Università degli Studi di Parma
Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2021–2022)

ANALISI MATEMATICA 3 – ESERCIZI

4. Spazi di Banach e di Hilbert e serie di Fourier

Esercizio 1. Provate che non esiste alcuno spazio di Banach X avente dimensione (algebrica) numerabile.

Esercizio 2. Considerate gli spazi di Banach c_∞, c_0 e ℓ_p $(1 \le p \le +\infty)$ e provate che

(a) c_∞ e c_0 sono separabili;
(b) ℓ_p è separabile per $1 \le p < +\infty$ ma l_∞ non è separabile.

Esercizio 3. Provate che il duale c_0^* di c_0 si identifica isometricamente con ℓ_1: per ogni funzionale lineare continuo $L \in c_0^*$ esiste uno e un solo $y = \{y_n\}_n \in \ell_1$ tale che

$$Lx = \sum_n y_n x_n, \qquad x = \{x_n\}_n \in c_0,$$

e che risulta $\|L\| = \|y\|_1$.

Esercizio 4. Sia $\{y_n\}_n$ una successione reale o complessa tale che la serie

$$\sum_n y_n x_n$$

converge per ogni successione $\{x_n\}_n$ tale che $x_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Provate che deve essere

$$\sum_n |y_n| < +\infty.$$

Esercizio 5. Siano H uno spazio di Hilbert e M un suo sottospazio. Provate che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) M è chiuso e $\dim M^\perp = 1$;
(b) esiste $L \in H^*$ con $L \ne 0$ tale che $M = \ker L$.

Esercizio 6. Siano H uno spazio di Hilbert, M_0 un sottospazio di H e $L_0 \colon M_0 \to \mathbb{K}$ un funzionale lineare limitato su M_0. Provate che

(a) L_0 ha un'unica estensione lineare limitata $L \in H^*$ con $\|L\| = \|L_0\|$;
(b) $L = 0$ su $M_0^\perp$.

Esercizio 7. Sia C il sottoinsieme di $C([0,1])$ formato dalle funzioni continue $u \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tali che

$$\int_0^{1/2} u - \int_{1/2}^1 u = 1.$$

Provate che

(a) C è un sottoinsieme chiuso, convesso e non vuoto di $C([0,1])$;
(b) C non contiene alcun elemento di norma minima:

$$u \in C \qquad \Longrightarrow \qquad \|u\|_u > \inf\big\{\|v\|_u : \, v \in C\big\}\,.$$

Esercizio 8. Sia $\{n_k\}_{k\geq 1}$ una successione strettamente crescente di interi. Provate che l'insieme

$$E = \left\{ t \in [-\pi,\pi] : \, \exists \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}(n_k t) \right\}.$$

è (Lebesgue) misurabile con $|E| = 0$.

Esercizio 9. Calcolate le serie di Fourier delle seguenti funzioni $2\pi-$periodiche:

$$f(t) = \begin{cases} t & |t| < \pi \\ 0 & |t| = \pi; \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(t) = t^2, \quad |t| \leq \pi.$$

Stabilite se convergono puntualmente e in $L_2(\mathbb{T})$ e calcolate le somme di

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Esercizio 10. Provate che l'insieme

$$M = \left\{ f \in L_2(\mathbb{T}) : \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) \text{ converge} \right\}$$

è un sottospazio denso di prima categoria in $L_2(\mathbb{T})$.

Suggerimenti

Esercizio 1. Supponete che $\{e_n : n \geq 1\}$ sia una base (algebrica) di X e considerate i sottospazi generati da $\{e_m : 1 \leq m \leq n\}$.

Esercizio 2. Per (c) costruite una famiglia non numerabile di aperti disgiunti di ℓ_∞.

Esercizio 4. Considerate i funzionali lineari limitati L_n $(n \geq 1)$ su c_0 definiti da

$$L_n x = \sum_{1 \leq m \leq n} y_m x_m, \qquad x = \{x_m\}_m \in c_0.$$

Esercizio 5.
(a) Prendete $x_0 \in M^\perp$ con $x_0 \neq 0$ e provate che ogni $x \in H$ si scrive in modo unico nella forma $x = x' + \lambda x_0$. Costruite quindi $L \ldots$
(b) Scegliete $x_0 \in M^\perp$ tale che $Lx_0 = 1$ e per $x \in M^\perp$ considerate $x - (Lx)x_0 \ldots$

Esercizio 6. Potete supporre che M_0 sia chiuso e utilizzare il teorema di Riesz ...

Esercizio 7. Per (b) provate che se $u \in C$ deve essere $\|u\|_u > 1$.

Esercizio 8. Usate il lemma di Riemann–Lebesgue per provare che la funzione definita da

$$u(t) = \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{sen}(n_k t) & t \in E \\ 0 & t \notin E, \end{cases}$$

è quasi ovunque nulla e poi usate la formula di bisezione $\cos(2t) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t$.

Esercizio 10. Considerate i funzionali lineari limitati L_n $(n \geq 0)$ su $L_2(\mathbb{T})$ definiti da

$$L_n f = \sum_{|m| \leq n} \hat{f}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} D_n(s) f(s)\, ds, \qquad f \in L_2(\mathbb{T}),$$

e calcolatene la norma come elementi del duale di $L_2(\mathbb{T})$.