APPUNTI DI ANALISI MATEMATICA 3

Pietro Celada

Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche
Università degli Studi di Parma

A.A. 2021–2022

FUNZIONI SOMMABILI

Serie e funzioni sommabili

Serie incondizionatamente convergenti

- $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{K}$ successione $(\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}; \mathbb{C}\})$
- $\sum_{n\geq 1}' a_n = \{S_n\}_{n\geq 1}$ ove $\begin{cases} S_1 = a_1 \\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \quad n \geq 1 \end{cases}$ serie associata a $\{a_n\}_{n\geq 1}$
- $\exists\, s \in \mathbb{K} : \lim_{n\to+\infty} S_n = s \Rightarrow \sum_{n\geq 1}' a_n$ converge e $\sum_{n\geq 1}' a_n = s$
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 1}' a_n$ diverge a $\pm\infty$ e $\sum_{n\geq 1}' a_n = \pm\infty$
- $\nexists$ limite di $\{S_n\}_{n\geq 1} \Rightarrow \sum_{n\geq 1}' a_n$ irregolare

Proprieta': Sia $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{K}$ una successione. Allora

a) $\sum_{n\geq 1}' a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$;

b) $\sum_{n\geq 1}' a_n$ converge $\Leftrightarrow \underbrace{\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1 : \left[n \geq m \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{m\leq i\leq n}' a_i \right| \leq \varepsilon \right]}_{\text{condizione di Cauchy}}$

c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $a_n \geq 0\ \forall n \Rightarrow \sum_{n\geq 1}' a_n$ converge o diverge a $+\infty$.

- Siano $\{a_n\}_{n\geq 1}, \{b_n\}_{n\geq 1}$ successioni. La serie $\sum_{n\geq 1}' b_n$ e' un riarrangiamento della serie $\sum_{n\geq 1}' a_n$ se risulta

$$b_n = a_{\sigma(n)}, \quad n \geq 1,$$

per qualche $\sigma : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ biettiva (permutazione)

- Sia $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una successione. La serie $\sum_{n\geq 1}' a_n$
  - converge incondizionatamente se ogni suo riarrangiamento $\sum_{n\geq 1}' a_{z(n)}$ ($z: \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ biettiva) converge;
  - converge assolutamente se la serie $\sum_{n\geq 1}' |a_n|$ converge.

Teorema: Sia $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una successione. Allora,

$$\sum_{n\geq 1}' |a_n| \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n\geq 1}' a_n \text{ converge}$$

e si ha $\left|\sum_{n\geq 1}' a_n\right| \leq \sum_{n\geq 1}' |a_n|$.

Oss. Il viceversa e' in genere falso! ▨

Teorema (B. Riemann - U. Dini): Sia $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una successione reale tale che

- $\sum_{n\geq 1}' a_n$ converge
- $\sum_{n\geq 1}' |a_n|$ diverge a $+\infty$

e siano $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$. Allora, $\exists$ un riarrangiamento $b_n = a_{z(n)}$ $n \geq 1$ ($z: \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ biettiva) t.c.

$$\liminf_{n\to+\infty} \sum_{1\leq m\leq n}' b_m = \alpha \leq \beta = \limsup_{n\to+\infty} \sum_{1\leq m\leq n}' b_m .$$

$$\boxed{\text{e in tal caso si ha } \sum_{n\geq 1}{}' a_n = \lim_{F \text{ finito}} \sum_{n\in F}{}' a_n .}$$

Teorema: Sia $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{K}$ una successione. Sono equivalenti

a) $\sum_{n\geq 1}{}' a_n$ converge incondizionatamente;

b) $\sum_{n\geq 1}{}' a_n$ converge assolutamente;

c) $\exists \lim_{F \text{ finito}} \sum_{n\in F}{}' a_n \in \mathbb{K}$ (*).

Oss. (*) significa: $\exists\, s \in \mathbb{K}$ con la seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists F_\varepsilon \subset \mathbb{N}_+ \text{ finito}: \begin{cases} F \subset \mathbb{N}_+ \text{ finito} \\ F_\varepsilon \subset F \end{cases} \Rightarrow \left| \sum_{n\in F}{}' a_n - s \right| \leq \varepsilon$$

Dim. Sia $a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \geq 1$ (caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ analogo)

(a) $\Rightarrow$ (b) teorema di Riemann-Dini

(b) $\Rightarrow$ (c)

- $0 \leq a_n^{\pm} \leq |a_n|$ $\forall n$ $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1}{}' a_n^{\pm}$ convergono
- $s^{\pm} = \sum_{n\geq 1}{}' a_n^{\pm}$ e $s = s^+ - s^- \in \mathbb{R}$
- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 1 : \left[n \geq n_0 \Rightarrow s^{\pm} - \varepsilon/2 \leq \sum_{1\leq m \leq n}{}' a_m^{\pm} \leq s^{\pm} \right]$
- $F_\varepsilon = \{1, \dots, n_0\}$
- $\begin{cases} F \subset \mathbb{N}_+ \text{ finito} \\ F_\varepsilon \subset F \end{cases} \Rightarrow \left| \sum_{m\in F}{}' a_m - s \right| \leq \left(s^+ - \sum_{m\in F}{}' a_m^+ \right) + \left(s^- - \sum_{m\in F}{}' a_m^- \right) \leq$

$$\leq \left(s^+ - \sum_{1\leq m\leq n_0}{}' a_m^+ \right) + \left(s^- - \sum_{1\leq m\leq n_0}{}' a_m^- \right) \leq$$

$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(c) $\Rightarrow$ (a)

- $s \in \mathbb{K}$: $\lim\limits_{F \text{ finito}} \sum\limits_{n\in F}' a_n = s$
- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, F_\varepsilon \subset \mathbb{N}_+$ finito : $\begin{cases} F \subset \mathbb{N}_+ \text{ finito} \\ F_\varepsilon \subset F \end{cases} \Rightarrow \left| \sum\limits_{n\in F}' a_n - s \right| \le \varepsilon$
- $\tau : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ biettiva e $b_k = a_{\tau(k)}$, $k \ge 1$
- $\exists\, k_0 = k_0(\varepsilon) \ge 1$: $F_\varepsilon \subset \tau(\{1,\dots,k_0\})$ $\left(k_0 = \max \tau^{-1}(F_\varepsilon) \right)$
- $k \ge k_0$ e $F = \tau(\{1,\dots,k\}) \Rightarrow F \subset \mathbb{N}_+$ finito e $F_\varepsilon \subset F$
- $k \ge k_0 \Rightarrow \left| \sum\limits_{1\le h\le k}' b_h - s \right| = \left| \sum\limits_{1\le h\le k}' a_{\tau(h)} - s \right| = \left| \sum\limits_{n\in F}' a_n - s \right| \le \varepsilon$ ▨

<u>Corollario</u>: Sia $\{a_n\}_{n\ge 1} \subset \mathbb{K}$ una successione t.c. la serie $\sum\limits_{n\ge 1}' a_n$ converge incondizionatamente e sia $\sum\limits_{n\ge 1}' b_n$ un suo riarrangiamento. Allora,

$$\sum_{n\ge 1}{}' b_n = \sum_{n\ge 1}{}' a_n .$$

<u>Proposizione</u>: Sia $\{a_n\}_{n\ge 1} \subset \mathbb{R}$ una successione t.c. $a_n \ge 0$ $\forall n \ge 1$. Allora,

$$\sum_{n\ge 1}{}' a_n = \sup\left\{ \sum_{n\in F}{}' a_n : F \subset \mathbb{N}_+ \text{ finito} \right\} \in [0,+\infty].$$

<u>Dim</u>. . . . . . . ▨

<u>Oss</u>. $a_n \geq 0\ \forall n$ e $b_n = a_{\sigma(n)}\ \forall n$ riarrangiamento

