \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{1\leq m\leq n} q_m\right)\lambda(\{n < |f| \leq n+1\})\end{aligned}$$

e quindi, riscrivendo la serie a destra come una serie doppia e scambiando l'ordine di sommazione (Esercizio I–2.29), risulta

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{1\leq m\leq n} q_m\right)\lambda(\{n < |f| \leq n+1\}) &= \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} q_m 1_{[1,n]}(m)\lambda(\{n < |f| \leq n+1\}) = \\ &= \sum_{m\geq 1} q_m \sum_{n\geq m}\lambda(\{n < |f| \leq n+1\}) = \\ &= \sum_{m\geq 1} q_m\lambda(\{|f| > m\}).\end{aligned}$$

Analogamente, riscrivendo la serie così ottenuta come serie doppia e scambiando nuovamente l'ordine di sommazione come prima, risulta

$$\begin{aligned}\sum_{m\geq 1} q_m \lambda(\{|f|>m\}) &= \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\lambda(\{|f|>m\})1_{[k_n,+\infty)}(m) = \\ &= \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}\lambda(\{|f|>m\})1_{[k_n,+\infty)}(m) = \\ &= \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq k_n}\lambda(\{|f|>m\})\end{aligned}$$

per ogni funzione $f \in K$. Abbiamo così provato che risulta

$$\int_X Q(|f|)\,d\lambda \leq \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq k_n}\lambda(\{|f|>m\})$$

per ogni funzione $f \in K$ e non resta che stimare la somma della serie doppia che compare a destra nella disuguaglianza precedente.
A tal fine, osserviamo che, per ogni funzione $f \in K$ e per ogni n si ha

$$(***) \quad \int_{\{|f|>k_n\}} |f|\,d\lambda \sum_{m\geq k_n}\int_{\{m<|f|\leq m+1\}} |f|\,d\lambda \geq \sum_{m\geq k_n} m\lambda(\{m<|f|\leq m+1\})$$

e, poiché la misura λ degli insiemi di sopralivello di f è finita, ciascun addendo della serie a destra si scrive come differenza nella forma

$$\begin{aligned}m\lambda(\{m<|f|\leq m+1\}) &= m\left[\lambda(\{|f|>m\})-\lambda(\{|f|>m+1\})\right] = \\ &= m\lambda(\{|f|>m\})-(m+1)\lambda(\{|f|>m+1\})+(\{|f|>m+1\})\end{aligned}$$

cosicché, sommando per m da k_n a k_n+j con $j \geq 1$, per le somme parziali della serie che compare a destra in $(***)$ risulta

$$\begin{aligned}&\sum_{k_n\leq m\leq k_n+j} m\left[\lambda(\{|f|>m\})-\lambda(\{|f|>m+1\})\right] = \\ &= k_n\lambda(\{|f|>k_n\})-(k_n+j+1)\lambda(\{|f|>k_n+j+1\})+ \\ &\qquad\qquad + \sum_{k_n\leq m\leq k_n+j}\lambda(\{|f|>m+1\}) \geq \\ &\geq \sum_{k_n\leq m\leq k_n+j+1}\lambda(\{|f|>m\})-(k_n+j+1)\lambda(\{|f|>k_n+j+1\})\end{aligned}$$

poiché si ha $k_n \geq 1$. Fissato $n \geq 1$, per ogni $j \geq 1$ sia $n_j \geq 1$ il massimo intero tale che $k_{n_j} \leq k_n + j + 1$. Risulta allora

$$(k_n+j+1)\lambda(\{|f|>k_n+j+1\}) \leq \int_{\{|f|>k_n+j+1\}} |f|\,d\lambda \leq \ \leq \int_{\{|f|>k_{n_j}\}} |f|\,d\lambda \leq 1/2^{n_j}$$

cosicché, tenendo conto che deve essere $n_j \to +\infty$ per $j \to +\infty$, risulta

$$\lim_{j\to+\infty}(k_n+j+1)\lambda(\{|f|>k_n+j+1\}) = 0$$

e quindi, passando al limite per $j \to +\infty$, la disuguaglianza $(***)$ diviene

$$\int_{\{|f|>k_n\}} |f|\,d\lambda \geq \sum_{m\geq k_n}\lambda(\{|f|>m\})$$

per ogni funzione $f \in K$ e per ogni n. Sommando su n si trova infine

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq k_n}\lambda(\{|f|>m\}) \leq \sum_{n\geq 1}\int_{\{|f|>k_n\}} |f|\,d\lambda \leq \sum_{n\geq 1} 1/2^n = 1$$

per ogni funzione $f \in K$.

