Università degli Studi di Parma
Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2021–2022)

ANALISI MATEMATICA 3 – ESERCIZI

5. Spazi $C_0(X)$ e L_p

Esercizio 1. Provate che il duale $(C_0(\mathbb{R}))^*$ di $C_0(\mathbb{R})$ non si identifica con $L_1(\mathbb{R})$: esiste un funzionale lineare limitato $L \in [C_0(\mathbb{R})]^*$ che non è della forma

$$L\varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi f, \qquad \varphi \in C_0(\mathbb{R}),$$

per alcuna funzione $f \in L_1(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Siano $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva e $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{S}-$misurabile con $\|f\|_\infty > 0$ e siano

$$\varphi(p) = \|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu, \qquad p > 0, \qquad \text{e} \qquad I = \{p > 0 : \varphi(p) < +\infty\}.$$

Provate che

(a) I è un intervallo: se $r, s \in I$ e $0 < r < p < s$ risulta $p \in I$;
(b) $\log \varphi$ è convessa in I e φ è continua in I;
(c) I può essere un qualunque intervallo I di $(0, +\infty)$;
(d) se $\|f\|_r < +\infty$ per qualche $0 < r < +\infty$, risulta $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Esercizio 3. Sia $L([0, 1])$ lo spazio vettoriale delle (classi di equivalenza di) funzioni misurabili $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$. Provate che non esiste alcuna topologia $\mathcal{T}$ su $L([0, 1])$ che induce la convergenza quasi ovunque in $[0, 1]$.

Esercizio 4. Sia I un insieme (non vuoto) e siano $1 \le p \le q \le +\infty$. Provate che risulta

(a) $\ell_p(I) \subset \ell_q(I)$;
(b) $\|x\|_q \le \|x\|_p$ per ogni $x \in \ell_q(I)$;

e confrontate con un teorema noto.

Esercizio 5. Sia $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva e siano $1 \le p < q < +\infty$. Provate che

(a) $\inf\{\mu(E) : E \in \mathcal{S} \text{ e } \mu(E) > 0\} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad L_p(\mu) \setminus L_q(\mu) \neq \varnothing$;
(b) $\sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{S} \text{ e } \mu(E) < +\infty\} = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad L_q(\mu) \setminus L_p(\mu) \neq \varnothing$;

Esercizio 6. Provate che $L_2([0, 1])$ è di prima categoria in $L_1([0, 1])$. Vale lo stesso anche per $L_q([0, 1])$ e $L_p([0, 1])$ con $p < q$?

Esercizio 7. Sia $U \subset \mathbb{R}^N$ aperto. Provate che $L_\infty(U)$ non è separabile.

Esercizio 8. Sia $K \subset \ell_p$ $(1 \le p < +\infty)$ un insieme chiuso. Provate che K è compatto se e solo se

- per ogni $n \geq 1$ si ha $\sup\{|x_n| : x = \{x_n\}_n \in K\} < +\infty$;
- $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \sup\left\{\sum_{m\geq n} |x_m|^p : x = \{x_m\}_m \in K\right\} = 0.$

Esercizio 9. Provate che il duale $[L_\infty(\mathbb{R})]^*$ di $L_\infty(\mathbb{R})$ non si identifica con $L_1(\mathbb{R})$: esiste un funzionale lineare limitato $L \in [L_\infty(\mathbb{R})]^*$]che non è della forma

$$Lf = \int_{\mathbb{R}} fg, \qquad f \in L_\infty(\mathbb{R}),$$

per alcuna funzione $g \in L_1(\mathbb{R})$. Vale lo stesso anche per ℓ_∞?

Esercizio 10. Siano $1 \leq p, q \leq +\infty$ esponenti coniugati e siano $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L_q(\mathbb{R}^N)$ due funzioni. Provate che

(a) la convoluzione $f * g$ è ben definita da

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$;

(b) $f * g$ è limitata e uniformemente continua in $\mathbb{R}$ e si ha

$$\|f * g\|_u \leq \|f\|_p \|g\|_q;$$

(c) se $1 < p, q < +\infty$ si ha $f * g \in C_0(\mathbb{R}^N)$.

Suggerimenti

Esercizio 1. Sia $L\varphi = \varphi(0)$ per ogni $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ e, supposto per assurdo che sia

$$L\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi f, \qquad \varphi \in C_0(\mathbb{R}),$$

per qualche funzione $f \in L_1(\mathbb{R})$, usate il teorema di Lusin (o meglio le sue conseguenze) per concludere che dovrebbe essere $f = 0$.

Esercizio 2.

(a) Scrivete p nella forma $p = \lambda s + (1-\lambda)r$ e usate la disuguaglianza di Hölder.

(b) Ogni funzione convessa è continua nei punti interni (noto da Analisi 1). Restano gli estremi (se appartengono a I) ...

(c) Pensate ad integrali generalizzati sugli intervalli $(0,1)$ e $(1,+\infty)$ ...

(d) Considerate $|f|/t$ con $0 < t < \|f\|_\infty$ e poi con $t > \|f\|_\infty$.

Esercizio 3. Se fosse vero, ogni successione convergente in $L_1([0,1])$ convergerebbe quasi ovunque.

Esercizio 4. Ancora Hölder ...

Esercizio 5. Provate che esistono insiemi $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ disgiunti tali che

- $0 < \mu(E_n) < 1/2^n$ per ogni n se vale (a);
- $1 \leq \mu(E_n) < +\infty$ per ogni n se vale (b);

e quindi, a seconda del caso, definite u ponendo ...

Esercizio 6. Completate le due dimostrazioni seguenti.
1) Considerate gli insiemi

$$F_n = \left\{ u \in L_1([0,1]) : \int_0^1 |u|^2 \leq n \right\}, \qquad n \geq 1.$$

2) Determinate $\alpha > 0$ in modo che per la successione di funzioni $u_n(t) = n^\alpha 1_{(0,1/n]}(t)$, $t \in [0,1]$ si abbia

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u_n^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u_n v = 0 \qquad \forall\, v \in L_2([0,1])$$

e usate un teorema noto.

Esercizio 7. Costruite una famiglia non numerabile di aperti disgiunti.

Esercizio 8. Usate la caratterizzazione degli insiemi compatti in spazi di Banach.

Esercizio 9. Considerate il sottospazio di $L_\infty(\mathbb{R})$ formato dalle funzioni $\varphi \in C(\mathbb{R})$ che hanno limite finito e uguale a $\pm\infty$ (o varianti). Costruite un funzionale lineare limitato, usate Hahn–Banach e ragionate come in Esercizio 1.

Esercizio 10. Si ha evidentemente $f * g = g * f$ e quindi in (b) e (c) potete supporre che sia $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < +\infty$. Per le proprietà delle traslazioni in $L_p(\mathbb{R}^N)$ e per la densità di $C_c(\mathbb{R})$ in $L_p(\mathbb{R}^N)$ ...