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n\geq 1}^{+} b_n = \sum_{n\geq 1}^{+} a_n \quad \text{(teorema di Dirichlet)}$$

Funzioni sommabili

- X insieme (non vuoto) e $f: X \to [0,+\infty]$
- somma (non ordinata) di f in $A \subset X$ (non vuoto)

$$\sum_{x\in A}{}' f(x) = \sup\left\{ \sum_{x\in F}{}' f(x) : F \subset A \text{ finito} \right\} \in [0,+\infty]$$

Proprietà: Siano $f, g : X \to [0,+\infty]$ e $A, B \subset X$ (non vu

Allora

a) $\begin{cases} \sum'_{x\in A} (f+g)(x) = \sum'_{x\in A} f(x) + \sum'_{x\in A} g(x) \\ \sum'_{x\in A} (cf)(x) = c \sum'_{x\in A} f(x), \quad c \geq 0; \end{cases}$ $\quad (0\cdot\infty = 0!)$

b) $f(x) \leq g(x) \;\; \forall x \in A \;\Rightarrow\; \sum'_{x\in A} f(x) \leq \sum'_{x\in A} g(x);$

c) $A \subset B \;\Rightarrow\; \sum'_{x\in A} f(x) \leq \sum'_{x\in B} f(x);$

d) $A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \sum'_{x\in A\cup B} f(x) = \sum'_{x\in A} f(x) + \sum'_{x\in B} f(x).$

Oss. $X = \mathbb{N}_+ \quad f(n) = a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$

$$\sum_{n\geq 1} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{1\leq m\leq n} a_m \qquad \text{serie (analisi 1)}$$

$$\sum_{n}{}' a_n = \sup\left\{ \sum_{n\in F}{}' a_n : F \subset \mathbb{N}_+ \text{ finito} \right\} \qquad \text{somma (non ordinata)}$$

Si ha $\sum' a_n = \sum a_n$.

Teorema ("Fubinito"): Siano

- X, Y insiemi (non vuoti);
- $f : X \times Y \longrightarrow [0, +\infty]$.

Allora,

$$\sum_{(x,y)\in X\times Y}' f(x,y) = \sum_{x\in X}' \left(\sum_{y\in Y}' f(x,y) \right) = \sum_{y\in Y}' \left(\sum_{x\in X}' f(x,y) \right)$$

Notazioni: $\quad A \subset X \times Y$

$$A_x = \{ y \in Y : (x,y) \in A \} \quad x \in X$$

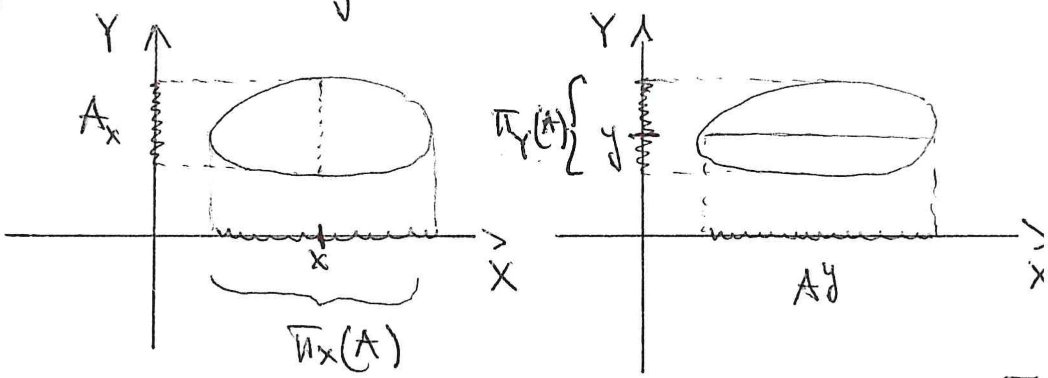
$$A^y = \{ x \in X : (x,y) \in A \} \quad y \in Y$$

sezioni di A

$$\pi_X(A) = \{ x \in X : A_x \neq \phi \}$$

$$\pi_Y(A) = \{ y \in Y : A^y \neq \phi \}$$

proiezioni di A



∎

Dim. ($\le$)

- $F \subset X \times Y$ finito $\Rightarrow \begin{cases} \Pi_X(F), \Pi_Y(F) \text{ finiti} \\ F_x, F^y \text{ finiti } \forall x \in \Pi_X(F), y \in \Pi_Y(F) \end{cases}$

Si ha $\displaystyle\sum'_{(x,y)\in F} f(x,y) = \sum'_{x\in \Pi_X(F)} \Big(\sum'_{y \in F_x} f(x,y)\Big) \le$

$$\le \sum'_{x\in \Pi_X(F)} \Big(\sum'_{y \in Y} f(x,y)\Big) \le$$

$$\le \sum'_{x\in X} \Big(\sum'_{y \in Y} f(x,y)\Big)$$

Quindi, passando all'estremo superiore al variare di $F \subset X \times Y$ finito si ha

$$\sum'_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y) \le \sum'_{x\in X} \Big(\sum'_{y \in Y} f(x,y)\Big).$$

($\ge$) Sia $\displaystyle\sum'_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y) < +\infty$.

- $\displaystyle\sum'_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y) < +\infty \Rightarrow \sum'_{y\in Y} f(x,y) < +\infty \quad \forall x \in X$

($G \subset Y$ finito $\Rightarrow \{x\} \times G \subset X \times Y$ finito)

Analogamente $\displaystyle\sum'_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y) < +\infty \Rightarrow \sum'_{x\in F} \Big(\sum'_{y \in Y} f(x,y)\Big) < +\infty \quad \forall F \subset X$ finito

- $F \subset X$ finito $\Rightarrow F = \{x_1, \dots, x_n\}$ (distinti!)
- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \forall m = 1, \dots, n \ \exists G_m \subset Y$ finito t.c.

$$\sum'_{y\in Y} f(x_m,y) - \varepsilon/n \le \sum'_{y\in G_m} f(x_m,y)$$

- $A = \{(x_m, y) : y \in G_m \text{ e } m = 1, \dots, n\} \subset X \times Y$ finito

Si ha $\displaystyle \sum_{x\in F}{}' \Big(\sum_{y\in Y}{}' f(x,y) \Big) - \varepsilon = \sum_{1\le m\le n}{}' \Big(\sum_{y\in Y}{}' f(x_m, y) - \varepsilon/n \Big) \le$

$$\le \sum_{1\le m\le n}{}' \Big(\sum_{y\in G_m}{}' f(x_m,y) \Big) =$$

$$= \sum_{(x,y)\in A}{}' f(x,y) \le \sum_{(x,y)\in X\times Y}{}' f(x,y)$$

Quindi, passando all'estremo superiore al variare di $F \subset X$ finito si ha

$$\sum_{x\in X}{}' \Big(\sum_{y\in Y}{}' f(x,y) \Big) = \sum_{(x,y)\in X\times Y}{}' f(x,y).$$

L'altra uguaglianza e' analoga. ▨

Oss. $X = Y = \mathbb{N}_+ \quad f(m,n) = a_{m,n} \ge 0 \quad \forall\, m,n \ge 1$

$$\sum_{m,n}{}' a_{m,n} = \sum_{n\ge 1}{}' \Big(\sum_{m\ge 1}{}' a_{m,n} \Big) = \sum_{m\ge 1}{}' \Big(\sum_{n\ge 1}{}' a_{m,n} \Big).$$ ▨

- $f : X \to \mathbb{R}_\infty \Rightarrow f^\pm : X \to [0,+\infty] : \begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases}$

- $A \subset X$ (non vuoto) e $\min\left\{ \sum'_{x\in A} f^+(x) ; \sum'_{x\in A} f^-(x) \right\} < +\infty$

$$\Downarrow$$

somma (non ordinata) di f in $A \subset X$ (non vuoto)

$$\sum'_{x\in A} f(x) = \sum'_{x\in A} f^+(x) - \sum'_{x\in A} f^-(x) \in \mathbb{R}_\infty$$

Def. Una funzione $f : X \to \mathbb{K}$ tale che

$$\sum'_{x\in X} |f(x)| < +\infty$$

si dice sommabile in X. ▨

Oss.

