Università degli Studi di Parma
Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2021–2022)

# ANALISI MATEMATICA 3 – ESERCIZI

## 3. Misure di Radon e teorema di Baire

**Esercizio 1.** Determinate gli insiemi compatti di $\mathbb{R}^2$ munito della topologia $\mathcal{T}$ definita come prodotto della topologia discreta in $x$ e della usuale topologia euclidea in $y$. Con tale topologia $\mathbb{R}^2$ è uno spazio di Hausdorff localmente compatto che non è $\sigma-$compatto.

**Esercizio 2.** Sia $X$ uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva di Radon in $X$. Posto

$$T = \bigcup \{V : V \text{ aperto e } \mu(V) = 0\} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{supp}(\mu) = T^{\mathrm{c}},$$

provate che

(a) $T$ è aperto e $\mu(T) = 0$;

(b) $x \in \operatorname{supp}(\mu) \iff \int_X \varphi \, d\mu > 0 \quad \forall \varphi \in C_{\mathrm{c}}(X) : \{x\} \prec \varphi.$

L'insieme chiuso $\operatorname{supp}(\mu)$ è il *supporto di* $\mu$.

**Esercizio 3.** Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ una funzione (Lebesgue) misurabile. Provate che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $F_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ chiuso tale che

(a) $|\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon| \le \varepsilon$ ($|\cdot|$ misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$);

(b) la restrizione $f_{|F_\varepsilon}$ di $f$ a $F_\varepsilon$ è continua.

**Esercizio 4.** Fornite un esempio di insieme di $\mathbb{R}$ che non sia né un insieme di tipo $\mathcal{G}_\delta$ né di tipo $\mathcal{F}_\sigma$

**Esercizio 5.** Siano $(X, \tau)$ uno spazio topologico di Hausdorff, $\mathcal{V}(x)$ l'insieme degli intorni di $x \in X$ e sia

$$\operatorname{osc}(f)(x) = \inf_{V \in \mathcal{V}(x)} \sup \{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in V\}, \qquad x \in X,$$

l'*oscillazione* della funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$. Provate che

(a) $f$ continua in $x \iff \operatorname{osc}(f)(x) = 0$;

(b) l'insieme $\{\operatorname{osc}(f) \ge \varepsilon\}$ ($\varepsilon > 0$) è chiuso;

(c) gli insiemi

$$\{x \in X : f \text{ è continua in } x\} \qquad \text{e} \qquad \{x \in X : f \text{ non è continua in } x\}$$

sono un $\mathcal{G}_\delta$ e un $\mathcal{F}_\sigma$ rispettivamente

**Esercizio 6.** Sia $(X\,,d)$ uno spazio metrico completo e siano $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ una successione di funzioni continue e $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione tale che[1]

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x), \qquad x \in X.$$

Provate che

(a) esiste $W$ aperto denso di $X$ tale che $f$ è localmente limitata in $W$;

(b) l'insieme dei punti in cui $f$ è continua è un $\mathcal{G}_\delta$ denso di $X$.

La funzione di Dirichlet può quindi essere il limite puntuale di una successione di funzione continue? La derivata di una funzione derivabile può quindi essere discontinua in ogni punto di un intervallo (non degenere)?

**Esercizio 7.** Considerate le seguenti affermazioni: esiste una successione di funzioni continue e non negative $f_n\colon \mathbb{R} \to [0\,,+\infty)$ $(n \geq 1)$ tale che

(a) la successione $\{f_n(x)\}_n$ è illimitata se e solo se $x \in \mathbb{Q}$;

(b) la successione $\{f_n(x)\}_n$ è illimitata se e solo se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

(c) $\lim\limits_n f_n(x) = +\infty$ se e solo se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Quali di esse sono vere?

[1] La funzione $f$ è nella *prima classe di Baire*.

## Suggerimenti

**Esercizio 2.**

- ($\Longrightarrow$) Supponete che esista $\varphi \in C_{\mathrm{c}}(X)$ tale che $\{x\} \prec \varphi$ con
$$\int_X \varphi d\mu = 0$$
e deducete che esiste $V$ intorno aperto di $x$ con $\mu(V) = 0$.
- ($\Longleftarrow$) Se $x \notin \operatorname{supp}(\mu)$, esiste $V$ aperto tale che $x \in V$ e $\mu(V) = 0$. Per Urysohn ...

**Esercizio 3.** Per Lusin per ogni $n \geq 1$ esiste $\varphi_n \in C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ tale che
$$\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset (-n, n) \qquad \text{e} \qquad |\{\varphi_n \neq f\} \cap (-n, n)| < \varepsilon/2^n.$$
Prendete $W_n$ aperto tale che
$$\{\varphi_n \neq f\} \cap (-n, n) \subset W_n \subset (-n, n) \qquad \text{e} \qquad |\{\varphi_n \neq f\} \cap (-n, n)| < \varepsilon/2^n.$$
Ponete $W_\varepsilon = \bigcup_n W_n$ e $F_\varepsilon = \ldots$.

**Esercizio 6.**

(a) Si ha
$$X = \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} \{|f_n| \leq k\}$$
e quindi ... Ripetete lo stesso argomento all'interno di ogni palla chiusa di $X$.

(b) Si ha
$$X = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m,j \geq n} \{|f_m - f_j| \leq \varepsilon\}, \qquad \varepsilon > 0,$$
e quindi, ragionando come in (a), per ogni $\varepsilon > 0$ determinate un aperto $V_\varepsilon$ denso in $X$ con la seguente proprietà: per ogni $x_0 \in V_\varepsilon$, esistono $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ e $n_0 = n_0(x_0, \varepsilon) \geq 1$ tali che
- $B_\delta(x_0) \subset V_\varepsilon$;
- $|f_m(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon$ per ogni $x$ con $d(x, x_0) < \delta$ e $m, j \geq n_0$.

Prendete $G = \bigcap_k V_{1/k}$ e concludete.

**Esercizio 7.**

(a) L'insieme dove $\sup_n f_n = +\infty$ è un ...

(b) Numerate i razionali $\{q_k\}_k$ e per ogni $n$ costruite $f_n$ in modo che su ciascun razionale $q_k$ per $k = 1, \ldots, n$ valga $k$ (o eventualmente meno) e cresca con pendenza $n$ altrove.

(c) Riesaminate meglio la succession costruita in (b).