Combinando le disuguaglianze ottenute risulta infine

$$\int_X Q(|f|)\,d\lambda \leq \sum_{n\geq 1} \sum_{m\geq k_n} \lambda(\{|f| > m\}) \leq 1$$

per ogni funzione $f \in K$ e questo prova l'asserto.
(b) Sia $M > 0$ tale che

$$\sup_{f\in K} \int_X Q(|f|)\,d\lambda \leq M$$

e, fissato $\varepsilon > 0$, sia $c_0 = c_0(\varepsilon) > 0$ tale che risulti $Q(x)/x \geq M/\varepsilon$ per ogni $x > c_0$. Allora, per $c \geq c_0$ risulta

$$\int_{\{|f|>c\}} |f|\,d\lambda \leq \frac{\varepsilon}{M} \int_{\{|f|>c\}} Q(|f|)\,d\lambda \leq \frac{\varepsilon}{M} \int_X Q(|f|)\,d\lambda \leq \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$$

per ogni $f \in K$ e dunque l'insieme K risulta essere uniformemente integrabile. □

Convergenza debole* in L_∞. Bla, bla, bla ...

Esercizi

5.1. Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$ con $\dim X = +\infty$. Provate che la norma $x \in X_w \to \|x\| \in [0, +\infty)$ non è debolmente continua.

5.2. Sia X uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$. Provate che X_w è di seconda categoria in sè se e solo se $\dim X < +\infty$.

5.3. Provate che c_0 e ℓ_p $(1 < p < +\infty)$ non hanno la proprietà di Schur.

5.4. Provate che ogni spazio di Banach riflessivo sul campo $\mathbb{K}$ è debolmente sequenzialmente completo. Provate quindi che:

(a) c_0 non è debolmente sequenzialmente completo;
(b) ℓ_1 è debolmente sequenzialmente completo.

5.5. Siano H uno spazio di Hilbert separabile con $\dim H = +\infty$, $\{u_n\}_n$ un insieme ortonormale completo di H e X il sottospazio non completo di H definito da

$$X = \operatorname{span}\{u_n :\ n \geq 1\}\,.$$

Provate che

(a) $X^*_{w^*}$ è metrizzabile;
(b) esiste una successione di funzionali lineari $x_n^* \in X^*$ $(n \geq 1)$ tali che

$$x_n^* \rightharpoonup 0 \text{ debolmente}^* \text{ per } n \to +\infty \qquad \text{e} \qquad \sup_{n\geq 1} \|x_n^*\| = +\infty.$$

5.6. Sia X uno spazio di Banach riflessivo sul campo $\mathbb{K}$. Provate che, per ogni $x^* \in X^*$ esiste $x \in X$ con $\|x\| = 1$ tale che

$$\|x^*\| = |\langle x^*, x\rangle|.$$

5.7. Provate che l'integrale

$$f \in C([0,1]) \mapsto \int_0^1 f$$

come funzionale lineare su $C([0,1])$ è debolmente sequenzialmente continuo e non è debolmente continuo.

5.8. Siano $K = [0\,,\Omega]$ lo spazio di Hausdorff compatto di Esercizio I–2.35 e $\mathcal{M}(K)$ lo spazio di Banach delle misure di Radon reali o complesse in K. Provate che il funzionale lineare $L\colon \mathcal{M}(K) \to \mathbb{K}$ definito da

$$L\mu = \mu(\{\Omega\}), \qquad \mu \in \mathcal{M}(K),$$

è debolmente* sequenzialmente continuo ma non è debolmente* continuo.

5.9. Sia I insieme infinito e siano $x_n \in \ell_p(I)$ $(n \geq 1)$ e $x \in \ell_p(I)$ con $1 < p < +\infty$. Provate che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) $x_n \rightharpoonup x$ in w–$\ell_p(I)$ $n \to +\infty$;

(b) $\begin{cases} \sup\limits_{n\geq 1} \|x_n\|_\infty < +\infty \\ x_n(i) \to x(i) \text{ per } n \to +\infty \text{ per ogni } i \in I. \end{cases}$

Provate che lo stesso vale per $p = +\infty$ per la convergenza debole* di $\ell_\infty(I)$ ma non vale per $p = 1$.