- $f : X \to \mathbb{R} \Rightarrow 0 \le f^\pm \le |f| = f^+ + f^-$

  f sommabile $\Leftrightarrow$ $f^\pm$ sommabili

  In tal caso si ha

  $$\sum'_{x\in A} f(x) = \sum'_{x\in A} f^+(x) - \sum'_{x\in A} f^-(x) \in \mathbb{R} \qquad A \subset X \text{ (non vuoto)}$$

- $f : X \to \mathbb{C} \Rightarrow f = u + iv$ con $u, v : X \to \mathbb{R}$ e

  $$0 \le |u|, |v| \le |f| \le |u| + |v|$$

  f sommabile $\Leftrightarrow$ u, v sommabili

In tale caso si pone

$$\sum_{x\in A}' f(x) = \sum_{x\in A}' u(x) + i \sum_{x\in A}' v(x) =$$

$$= \left(\sum_{x\in A}' u^+(x) - \sum_{x\in A}' u^-(x) \right) + i \left(\sum_{x\in A}' v^+(x) - \sum_{x\in A}' v^-(x) \right) \in \mathbb{C}$$

per ogni $A \subset X$ (non vuoto)

Quindi, se $f: X \to \mathbb{K}$ e' sommabile, e' ben definita la somma (non ordinata) di f in A

$$\sum_{x\in A}' f(x) \in \mathbb{K}, \qquad A \subset X \text{ (non vuoto)}.$$

Proprieta': Siano $f, g: X \to \mathbb{K}$ sommabili e $A, B \subset X$ (non vuoti). Allora,

a) $\displaystyle \sum_{x\in A}' (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \sum_{x\in A}' f(x) + \mu \sum_{x\in A}' g(x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K};$

c) $\displaystyle A \cap B = \phi \Rightarrow \sum_{x\in A\cup B}' f(x) = \sum_{x\in A}' f(x) + \sum_{x\in B}' f(x);$

d) $\displaystyle \left| \sum_{x\in A}' f(x) \right| \leq \sum_{x\in A}' |f(x)|.$

b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in A$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{x\in A}' f(x) \leq \sum_{x\in A}' g(x)$$

Oss. $X = \mathbb{N}_+ \quad f(n) = a_n \in \mathbb{K} \quad \forall n \geq 1$

$\{a_n\}_n$ sommabile $\Leftrightarrow \displaystyle \sum_{n\geq 1}' a_n$ converge assolut.

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$! analogo per $\mathbb{C}$

e in tal caso si ha $\downarrow$

$$\sum_n{}' a_n = \sum_n{}' a_n^+ - \sum_n{}' a_n^- = \sum_{n\geq 1}{}' a_n^+ - \sum_{n\geq 1}{}' a_n^- = \sum_{n\geq 1}{}' a_n \qquad \blacksquare$$

<u>Teorema</u>: Sia $f: X \longrightarrow \mathbb{K}$ sommabile. Allora, l'insieme

$$\{x\in X : f(x)\neq 0\}$$

e' (al più) numerabile.

<u>Dim</u>.

- $\varepsilon>0$ e $F\subset\{|f|\geq\varepsilon\}$ finito $\Rightarrow$ $\varepsilon \operatorname{card}(F) \leq \sum_{x\in F}{}' |f(x)| \leq$
$$\leq \sum_{x\in X}{}' |f(x)|$$
- $\varepsilon>0$ e $F\subset\{|f|\geq\varepsilon\}$ finito $\Rightarrow$ $\operatorname{card}(F)\leq \frac{1}{\varepsilon}\sum_{x\in X}{}' |f(x)|$
- $\varepsilon>0 \Rightarrow \{|f|\geq\varepsilon\}$ finito
- $\{f\neq 0\} = \bigcup_{n\geq 1}\{|f|\geq 1/n\}$. $\blacksquare$

Teorema: Sia $f: X \to \mathbb{K}$. Sono equivalenti

a) f sommabile;

b) $\exists \lim_{F \text{ finito}} \sum'_{x \in F} f(x) \in \mathbb{K}$ (**);

e in tal caso si ha

$$\sum'_{x \in X} f(x) = \lim_{F \text{ finito}} \sum'_{x \in F} f(x).$$

Oss. (**) significa: $\exists\, s \in \mathbb{K}$ con la seguente proprietà

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists F_\varepsilon \subset X \text{ finito}: \begin{cases} F \subset X \text{ finito} \\ F_\varepsilon \subset F \end{cases} \Rightarrow \left| \sum'_{x \in F} f(x) - s \right| \le \varepsilon$$

Dim. Sia $f: X \to \mathbb{R}$ (caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, analogo).

(a) $\Rightarrow$ (b) $\boxed{\text{e } S = \sum'_{x \in X} f(x) \in \mathbb{K}}$ $\boxed{\text{e } S = S^+ - S^-}$

- f sommabile $\Rightarrow f^\pm$ sommabili $\Rightarrow S^\pm = \sum'_{x \in X} f^\pm(x)$
- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists F_\pm \subset X$ finiti: $\begin{cases} F \subset X \text{ finito} \\ F_\pm \subset F \end{cases} \Rightarrow S^\pm - \varepsilon/2 \le \sum'_{x \in F} f^\pm(x) \le S^\pm$
- $F_\varepsilon = F_+ \cup F_-$ finito
- $\begin{cases} F \subset X \text{ finito} \\ F_\varepsilon \subset F \end{cases} \Rightarrow \left| \sum'_{x \in F} f(x) - S \right| \le \left(S^+ - \sum'_{x \in F} f^+(x)\right) + \left(S^- - \sum'_{x \in F} f^-(x)\right) \le$

$$\le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

(b) $\Rightarrow$ (a)

- $S \in \mathbb{K}$: $\displaystyle S = \lim_{F \text{ finito}} \sum_{x \in F}' f(x)$
- $\exists\, F_1 \subset X$ finito : $\begin{cases} F \subset X \text{ finito} \\ F_1 \subset F \end{cases} \Rightarrow \left| \displaystyle\sum_{x \in F}' f(x) \right| \leq |S| + 1$
- $\displaystyle M = \sum_{x \in F_1}' |f(x)|$
- P.A. f non sommabile $\Rightarrow$ $\max\left\{ \displaystyle\sum_{x \in X}' f^+(x), \sum_{x \in X}' f^-(x) \right\} = +\infty$
- sia ad esempio $\displaystyle\sum_{x \in X}' f^+(x) = +\infty$.
- $\displaystyle\sum_{x \in X}' f^+(x) = +\infty \Rightarrow \exists\, F_+ \subset \{f^+ > 0\}$ finito: $\displaystyle\sum_{x \in F_+}' f^+(x) > M + |S| + 1$
- $F = F_1 \cup F_+$ finito t.c. $F_1 \subset F$

Si ha quindi

$$|S| + 1 \geq \left| \sum_{x \in F}' f(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{x \in F_+}' f(x) + \sum_{x \in F_1 \setminus F_+}' f(x) \right| \geq$$

$$\geq \left| \sum_{x \in F_+}' f(x) \right| - \sum_{x \in F_1 \setminus F_+}' |f(x)| =$$

$$= \sum_{x \in F_+}' f^+(x) - \sum_{x \in F_1 \setminus F_+}' |f(x)| \geq$$

$$> M + |S| + 1 - M = |S| + 1 \quad \text{assurdo!} \ \blacksquare$$

Teorema ("Fubinito"): Siano

- X, Y insiemi (non vuoti);
- $f : X \times Y \to \mathbb{K}$ sommabile.

