Università degli Studi di Parma
Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2021–2022)

ANALISI MATEMATICA 3 – ESERCIZI

1. Misura e integrazione astratta

Esercizio 1. Sia $\mathcal{S}$ una $\sigma-$algebra infinita di insiemi di X. Provate che

(a) esiste una partizione numerabile $\{E_n\}_n$ dell'insieme X formata da insiemi $\mathcal{S}-$misurabili (non vuoti);

(b) $\operatorname{card}(\mathcal{S}) \geq \mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}$ denota la cardinalità di $\mathbb{R}$).

Esercizio 2. Siano X e Y spazi topologici con $\sigma-$algebre di Borel $\mathcal{B}(X)$ e $\mathcal{B}(Y)$ rispettivamente. Provate che

(a) se $Z \subset X$ è un insieme di X e $\mathcal{B}(Z)$ è la $\sigma-$algebra di Borel di Z relativamente alla topologia indotta, si ha
$$\mathcal{B}(Z) = \mathcal{B}(X) \cap Z;$$

(b) se $\Phi\colon X \to Y$ è un omeomorfismo di X su Y si ha
$$B \in \mathcal{B}(X) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Phi(B) \in \mathcal{B}(Y).$$

Esercizio 3. Fornite un esempio di classe di Dynkin $\mathcal{D}$ che non sia una $\sigma-$algebra.

Esercizio 4. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva e, dati $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$, siano
$$\liminf_{n\to+\infty} E_n = \bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq m} E_n \qquad \text{e} \qquad \limsup_{n\to+\infty} E_n = \bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m} E_n.$$

Provate che

(a) $\mu\left(\liminf\limits_{n\to+\infty} E_n\right) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \mu(E_n)$;

(b) $\mu\left(\bigcup\limits_{n\geq 1} E_n\right) < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \mu\left(\limsup\limits_{n\to+\infty} E_n\right) \geq \limsup\limits_{n\to+\infty} \mu(E_n)$.

Esercizio 5. Siano $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva semifinita su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X e $E \in \mathcal{S}$ un insieme tale che $\mu(E) = +\infty$. Provate che per ogni $t > 0$ esiste un insieme $F \in \mathcal{S}$ tale che $F \subset E$ e $t < \mu(F) < +\infty$.

Esercizio 6. Sia $(X\,,\mathcal{S})$ uno spazio misurabile e siano $f\,,g\colon X \to \mathbb{R}_\infty$ e $f_n\colon X \to \mathbb{R}_\infty$ $(n \geq 1)$ funzioni $\mathcal{S}-$misurabili. Provate che i seguenti insiemi sono $\mathcal{S}-$misurabili:

(a) $\{f < g\}$, $\{f \neq g\}$ e $\{f = g\}$;

(b) $\left\{x \in X : \exists \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right\}$.

Esercizio 7. Sia X un insieme non numerabile e siano

$$\mathcal{S} = \big\{E \subset X : \, E \text{ o } E^{\mathrm{c}} \text{ è al più numerabile}\big\}\,;$$

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{se } E \text{ al più numerabile} \\ 1 & \text{se } E^{\mathrm{c}} \text{ al più numerabile} \end{cases} \qquad E \in \mathcal{S}.$$

(a) Provate che $\mathcal{S}$ è una $\sigma-$algebra di insiemi di X e che μ è una misura positiva su $\mathcal{S}$.

(b) Determinate le funzioni $\mathcal{S}-$misurabili $f\colon X \to \mathbb{R}$ ed i loro integrali.

Esercizio 8. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X tale che $\mu(X) < +\infty$ e siano $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ funzioni $\mathcal{S}-$misurabili e $f\colon X \to \mathbb{K}$ una funzione tali che

- ogni f_n è limitata;
- $f_n \to f$ uniformemente su X per $n \to +\infty$.

Provate che ogni f_n e f sono $\mu-$integrabili su X e che risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$$

e che la conclusione può essere falsa se l'ipotesi $\mu(X) < +\infty$ viene omessa.