Note e commenti

Capitolo 1.
Bla, bla, bla ...

Spazi di Banach. La nozione di spazio normato completo nella forma astratta che ci è familiare compare nella tesi di dottorato di S. Banach (Politecnico di Lwów 1920) pubblicata in [4] anche se i principali esempi di tali spazi erano già noti e molte delle considerazioni di base relative a tale spazi erano già state osservate in tali esempi specifici. A Banach va attribuito il merito di aver elaborato una teoria generale, unitaria e organica culminata nella monografia [7] che ha avuto un enorme impatto ed è stata per lungo tempo il riferimento principale per l'analisi funzionale. Il nome originariamente attribuito agli spazi normati completi è (B) spazi e il battesimo di tali spazi con il nome di Banach è dovuto a M. Fréchet ([23]). Un dettagliato resoconto della storia della teoria degli spazi di Banach è presentato in [48] da cui molte di queste note sono tratte.

Convergenza incondizionata. La nozione di convergenza incondizionata in spazi di Banach è dovuta a W. Orlicz ([45]) che dimostra anche l'equivalenza con la convergenza per sottoserie (Esercizio 1.9). L'equivalenza tra convergenza incondizionata ed esistenza del limite delle somme parziali lungo l'insieme filtrante dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}_+$ è dovuta a T. Hildebrandt ([32]).
Un'altra dimostrazione del teorema di Dvoretzky–Rogers basata sulla nozione di spazio nucleare è dovuta a A. Grothendieck ([24]).

Teorema di Hahn–Banach. Il teorema di estensione di Hahn–Banach per spazi normati reali (Teorema 1.44) è originariamente dovuto a H. Hahn ([25]) e successivamente ma indipendentemente a S. Banach ([5]). Per la versione complessa dovuta a H. Bohnenblust e A. Sobczyk ([9]) e contemporaneamente a G. A. Soukhomlinov ([55]) – che prova il teorema anche per i quaternioni – occorre sorprendentemente attendere alcuni anni. Sempre in [25] si trova anche il successivo teorema sulla risolubilità dei sistemi di equazioni lineari (Teorema 1.47) nel caso reale mentre l'analogo teorema di E. Helly per il duale (Teorema 1.48) è in realtà precedente ([29]).

Principio di uniforme limitatezza. Bla, bla, bla ...
Duale e biduale. Il nome *duale* per lo spazio dei funzionali lineari è dovuto a N.Bourbaki ([**Bourbaki-CRParis1938**]) così come le notazioni x^* per i suoi elementi e $\langle x^*, x\rangle$ per l'azione di x^* su x ([11] e [12]).
La nozione di spazio riflessivo è dovuta a H. Hahn ([25]) con il nome di *reguläre Räume* ed il fenomeno della non riflessività negli spazi di successioni è evidenziato da E. Helly ([29]). L'uso dell'aggettivo *riflessivo* è invece dovuto a E. R. Lorch ([41]).
La nozione di spazio uniformemente convesso è dovuta a J. A. Clarkson ([14]) che prova l'uniforme convessità degli spazi L_p $(1 < p < +\infty)$ come conseguenza delle omonime disuguaglianze (Teorema 2.46). La funzione $\delta(\varepsilon) > 0$ ottimale per l'uniforme convessità di L_p $(1 < p < +\infty)$ è determinata in [28].
La riflessività degli spazi uniformemente convessi è dovuta indipendentemente a

D. P. Milman ([44]) e B. J. Pettis ([46]). La dimostrazione del teorema di Milman–Pettis qui presentata (Teorema 1.75) è dovuta a S. Kakutani ([35]). L'esempio che mostra che l'implicazione opposta è falsa (Esmpio 1.76) è dovuto a M. M. Day ([16] e [17]).

Capitolo 2.
Bla, bla, bla ...

Spazi di funzioni continue. Bla, bla, bla ...
Una più ampia e approfondita discussione sulla validità del teorema di Stone–Weierstrass e delle sue generalizzazioni è svolta in [30].
La compattezza rispetto alla convergenza uniforme delle successioni di funzioni equilipschitziane definite su intervalli compatti della retta reale è dovuta a G. Ascoli ([3]), il caso generale di funzioni equicontinue è dovuto a C. Arzelà ([2]).