Allora,

a) $y \in Y \mapsto f(x,y)$ è sommabile in Y $\forall x \in X$;

b) $x \in X \mapsto \sum'_{y \in Y} f(x,y)$ è sommabile in X e si ha

$$\sum'_{(x,y) \in X \times Y} f(x,y) = \sum'_{x \in X} \left(\sum'_{y \in Y} f(x,y) \right).$$

Oss. Lo stesso vale con X e Y scambiati! ▨

Dim. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ (caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ analogo)

- $F \subset Y$ finito e $x \in X \Rightarrow \{x\} \times F$ finito $\Rightarrow \sum'_{y \in F} |f(x,y)| \leq \sum'_{(x,y) \in X \times Y} |f(x,y)|$
- $\sum'_{y \in Y} |f(x,y)| \leq \sum'_{(x,y) \in X \times Y} |f(x,y)| < +\infty$ $\forall x \in X$ $\Rightarrow$ vale (a)
- $\sum'_{x \in X} \left| \sum'_{y \in Y} f(x,y) \right| \leq \sum'_{x \in X} \left(\sum'_{y \in Y} |f(x,y)| \right) \overset{\text{Fubinito} \geq 0}{=} \sum'_{(x,y) \in X \times Y} |f(x,y)| < +\infty$

Quindi $x \in X \mapsto \sum'_{y \in Y} f(x,y)$ è sommabile in X

$$\sum'_{(x,y) \in X \times Y} f(x,y) = \sum'_{(x,y) \in X \times Y} f^+(x,y) - \sum'_{(x,y) \in X \times Y} f^-(x,y) =$$

$$= \sum'_{x \in X} \left(\sum'_{y \in Y} f^+(x,y) \right) - \sum'_{x \in X} \left(\sum'_{y \in Y} f^-(x,y) \right) = \sum'_{x \in X} \left(\sum'_{y \in Y} f(x,y) \right).$$

▨

MISURA E INTEGRAZIONE

σ-algebre e misure

Algebre e σ-algebre

X insieme (non vuoto)

Def. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ algebra di insiemi di X se

- $X \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

$\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra di insiemi di X se

- $X \in \mathcal{S}$
- $E \in \mathcal{S} \Leftrightarrow E^c \in \mathcal{S}$
- $E_n \in \mathcal{S}$ $n \geq 1$ $\Rightarrow$ $\bigcup_n E_n \in \mathcal{S}$

Oss.
- $E \in \mathcal{S}$ insieme $\mathcal{S}$-misurabile
- $\mathcal{S}$ σ-algebra $\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ algebra
- $\emptyset \in \mathcal{S}$!

$\blacksquare$

Proposizione: $\mathcal{S}$ σ-algebra di X. Allora,

a) $E, F \in \mathcal{S} \Rightarrow E \cup F,\ E \cap F,\ E \setminus F,\ E \Delta F \in \mathcal{S}$;

b) $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{S} \Rightarrow \begin{cases} E_1 \cup \dots \cup E_n \in \mathcal{S} \\ E_1 \cap \dots \cap E_n \in \mathcal{S} \end{cases}$;

c) $E_n \in \mathcal{S}\ \ n \geq 1 \Rightarrow \bigcap_n E_n \in \mathcal{S}$.

Dim.

a) $\cdot \begin{cases} E_1 = E \\ E_2 = F \\ E_n = \emptyset \quad n \geq 3 \end{cases} \Rightarrow E \cup F = \bigcup_n E_n \in \mathcal{S}$.

- $E \cap F = (E^c \cup F^c)^c \in \mathcal{S}$.
- $E \setminus F = E \cap F^c \in \mathcal{S}$. $\cdot$ $E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) \in \mathcal{S}$.

b) come (a)!

c) $\bigcap_n E_n = \left(\bigcup_n E_n^c \right)^c$. ■

Oss (a) e (b) valgono anche per le algebre di insiemi. ■

Esempi:

- $\mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$ e $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$;

σ-algebra degli insiemi numerabili o conumerabili

- X non numerabile $\mathcal{S} = \{E : E \text{ o } E^c \text{ (al più) numerabile}$
- X numerabile $\mathcal{A} = \{A : A \text{ o } A^c \text{ finito}\}$

$\mathcal{A}$ algebra ma non σ-algebra

- σ-algebra generata da $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}$ collezione (non vuota) di insiemi di X

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{S} : \mathcal{S} \ \sigma\text{-algebra e } \mathcal{C} \subset \mathcal{S} \}$$

$\sigma(\mathcal{C})$ e' la più piccola σ-algebra che contiene tutti gli insiemi di $\mathcal{C}$.

- σ-algebra di Borel di X

(X, τ) sp. topologico

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau)$$

$B \in \mathcal{B}(X)$ insieme di Borel di X

$\mathcal{B}(X)$ e' la più piccola σ-algebra che contiene tutti gli aperti (chiusi) di X. ∎

Classe di Dynkin

Def. $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ *classe di Dynkin di X* se

- $X \in \mathcal{D}$
- $D \in \mathcal{D} \Leftrightarrow D^c \in \mathcal{D}$
- $\begin{cases} D_n \in \mathcal{D} \quad n \geq 1 \\ D_m \cap D_n = \emptyset \quad m \neq n \end{cases} \Rightarrow \bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$

Esercizio: trovare una classe di Dynkin che non sia una σ-algebra

Proposizione: Sia $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ t.c.

- $\mathcal{D}$ classe di Dynkin di X
- $E, F \in \mathcal{D} \Rightarrow E \cap F \in \mathcal{D}$.

Allora $\mathcal{D}$ e' una σ-algebra di X.

Dim

- $E, F \in \mathcal{D} \Rightarrow E \setminus F = E \cap F^c \in \mathcal{D}$
- $E_n \in \mathcal{D} \quad n \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} F_1 = E_1 \\ F_n = E_n \setminus (F_1 \cup .. \cup F_n) \quad n \geq 2 \end{cases}$
- $\{F_n\}_n$ disgiunti $\Rightarrow F_1 \cup .. \cup F_n \in \mathcal{D} \ \forall n \Rightarrow F_n \in \mathcal{D} \ \forall$
- $\bigcup_n E_n = \bigcup_n F_n \in \mathcal{D}$. ∎

Misure positive

X insieme (non vuoto)

$\mathcal{S}$ σ-algebra di insiemi di X

Def. $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva su $\mathcal{S}$ se

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\begin{cases} E_n \in \mathcal{S} & n \geq 1 \\ E_m \cap E_n = \emptyset & m \neq n \end{cases} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n \mu(E_n)$.

numerabile additività

Proposizione: $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva su $\mathcal{S}$. Allora,

a) $E, F \in \mathcal{S}$ $E \subset F$ $\Rightarrow$ $\mu(E) \leq \mu(F)$;

b) $E, F \in \mathcal{S}$ con $E \subset F$ e $\mu(E) < +\infty \Rightarrow \mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$;

c) $\begin{cases} E_1, \dots, E_n \in \mathcal{S} \\ E_m \cap E_p = \emptyset & m \neq p \end{cases} \Rightarrow \mu(E_1 \cup \dots \cup E_n) = \mu(E_1) + \dots + \mu(E_n)$;

d) $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{S} \Rightarrow \mu(E_1 \cup \dots \cup E_n) \leq \mu(E_1) + \dots + \mu(E_n)$;

e) $E_n \in \mathcal{S}$ $n \geq 1$ $\Rightarrow$ $\mu\left(\bigcup_n E_n\right) \leq \sum_n \mu(E_n)$;

f) $\begin{cases} E_n \in \mathcal{S} & n \geq 1 \\ E_n \subset E_{n+1} & \forall n \end{cases} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \lim_n \mu(E_n)$;

g) $\begin{cases} E_n \in \mathcal{S} & n \geq 1 \\ E_{n+1} \subset E_n \ \forall n \text{ e } \mu(E_1) < +\infty \end{cases} \Rightarrow \mu\left(\bigcap_n E_n\right) = \lim_n \mu(E_n)$.