Esercizio 9. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di X tale che $\mu(X) = 1$ e siano $f\,,g\colon X \to \mathbb{R}$ funzioni positive $\mathcal{S}-$misurabili tali che $f(x)g(x) \geq 1$ per $\mu-$q.o. $x \in X$. Provate che risulta

$$\int_X f\, d\mu \cdot \int_X g\, d\mu \geq 1.$$

Esercizio 10. Siano $\mu\colon \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ una misura positiva su una $\sigma-$algebra $\mathcal{S}$ di insiemi di Ω e $(X\,,d)$ uno spazio metrico e sia $f\colon X \times \Omega \to \mathbb{K}$ una funzione con le seguenti proprietà:

- per ogni $x \in X$ la funzione $\omega \in \Omega \mapsto f(x\,,\omega)$ è $\mu-$integrabile in Ω;
- per $\mu-$q.o. $\omega \in \Omega$ la funzione $x \in X \mapsto f(x\,,\omega)$ è continua in $x_0 \in X$;
- esistono $r > 0$ e una funzione $g\colon \Omega \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}-$misurabile con
$$\int_\Omega g(\omega)\, d\mu(\omega) < +\infty$$
tali che $|f(x\,,\omega)| \leq g(\omega)$ per ogni $x \in B_r(x_0)$ e $\omega \in \Omega$.

Provate che la funzione $F\colon X \to \mathbb{K}$ definita da

$$F(x) = \int_\Omega f(x\,,\omega)\, d\mu(\omega), \qquad x \in X,$$

è continua in x_0.

Suggerimenti

Esercizio 1.

(a) Provate per induzione che per ogni $n \geq 1$ esiste una partizione $\mathcal{E}_n = \{E_1, \ldots, E_n\}$ di X formata da n insiemi $\mathcal{S}-$misurabili (non vuoti). Per ogni $x \in X$ e $n \geq 1$, sia E_n^x l'insieme di $\mathcal{E}_n$ contenente x. Posto
$$E_x = \bigcap_{n \geq 1} E_n^x,$$
provate che per $x \neq y$ risulta $E_x = E_y$ o $E_x \cap E_y = \varnothing$ e concludete.

(b) Usate (a) e la rappresentazione binaria dei numeri reali in $[0,1)$ per costruire una funzione $\varphi\colon (0,1) \to \mathcal{S}$ iniettiva.

Esercizio 3. Oltre a X e a $\varnothing$, la collezione di insiemi $\mathcal{D}$ deve contenere A e A^c per ogni insieme A ma devono esistere A e B in $\mathcal{D}$ tali che $A \cup B \notin \mathcal{D}$. Per fare questo basta che X abbia ... elementi.

Esercizio 5. Supponete che sia
$$t = \sup\big\{\mu(F) :\ F \in \mathcal{S},\ F \subset E \text{ e } \mu(F) < +\infty\big\} < +\infty$$
e osservate che per ogni insieme $F \in \mathcal{S}$ con $F \subset E$ e $\mu(F) < +\infty$ deve essere $\mu(F) < t$.

Esercizio 6.

(a) Attenzione! Non si può fare $g - f$.

(b) L'insieme dei punti x dove $\{f_n(x)\}_n$ converge è l'insieme dove $\{f_n(x)\}_n$ è di Cauchy. Esprimete tale insieme come intersezione numerabile di unioni numerabili di intersezioni numerabili ... Adattate lo stesso argomento all'insieme dei punti x dove $\{f_n(x)\}_n$ diverge.

Esercizio 7.

(a) Se E ed F sono due insiemi $\mathcal{S}-$misurabili e disgiunti di X, essi non possono essere entrambi ...

(b) Provate che, se $A \subset \mathbb{R}$ è un insieme non numerabile, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che entrambi gli insiemi $\{a \in A :\ a < c\}$ e $\{a \in A :\ a > c\}$ sono non numerabili (si può fare in vari modi!). Quindi, se $f\colon X \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{S}-$misurabile, $f(X)$ deve essere ...

Esercizio 9. Pensate alla disuguaglianza di Hölder ...

Esercizio 10. Usate il teorema di convergenza dominata con una generica successione di punti $x_n \to x_0$ in X per $n \to +\infty$.