Spazi L_p. La definizione degli spazi L_p $(1 < p < +\infty)$ nel caso di intervalli compatti con la misura di Lebesgue è dovuta a F. Riesz ([**1909a**]) mentre per lo studio degli stessi spazi con μ misura astratta bisogna attendere N. Dunford ([**1938**]).
La caratterizzazione degli insiemi compatti di $L_p(\mu)$ (Teorema 2.34) è dovuta a R. S. Phillips ([47]). Il teorema di Kolmogorov–Riesz (Teorema 2.36) è noto anche come teorema di Fréchet–Kolmogorov. Ulteriori informazioni sulla compattezza in L_p sono in [26] e [27].

Duale di L_p. L'identificazione del duale di $L_p([a,b])$ $(1 < p < +\infty)$ con il corrispondente spazio L_q con q esponente coniugato risale a F. Riesz ([**1909a**]). Lo stesso risultato con μ misura astratta è dovuto a N. Dunford ([**1938**]) con μ misura finita e a Schwartz ([**1951**]) con misura infinita. Entrambi questi risultati utilizzano il teorema di Radon–Nikodym. Un approccio alternativo che non utilizza il teorema di Radon–Nikodym è dovuto a E. J. McShane ([43]) e si basa sulle disuguaglianze di Clarkson (Teorema 2.46). Questo approccio è illustrato in [30].
L'identificazione del duale di L_1 con L_∞ è originariamente dovuta a H. Steinhaus per la misura di Lebesgue su un intervallo compatto ([**1919**]). Nel caso di una misura astratta finita l'identificazione è dovuta a O. Nikodym come conseguenza del teorema di Radon–Nikodym ([**1930**]). Il caso di misure $\sigma-$finite è parte del folklore e l'osservazione che il duale di L_1 può essere più grande di L_∞ risale a S. Saks ([**1937**]). L'identificazione del duale di L_1 con L_∞ continua a valere per misure decomponibili (Teorema 20.19 in [30]).
L'identificazione del duale di L_∞ e delle funzioni limitate e misurabili è dovuta indipendentemente a T. Hildebrandt ([31]) e a G. Fichtenholz e L. V. Kantorovich ([22])

Spazi L_p con $0 < p < 1$. Lo studio degli spazi L_p con $0 < p < 1$ è dovuto a M. Day ([15]) cui si deve in particolare il Corollario 2.51.

Convoluzioni. La convergenza puntuale della convoluzione con un nucleo di sommabilità $\{K_t\}_{t>0}$ nei punti di Lebesgue (Teorema 2.62) è dovuto a A. P. Calderon e A. Zygmund (Lemma 1 pg. 111 in [13]) con la sola ipotesi che K sia maggiorata da una funzione integrabile radialmente simmetrica. Ulteriori generalizzazioni sono in [37].

Capitolo 3.
Bla, bla, bla ...

Capitolo 4.
Spazi vettoriali topologici. Bla, bla, bla ...

Il teorema che caratterizza gli spazi vettoriali topologici metrizzabili in termini di numerabilità delle basi di intorni è dovuto indipendentemente a G. Birkhoff ([8]) e S. Kakutani ([34]).
Il Teorema 4.33 sulle quasinorme è dovuto a T. Aoki ([1]) e S. Rolewicz ([52]) e la dimostrazione qui presentata è tratta da [36].

Spazi localmente convessi. Bla, bla, bla ...

Convessità. Il teorema di estensione di Hahn–Banach per funzionali reali sublineari (Teorema 4.50) è dovuto a S. Banach ([6]). Le sue conseguenze in termini di separazione dei convessi sono dovute a M. Eidelheit ([20]) e a J. Dieudonné ([18]) nel caso in cui uno dei due insiemi convessi sia aperto (Teorema 4.54 – (a)) e nell'altro caso (Teorema 4.54 – (b)) a J. W. Tukey ([56]) quando lo spazio localmente convesso è uno spazio normato con la sua topologia debole (Capitolo 5) e a V. L. Klee ([38]) nel caso generale.

Capitolo 5.

Topologia debole e debole*. Bla, bla, bla ...
Nella versione originale ([42]) il teorema di Mazur (Teorema 5.10) stabilisce che gli insiemi chiusi e convessi sono debolmente sequenzialmente chiusi e già in [7] vi è la dimostrazione che i sottospazi chiusi sono debolmente chiusi.
Bla, bla, bla ...
La proprietà di Radon–Riesz prende il nome dalla corrispondente proprietà degli spazi L_p dimostrata da J. Radon ([49]) prima e indipendentemente da F. Riesz ([50] e [51]) poi. La stessa proprietà è anche detta proprietà di Kadets–Klee.
L'osservazione che X_w è di prima categoria in sè quando X ha dimensione infinita (Esercizio 5.2) è dovuta a J. V. Wehausen ([57]).