Terminologia:

a) monotonia

c) finita additività

d) finita subadditività

e) numerabile subadditività ▨

Dim. Si parte da (c)!

a) $\mu(E) \leq \mu(E) + \mu(F \setminus E) = \mu(F)$.

b) (a) $+ \mu(E) < +\infty \Rightarrow \mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

d) • $n \geq 2$ e $\begin{cases} F_1 = E_1 \\ F_m = E_m \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_{m-1}) & 2 \leq m \leq n \end{cases}$

• $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{S}$ disgiunti e $\begin{cases} E_1 \cup \dots \cup E_n = F_1 \cup \dots \cup F_n \\ F_m \subset E_m \quad m = 1, \dots, n \end{cases}$

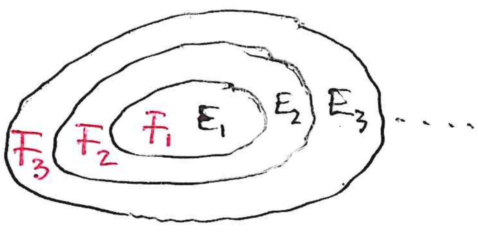
• $\mu(E_1 \cup \dots \cup E_n) = \mu(F_1 \cup \dots \cup F_n) =$

$= \mu(F_1) + \dots + \mu(F_n) \leq \mu(E_1) + \dots + \mu(E_n)$.

e) come (d)!

f) • $E_n \subset E_{n+1} \ \forall n \Rightarrow \{\mu(E_n)\}_n \uparrow \Rightarrow \lim_n \mu(E_n) \in [0, +\infty]$

$\begin{cases} F_1 = E_1 \\ F_n = E_n \setminus E_{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$



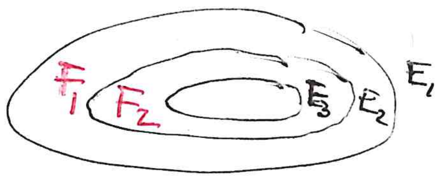
- $F_n \in \mathcal{S}\ \forall n$ disgiunti e $\begin{cases} E_n = F_1 \cup \ldots \cup F_n \ \forall n \\ \bigcup_n E_n = \bigcup_n F_n \end{cases}$

- $\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n{}^{'}_{+} \mu(F_n) = \lim_n \sum_{1 \le m \le n}{}^{'}_{+} \mu(F_m) =$

$$= \lim_n \mu(E_n).$$

g) - $E_{n+1} \subset E_n\ \forall n \Rightarrow \{\mu(E_n)\}_n \downarrow \Rightarrow \lim_n \mu(E_n) \in [0, \mu(E_1$

- $F_n = E_n \setminus E_{n+1} \quad n \geq 1$



- $F_n \in \mathcal{S}\ \forall n$ disgiunti e $\begin{cases} F_1 \cup \ldots \cup F_n = E_1 \setminus E_{n+1} \ \forall n \\ \bigcup_n F_n = E_1 \setminus \left(\bigcap_n E_n\right) \end{cases}$

$$= \mu\left(\bigcup_n F_n\right) \overset{(*)}{=} \mu(E_1) - \mu\left(\bigcap_n E_n\right) \qquad (*)\ \mu(E_1) < +\infty!$$

$$= \sum_n{}^{'}_{+} \mu(F_n) = \lim_n \sum_{1 \le m \le n}{}^{'}_{+} \mu(F_m) =$$

$$= \lim_n \mu(F_1 \cup \ldots \cup F_n) =$$

$$\overset{(*)}{=} \mu(E_1) - \lim_n \mu(E_{n+1}).$$

$\blacksquare$

Terminologia: $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva si dice

- <u>finita</u> se $\mu(X) < +\infty$;
- <u>semifinita</u> se $\forall E \in \mathcal{S}$ con $\mu(E) = +\infty$ $\exists F \in \mathcal{S}$ con
  $F \subset E$ e $0 < \mu(F) < +\infty$;
- <u>σ-finita</u> se $\exists X_n \in \mathcal{S}$ $n \geq 1$ t.c.
  - $X_m \cap X_n = \phi$ $m \neq n$ (*)
  - $X = \bigcup_n X_n$
  - $\mu(X_n) < +\infty$ $\forall n$;
- <u>di Borel in X</u> se (X, τ) e' uno sp. topol. e
  $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{S}$. ■

Oss. • finita $\Rightarrow$ σ-finita $\Rightarrow$ semifinita ($\cancel{\Leftarrow}$ FALSO)

• $X_n \subset X_{n+1}$ $\forall n$ al posto di (*) ■

Esempi:

a) X insieme (non vuoto), $f : X \to [0,+\infty]$

$$\mu(A) = \sum_{x \in A}{}' f(x), \qquad A \subset X$$

$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ misura positiva su $\mathcal{P}(X)$

1. <u>misura del conteggio</u> $\#$:

$$f(x) = 1 \quad \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad \#(A) = \begin{cases} \text{card}(A) & A \text{ finito} \\ +\infty & A \text{ infinito} \end{cases}$$

2. <u>delta di Dirac</u> δ_{x_0} $(x_0 \in X)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases} \Rightarrow \delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & x_0 \notin A \end{cases};$$

3. <u>probabilità p in $\mathbb{N}_+$</u>:

$$X = \mathbb{N}_+ \text{ e } f(n) = \frac{1}{2^n} \quad n \geq 1 \Rightarrow p(A) = \sum_n{}' 1/2^n .$$

b) X non numerabile, $\mathcal{S} = \{E : E \text{ o } E^c \text{ (al più) numer.}\}$

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & E \text{ (al più) numerabile} \\ 1 & E^c \text{ ———————} . \end{cases}$$

↳ oppure $+\infty$!

Oss.

- $X = \mathbb{N}_+$ e $\mu = \#$: misura σ-finita ma non finita
- X non numerabile e $\mu = \#$: misura semifinita ma non σ-fin.
- X non numerabile e μ come in (b) con $+\infty$: misura non semifinita

Esempio: (g) in Prop. — può essere falsa se $\mu(E_1) = +\infty$

$X = \mathbb{N}_+$ e $\mu = \#$

$E_n = \{m : m \geq n\}$ $n \geq 1$ $\Rightarrow \#(E_n) = +\infty$ e $\#(\bigcap_n E_n) = 0$

Insiemi trascurabili

X insieme (non vuoto)

$\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva su $\mathcal{S}$

Def. $T \in \mathcal{S}$ tale che
$$\mu(T) = 0$$
si dice μ-trascurabile. ∎

$$\mathcal{N}(\mu) = \{ T \in \mathcal{S} : \mu(T) = 0 \}$$

Oss. $T_n \in \mathcal{N}(\mu)$ $n \geq 1$ $\Rightarrow$ $\bigcup_n T_n \in \mathcal{N}(\mu)$. ∎

Def. $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ tale che
$$T \in \mathcal{N}(\mu) \text{ e } E \subset T \Rightarrow E \in \mathcal{N}(\mu)$$
si dice completa. ∎

Propos.: Siano $\mu : \mathcal{S} \to [0,+\infty]$ misura positiva
$$\mathcal{S}^* = \{ A : \exists\, E, F \in \mathcal{S} : E \subset A \subset F \text{ e } \mu(F \setminus E) = 0 \}$$
$$\mu^* : \mathcal{S}^* \to [0,+\infty] \quad \mu^*(A) = \mu(E)$$
ove E e' associato ad E come nella definizione di $\mathcal{S}^*$. Allora,

a) $\mathcal{S}^*$ è una σ-algebra di X e $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}^*$;

b) μ^* è ben definita ed è una misura completa t.c. $\mu^* = \mu$ su $\mathcal{S}$.