Compattezza debole e debole*. La versione originale di Banach del teorema di Banach–Alaoglu è quella di Corollario 5.28. La dimostrazione nel caso non separabile (Teorema 5.24) è dovuta a L. Alaoglu ([]) e dimostrazioni indipendenti e di poco successive sono dovute a N. Bourbaki, J. Dieudonné, V. Šmulian e S. Kakutani.
L'equivalenza tra i vari tipi di compattezza nella topologia debole degli spazi di Banach separabili è dovuta a D. G. Bourgin ([]). Nel caso generale (Teorema 5.34, l'equivalenza tra compattezza numerabile debole e compattezza sequenziale debole è dovuta a V. Šmulian mentre l'equivalenza tra compattezza debole e compattezza numerabile debole a W. F. Eberlein ([]). La dimostrazione del teorema di Eberlein–Šmulian qui proposta è dovuta a R. Whitley ([58]).

Capitolo ??.

Bla, bla, bla ...
Il primo esempio esplicito di funzione continua la cui serie di Fourier diverge in qualche punto è dovuto a P. du Bois Reymond [10]. L'esempio qui presentato (Esempio **??**) è dovuto a L. Fejér ([21]) ed un ulteriore esempio è dovuto a H. Lebesgue ([40]). L'esempio di Kolmogorov di una funzione integrabile la cui serie di Fourier diverge quasi ovunque (Teorema **??**) può essere modificato in modo da ottenere la divergenza della serie di Fourier in ogni punto di $\mathbb{T}$ ([39]).

Bibliografia

[1] T. Aoki, *Locally bounded linear topological spaces*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **18** (1942), 588–594.

[2] C. Arzelá, *Funzioni di linee*, Atti della R. Accad. dei Lincei Rendiconti della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (4) **5** (1889), 342–348.

[3] G. Ascoli, *Le curve limiti di una varietà data di curve*, Atti della R. Accad. dei Lincei Rendiconti della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) **18** (1882-1883), 521–586.

[4] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. **3** (1922), 133–181.

[5] S. Banach, *Sur les fonctionelles linéaires (I)*, Studia Math. **1** (1929), 211–216.

[6] S. Banach, *Sur les fonctionelles linéaires (II)*, Studia Math. **1** (1929), 223–239.

[7] S. Banach, *Téorie des opérations linéaires*, Monograf. Mat, Zsubwencji Funduszu Kultury Narodowej, Warsaw, 1932.

[8] G. Birkhoff, *A note on topological groups*, Compositio Math. **3** (1936), 427–430.

[9] H. F. Bohnenblust e A. Sobczyk, *Extensions of functionals on complex linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 91–93.

[10] P. du Bois Reymond, *Über die Fourierschen Reihen*, Nachr. Kön. Ges. Wiss. Göttingen **21** (1873), 571–578.

[11] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. VI. Première partie: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre II: Algèbre. Chapitre II: Algèbre linéaire*, Actualités Sci. Ind., no. 1032, Hermann et Cie., Paris, 1947.

[12] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. XVIII. Première partie: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre V: Espaces vectoriels topologiques. Chapitre III: Espaces d'applications linéaires continues. Chapitre IV: La dualité dans les espaces vectoriels topologiques. Chapitre V: Espaces hilbertiens*, Actualités Sci. Ind., no. 1229, Hermann & Cie, Paris, 1955.

[13] A. P. Calderon e A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **88** (1952), 85–139.

[14] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 396–414.

[15] M. M. Day, *The spaces L^p with* $0 < p < 1$, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 816–823.

[16] M. M. Day, *Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 313–317.

[17] M. M. Day, *Some more uniformly convex spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 504–507.

[18] Jean Dieudonné, *Sur la séparation des ensembles convexes dans un espace de Banach*, Revue Sci. (Rev. Rose Illus.) **81** (1943), 277–278.

[19] A. Dvoretzky e C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **36** (1950), 192–197.

[20] M. Eidelheit, *Zur Theorie der konvexen Mengenin linearen normierten Räumen*, Studia Math. **6** (1936), 104–111.

[21] L. Fejér, *Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **28** (1911), 63–104.

[22] G. Fichtenholz e L. V. Kantorovich, *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées*, Studia Math. **5** (1934), 69–98.

[23] M. Fréchet, *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme Introduction à l'Analyse générale*, Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions, Gauthier-Villars et Cie., Paris, 1928.

[24] A. Grothendieck, *Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **4** (1952), 73–112 (1954).

[25] H. Hahn, *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen*, J. Reine Angew. Math. **157** (1927), 214–229.

[26] H. Hanche-Olsen e H Holden, *The Kolmogorov–Riesz compactness theorem*, Expo. Math. **28** (2010), 385–394.

[27] H. Hanche-Olsen e H. Holden, *Addendum to "The Kolmogorov–Riesz compactness theorem"*, Expo. Math. **34** (2016), 243–245.

[28] O. Hanner, *On the uniform convexity of L^p and l^p*, Ark. Mat. **3** (1956), 239–244.

[29] E. Helly, *Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Monatsh. Math. Phys. **31** (1921), 60–91.

[30] E. Hewitt e K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Graduate Texts in Mathematics No. 25, Springer-Verlag, New York, 1975.

[31] T. H. Hildebrandt, *On bounded linear functional operations*, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 868–875.

[32] T. H. Hildebrandt, *On unconditional convergence in normed vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 959–962.

[33] R. C. James, *A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **37** (1951), 174–177.

[34] S. Kakutani, *Über die Metrisation der topologischen Gruppen*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **12** (1936), 82–84, ISSN: 0369-9846.

[35] S. Kakutani, *Weak convergence in uniformly convex spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **45** (1949), 188–193.

[36] N. J. Kalton, N. T. Peck e J. W. Roberts, *An F–space sampler*, vol. 89, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge, 1984, xii+240.

[37] R. A. Kerman, *Pointwise convergence approximate identities of dilated radially decreasing kernels*, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 41–44.

[38] V. L. Klee Jr., *Convex sets in linear spaces*, Duke Math. J. **18** (1951), 443–466.

[39] A Kolmogorov, *Une série de Fourier–Lebesgue divergente partout*, C. R. Acad. Sci Paris **183** (1926), 1327–1329.

[40] H. Lebesgue, *Sur les intégrales singulières*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. (3) **1** (1909), 25–117.

[41] E. R. Lorch, *On a calculus of operators in reflexive vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **45**.2 (1939), 217–234.

[42] S. Mazur, *Über konvexe Mengen in linearen normiertnen Räumen*, Studia Math. **4** (1933), 70–84.

[43] E. J. McShane, *Linear functionals on certain Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 402–408.

[44] D.P. Milman, *On some criteria for the regularity of spaces of the type (B)*, Doklady Akad. Nauk SSSR **20** (1938), 243–246.

[45] W. Orlicz, *Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen*, Studia Math. **4** (1933), 174–179.

[46] B. J. Pettis, *A proof that every uniformly convex space is reflexive*, Duke Math. J. **5** (1939), 249–253.

[47] R. S. Phillips, *On linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 516–541.

[48] A. Pietsch, *History of Banach spaces and linear operators*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2007.

[49] J. Radon, *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen*, Hölder, Wien, 1913.

[50] F. Riesz, *Sur la convergence en moyenne, I*, Acta Sci. Math. (Szeged) **4** (1928–1929), 58–64.

[51] F. Riesz, *Sur la convergence en moyenne, II*, Acta Sci. Math. (Szeged) **4** (1928–1929), 182–185.

[52] S. Rolewicz, *On a certain class of linear metric spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III. **5** (1957), 471–473.

[53] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, Third Ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York, 1976.

[54] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Third Ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[55] G. A. Soukhomlinov, *Über Fortsetzung von linearen Funktionalen in linearen komplexen Räumen und linearen Quaternionräumen*, Mat. Sbornik **3** (1938), 353–358.

[56] J. W. Tukey, *Some notes on the separation of convex sets*, Portugal. Math. **3** (1942), 95–102.

[57] J. V. Wehausen, *Transformations in linear topological spaces*, Duke Math. J. **4** (1938), 157–169.

[58] R. Whitley, *An elementary proof of the Eberlein–Šmulian theorem*, Math. Ann. **172** (1967), 116–118.

Indice analitico