<u>Oss</u>. Ogni misura positiva può essere completata! ■

<u>Dim</u> . . . . ■

Funzioni misurabili

$(X, \mathcal{S})$ spazio misurabile fissato.

<u>Def.</u> Sia Y uno spazio topologico. Una funzione $f: X \to Y$ t.c.

$$B \in \mathcal{B}(Y) \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$$

si dice $\mathcal{S}$-misurabile. ▨

<u>Oss.</u> Se X è sp. topologico con $\mathcal{S} = \mathcal{B}(X)$ e

$$B \in \mathcal{B}(Y) \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$$

allora f si dice <u>Borel misurabile da X in Y</u> o funzione <u>di Borel da X in Y</u>. ▨

<u>Proposizione</u>: Siano Y sp. topologico e $f: X \to Y$. Sono equivalenti:

a) f è $\mathcal{S}$-misurabile;

b) $V \subset Y$ aperto $\Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{S}$;

c) $F \subset Y$ chiuso $\Rightarrow f^{-1}(F) \in \mathcal{S}$.

<u>Dim.</u>

(b) $\iff$ (c) poiché $[f^{-1}(A)]^c = f^{-1}(A^c)$ $\forall A \subset Y$.

(a) $\Rightarrow$ (b) Ovvio!

(b) $\Rightarrow$ (a)

- $\mathcal{Y}' = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{S}\}$
- $\mathcal{Y}'$ σ-algebra di Y (verifica!)
- $[V \subset Y$ aperto $\Rightarrow V \in \mathcal{Y}'] \Rightarrow \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{Y}' \Rightarrow f$ $\mathcal{S}$-misur. ▨

<u>Oss.</u> X, Y sp. topologici e $f: X \to Y$

f continua $\Rightarrow$ f Borel misurabile ▨

<u>Proposizione</u>: Siano Y, Z sp. topologici e

- $f: X \to Y$ $\mathcal{S}$-misurabile;
- $\phi: Y \to Z$ Borel misurabile.

Allora, $\phi \circ f : X \to Z$ è $\mathcal{S}$-misurabile.

<u>Dim.</u> $B \in \mathcal{B}(Z) \Rightarrow \phi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(Y) \Rightarrow (\phi \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(\phi^{-1}(B)) \in \mathcal{S}$ ▨

<u>Corollario</u>: Siano Y, Z sp. topologici e

- $A \subset Y$ e $\phi : A \to Z$ continua;
- $f: X \to Y$ $\mathcal{S}$-misurabile t.c. $f(x) \in A$ $\forall x \in X$.

Allora, $\phi \circ f : X \to Z$ è $\mathcal{S}$-misurabile.

Dim. $\cdot$ $V \subset Z$ aperto $\Rightarrow \phi^{-1}(V) = A \cap W$ con $W \subset Y$ aperto

$\cdot$ $f(x) \in A \ \forall x \in X \Rightarrow f^{-1}(A \cap W) = f^{-1}(W)$

Quindi si ha $(\phi \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(W) \in \mathcal{S}$. $\blacksquare$

Teorema: Siano

- Y_m $(m = 1, \dots, n)$ sp. topol. a base numerabile di aperti
- $Y = Y_1 \times \dots \times Y_n$ sp. topologico prodotto;
- $\pi_m : Y \longrightarrow Y_m$ $(m = 1, \dots, n)$ proiezioni canoniche;

e sia $f : X \longrightarrow Y$. Sono equivalenti

a) f e' $\mathcal{S}$-misurabile;

b) $f^m : X \to Y_m$ $f^m = \pi_m \circ f$ $(m = 1, \dots, n)$ sono $\mathcal{S}$-misurabili.

Dim. $(a) \Rightarrow (b)$ per proposizione precedente

$(b) \Rightarrow (a)$

- $\mathcal{V}_m$ base numerabile di aperti di Y_m $(m = 1, \dots, n)$
- $\mathcal{W} = \{ W = V_1 \times \dots \times V_n : V_m \in \mathcal{V}_m \ m = 1, \dots, n \}$ base numerabile di aperti di Y
- $W = V_1 \times \dots \times V_n \in \mathcal{W} \Rightarrow f^{-1}(W) = \bigcap_m (f^m)^{-1}(V_m) \in \mathcal{S}$
- $W \subset Y$ aperto $\Rightarrow W = \bigcup_j W_j$ con $W_j \in \mathcal{W} \ \forall j$
- $f^{-1}(W) = \bigcup_j f^{-1}(W_j) \in \mathcal{S} \Rightarrow f$ $\mathcal{S}$-misurabile. $\blacksquare$

<u>Teorema</u>: Sia $f: X \to \mathbb{C}$ con $f = u + iv$ $(u, v: X \to \mathbb{R})$.

Allora,

(*) f $\mathcal{S}$-misurabile $\iff$ u, v $\mathcal{S}$-misurabili.

Inoltre, se $f, g: X \to \mathbb{K}$ sono $\mathcal{S}$-misurabili, si ha

a) $f+g$, λf $(\lambda \in \mathbb{K})$, fg e, se $g(x) \neq 0 \; \forall x$, $1/g$ e f/g sono $\mathcal{S}$-misurabili;

b) f^* e $|f|$ sono $\mathcal{S}$-misurabili.

<u>Dim.</u> (*) segue dal teorema precedente:

$$f \ \mathcal{S}\text{-misurabile} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{topologicamente } \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 !}}{\iff} x \in X \mapsto \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \mathcal{S}\text{-misurabile}$$

$$\Updownarrow$$

$$u, v \ \mathcal{S}\text{-misurabili}$$

a) $\phi \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : X \to \mathbb{K}$ con

- $\phi: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ continua data da

$$\phi(z, w) = z + w \qquad z, w \in \mathbb{K}$$
$$\phi(z, w) = z \cdot w$$

per somma e prodotto

- $\phi: \mathbb{K} \times (\mathbb{K} \setminus \{0\}) \to \mathbb{K}$ continua data da

$$\phi(z, w) = 1/w \qquad z \in \mathbb{K},\ w \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$
$$\phi(z, w) = z/w$$

per reciproco e quoziente.

b) Analogo! ■

Oss.

- $f,g : X \to \mathbb{R}_\infty$ $\mathcal{S}$-misurabili $\Rightarrow \begin{cases} \max\{f,g\}, \min\{f,g\} \\ f^{\pm} \end{cases}$ $\mathcal{S}$-misurabili
- Le affermazioni (a) e (b) (esclusa quella relativa a f^*) valgono anche per $f,g : X \to \mathbb{R}_\infty$ purché $f+g$, fg, $1/g$ e f/g siano definite (no $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$, $[1/0]$, $[0/0]$ e $[\infty/\infty]$) ■

Teorema: Sia $f : X \to \mathbb{R}_\infty$. Sono equivalenti

a) f $\mathcal{S}$-misurabile;

b) $\{f > \alpha\} \in \mathcal{S}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;

c) $f^{-1}(I) \in \mathcal{S}$ $\forall I \subset \mathbb{R}$ intervallo.

Oss.
- $f^{-1}(I) \in \mathcal{S}$ $\forall I \subset \mathbb{R}_\infty$ intv $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(I) \in \mathcal{S}$ $\forall I \subset \mathbb{R}$ intv.
- f $\mathcal{S}$-misurabile $\Rightarrow$ $\{f = c\} \in \mathcal{S}$ $\forall c \in \mathbb{R}_\infty$. ■

Dim.

(a) $\Rightarrow$ (b) Ovvio poiché $(\alpha, +\infty)$ aperto in $\mathbb{R}$, $(\alpha, +\infty]$ aperto in $\mathbb{R}_\infty$.

(b) $\Rightarrow$ (c)

- $\{f > \alpha\} \in \mathcal{S}$ $\forall \alpha \Rightarrow \{f \le \alpha\} \in \mathcal{S}$ $\forall \alpha \Rightarrow \{f < \alpha\} = \bigcup_n \{f \le \alpha - 1/n\} \in \mathcal{S}$ $\forall \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \{f \ge \alpha\}$ $\forall \alpha$

- $I \subset \mathbb{R}_\infty$ intervallo $\Rightarrow$ I intersezione di insiemi del tipo $\{f>\alpha\}, \{f\geq\alpha\}, \{f<\alpha\}, \{f\leq\alpha\}$

- $I \subset \mathbb{R}_\infty$ intervallo $\Rightarrow$ $f^{-1}(I) \in \mathcal{S}$.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Ogni aperto di $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}_\infty$ e' unione numerabile di intervalli $I \subset \mathbb{R}$ o $I \subset \mathbb{R}_\infty$. $\blacksquare$

<u>Teorema</u>: Siano $f_n : X \to \mathbb{R}_\infty$ $(n\geq 1)$ $\mathcal{S}$-misurabili. Allora,

a) $s = \inf_{n\geq 1} f_n$ e $S = \sup_{n\geq 1} f_n$ sono $\mathcal{S}$-misurabili;

b) $l = \liminf_{n\to+\infty} f_n$ e $L = \limsup_{n\to+\infty} f_n$ sono $\mathcal{S}$-misurabili;

e se $\exists\, f : X \to \mathbb{R}_\infty$ t.c. $f_n \to f$ puntualmente in X per $n\to+\infty$ si ha

c) $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ e' $\mathcal{S}$-misurabile.

<u>Oss</u>. (c) vale anche per $f_n : X \to \mathbb{C}$, $(n\geq 1)$! $\blacksquare$

<u>Dim</u>. (a) Si ha

$$\{s<\alpha\} = \bigcup_n \{f_n<\alpha\} \in \mathcal{S} \quad \text{e} \quad \{S>\alpha\} = \bigcup_n \{f_n>\alpha\} \in \mathcal{S}$$

(b) $\liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup_{m\geq 1}\left(\inf_{n\geq m} f_n\right)$ e $\limsup_{n\to+\infty} f_n = \inf_{m\geq 1}\left(\sup_{n\geq m} f_n\right)$

(c) Ovvio! $\blacksquare$

Funzioni semplici

X insieme (non vuoto)

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$ funzione caratteristica di

$s \in \text{span}\{1_A : A \subset X\}$ funzione semplice

$s : X \to \mathbb{K}$ semplice $\iff$ $s = \alpha_1 1_{A_1} + \dots + \alpha_k 1_{A_k}$ $(\alpha_h \in \mathbb{K},\ A_h \subset X\ h = 1, \dots, k)$ (*)

$\iff$ $s(X)$ finito.

Oss. . La scrittura (*) di s non e' unica

. Se

$$s = \alpha_1 1_{A_1} + \dots + \alpha_k 1_{A_k}$$

con $\alpha_{h'} \neq \alpha_{h''}$ per $h' \neq h''$ e $\{A_1, \dots, A_k$ partizione di X, s si dice scritta in forma canonica.

. $(X, \mathcal{S})$ sp. misurabile

s $\mathcal{S}$-misurabile $\Rightarrow$ $s = \alpha_1 1_{E_1} + \dots + \alpha_k 1_{E_k}$ $(\alpha_h \in \mathbb{K},\ E_h \in \mathcal{S}\ h = 1, \dots, k$

$(X, \mathcal{S})$ sp. misurabile

Teorema: Sia $f: X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$-misurabile. Allora, $\exists$ $s_n : X \to [0,+\infty)$ $(n \geq 1)$ semplici e $\mathcal{S}$-misurabili tali che

a) $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ $\forall n \geq 1$ e $\forall x \in X$;

b) $s_n \to f$ puntualmente in X per $n \to +\infty$

Inoltre, se f e' limitata, si ha

c) $s_n \to f$ uniformemente in X per $n \to +\infty$

Dim a)

- $\begin{cases} E_{n,k} = \left\{ \frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n} \right\} & k = 1, \dots, n2^n \\ F_n = \{ f \geq n \} \end{cases}$ $\quad n \geq 1$

- $\{E_{n,1}, \dots, E_{n,n2^n}, F_n\} \subset \mathcal{S}$ partizione di X $\forall$

- $s_n = \sum_{1 \leq k \leq n2^n}' \frac{k-1}{2^n} 1_{E_{n,k}} + n 1_{F_n}$, $\quad n \geq 1$

- proviamo (a)

  caso 1: $0 \leq f(x) < n$

$\exists\, k \in \{1, \dots, n2^n\}: \quad x \in E_{n,k} = E_{n+1, 2k-1} \cup E_{n+1, 2k}$

$$S_{n+1}(x) \geq \frac{(2k-1)-1}{2^{n+1}} = \frac{k-1}{2^n} = S_n(x)$$

<u>caso 2</u>: $\quad n \leq f(x) < n+1$

- $x \in F_n$ e $x \in E_{n+1,k} \quad k \in \{1, \dots, (n+1)2^{n+1}\}$
- P.A. $k \leq n2^{n+1}$

$$f(x) < \frac{k}{2^{n+1}} \leq n \leq f(x) \quad \text{ASSURDO!}$$

- Quindi $k \geq n2^{n+1} + 1$

$$S_{n+1}(x) = \frac{k-1}{2^{n+1}} \geq n = S_n(x)$$

<u>caso 3</u>: $\quad f(x) \geq n+1$

- $x \in F_n$ e $x \in F_{n+1} \Rightarrow S_{n+1}(x) = n+1 \geq n = S_n(x)$.

b) <u>caso 1</u>: $\quad f(x) < +\infty$

$$n \geq f(x) \Rightarrow 0 \leq f(x) - S_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

<u>caso 2</u>: $\quad f(x) = +\infty$

$$x \in F_n \ \forall n \Rightarrow S_n(x) = n \ \forall n.$$

c). $M \geq 0: \quad 0 \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in X$

. come in (b) $0 \leq f(x) - S_n(x) < \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq M \ \forall x \in X$

Corollario: Sia $f: X \to \mathbb{K}$ $\mathcal{S}$-misurabile.
Allora, $\exists\ s_n : X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$
- s_n semplice e $\mathcal{S}$-misurabile $\forall n$;
- $|s_n| \leq |s_{n+1}|$ in X $\forall n$;
- $s_n \to f$ puntualmente in X per $n \to +\infty$.

Oss. In particolare si ha $|s_n| \leq |f|$ in X $\forall n$. ▨

Dim. f reale (caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, analogo)

- $f = f^+ - f^-$ con $f^\pm : X \to [0, +\infty)$ $\mathcal{S}$-misurabili
- $\exists\ r_n, t_n : X \to [0, +\infty)$ t.c.
  - r_n, t_n semplici e $\mathcal{S}$-misurabili $\forall n$;
  - $r_n \leq r_{n+1}$ e $t_n \leq t_{n+1}$ in X $\forall n$;
  - $r_n \to f^+$ e $t_n \to f^-$ puntualmente in X per $n \to +\infty$
- $f^+(x) f^-(x) = 0$ $\forall x \in X$ $\Rightarrow$ $r_n(x) t_n(x) = 0$ $\forall x \in X$ e $\forall n$
- $s_n = r_n - t_n : X \to \mathbb{K}$ t.c.
  - s_n semplici e $\mathcal{S}$-misurabili $\forall n$
  - $\begin{cases} r_n t_n = 0 \\ r_n \leq r_{n+1} \text{ e } t_n \leq t_{n+1} \end{cases}$ in X $\forall n$ $\Rightarrow$ $|s_n| \leq |s_{n+1}|$
  - $s_n = r_n - t_n \to f^+ - f^- = f$ puntualmente in X per $n \to +\infty$

▨

Come modificare una funzione misurabile

$(X, \mathcal{S})$ sp. misurabile fissato.

Proposizione: Siano

- $f_m : X \to \mathbb{K}\ (\mathbb{R}_\infty)$ $(m=1,\dots,n)$ $\mathcal{S}$-misurabili;
- $E_1, \dots, E_n$ partizione $\mathcal{S}$-misurabile di X.

Allora, $f : X \to \mathbb{K}\ (\mathbb{R}_\infty)$ definita da

$$f(x) = f_m(x) \qquad \text{se } x \in E_m$$

e' $\mathcal{S}$-misurabile.

Oss. Lo stesso vale per una successione di funzioni f_n $(n \geq 1)$ e per una partizione $\mathcal{S}$-misurabile E_n $(n \geq 1)$ di X. ▨

Dim. B ins. di Borel di $\mathbb{K}(\mathbb{R}_\infty) \Rightarrow f^{-1}(B) = \bigcup_m f_m^{-1}(B) \cap E_m \in \mathcal{S}$ ▨

Proposizione: Sia $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ una misura positiva completa e siano $f, g : X \to \mathbb{K}(\mathbb{R}_\infty)$ t.c.

$$f = g \quad \mu\text{-quasi ovunque in } X.$$

Allora,

$$f \ \mathcal{S}\text{-misurabile} \iff g \ \mathcal{S}\text{-misurabile}$$

Dim.

- $\{f \neq g\}$ μ-trascurabile
- B ins. di Borel di $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}_\infty$) $\Rightarrow f^{-1}(B) \Delta g^{-1}(B) \subset \{f \neq g\}$
- ———————— $\Rightarrow [f^{-1}(B) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow g^{-1}(B) \in \mathcal{S}]$. ▨

Proposizione: Siano $f, g : X \to \mathbb{R}_\infty$ $\mathcal{S}$-misurabili. Allora, $h : X \to \mathbb{R}_\infty$ definita da

$$h(x) = \begin{cases} f(x)g(x) & x \in X \setminus (\{f=0 \text{ e } g=\pm\infty\} \cup \{f=\pm\infty \text{ e } g=0\}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e' $\mathcal{S}$-misurabile.

Dim.

- $E = \{f=0 \text{ e } g=\pm\infty\} \cup \{f=\pm\infty \text{ e } g=0\} \in \mathcal{S}$
- $\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{in } X \setminus E \\ 0 & \text{in } E \end{cases}$ e $\tilde{g} = \begin{cases} g & \text{in } X \setminus E \\ 0 & \text{in } E \end{cases}$ sono $\mathcal{S}$-misurabili
- $h = \tilde{f}\tilde{g} \Rightarrow h$ $\mathcal{S}$-misurabile. ▨

Convergenza quasi uniforme

- $(X, \mathcal{S}, \mu)$ sp. con misura positiva
- $\begin{cases} f_n : X \to \mathbb{K} \ (n \geq 1) \\ f : X \to \mathbb{K} \end{cases}$ funzioni $\mathcal{S}$-misurabili
- $f_n \to f$ μ-quasiuniformemente in X se

  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists E_\varepsilon \in \mathcal{S}$ t.c.

  - $\mu(X \setminus E_\varepsilon) \leq \varepsilon$;
  - $f_n \to f$ uniformemente in E_ε per $n \to +\infty$.

Teorema (C. Severini - D. Egorov)

Sia $\mu(X) < +\infty$ e siano $f_n : X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ e $f : X \to \mathbb{K}$ funzioni $\mathcal{S}$-misurabili t.c.

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = f \quad \mu\text{-quasi ovunque in } X.$$

Allora, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists E_\varepsilon \in \mathcal{S}$ t.c.

- $\mu(X \setminus E_\varepsilon) \leq \varepsilon$;
- $\lim_{n \to +\infty} f_n = f$ uniformemente in E_ε.

Oss.

- Nella ipotesi del teorema si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f \quad \mu\text{-quasi uniformemente in } X.$$

- FALSO (in genere) se $\mu(X)=+\infty$. $\blacksquare$

Dim. Possiamo supporre che sia

$$(*) \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n = f \quad \text{puntualmente in } X.$$

- $(*) \Rightarrow \bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq m}\left\{|f_n-f|\leq 1/k\right\} = X \quad \forall k\geq 1.$

- $\left\{X\setminus\left(\bigcap_{n\geq m}\left\{|f_n-f|\leq 1/k\right\}\right)\right\}_{m\geq 1}$ successione decrescente t.c

$$\bigcap_{m\geq 1}\left(X\setminus\left(\bigcap_{n\geq m}\left\{|f_n-f|\leq 1/k\right\}\right)\right)=\emptyset$$

- $\mu(X)<+\infty \Rightarrow \exists\, m_k\geq 1 \ (k\geq 1)$ interi t.c.

  - $m_k < m_{k+1}$;
  - $\mu\left(X\setminus\left(\bigcap_{n\geq m_k}\left\{|f_n-f|\leq 1/k\right\}\right)\right)\leq \varepsilon/2^k.$

- $E_\varepsilon = \bigcap_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq m_k}\left\{|f_n-f|\leq 1/k\right\}$

- $E_\varepsilon\in\mathcal{S}$ e $X\setminus E_\varepsilon = \bigcup_{k\geq 1}\left(X\setminus\left(\bigcap_{n\geq m_k}\left\{|f_n-f|\leq 1/k\right\}\right)\right) \Rightarrow \mu(X\setminus E_\varepsilon)\leq$

- $k\geq 1 \Rightarrow \left[\,|f_n(x)-f(x)|\leq 1/k \ \ \forall x\in E_\varepsilon \text{ per } n\geq m_k\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n = f \quad \text{uniformemente in } E_\varepsilon. \quad \blacksquare$$

<u>Corollario</u>: Sia $\mu(X) < +\infty$ e siano $f_n : X \to \mathbb{K}$ ($n \geq$ e $f : X \to \mathbb{K}$ funzioni $\mathcal{S}$-misurabili. Allora,

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = f \ \mu\text{-q.o. in } X \iff \lim_{n \to +\infty} f_n = f \ \mu\text{-q. uniform. in } X.$$

Integrale: funzioni non negative

X insieme (non vuoto)

$\mathcal{S}$ σ-algebra di insiemi di X

$\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ misura positiva su $\mathcal{S}$

$s : X \to [0, +\infty)$ semplice e $\mathcal{S}$-misurabile

$(*)$ $\quad s = \alpha_1 \mathbb{1}_{A_1} + \dots + \alpha_k \mathbb{1}_{A_k} \quad (\alpha_h \geq 0, A_h \in \mathcal{S}\ h = 1, \dots$

$(**)$ $\displaystyle\int_E s\,d\mu = \alpha_1 \mu(E \cap A_1) + \dots + \alpha_k \mu(E \cap A_k) \in [0, +\infty], \quad E \in \mathcal{S}$

$\hookrightarrow$ integrale di s su $E \in \mathcal{S}$ rispetto a μ

Oss. . $0 \cdot \infty = 0$!

. $s, t : X \to [0, +\infty)$ semplici e $\mathcal{S}$-misurabili
$0 \leq s \leq t$ in X $\Rightarrow \int_E s\,d\mu \leq \int_E t\,d\mu \quad \forall E \in \mathcal{S}$ ▨

Lemma: $s : X \to [0, +\infty)$

$$\alpha_1 \mathbb{1}_{A_1} + \dots + \alpha_k \mathbb{1}_{A_k} = s = \beta_1 \mathbb{1}_{B_1} + \dots + \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$$

$(\alpha_h \geq 0\ A_h \in \mathcal{S}\ h = 1, \dots, k$ e $\beta_i \geq 0, B_i \in \mathcal{S}\ i = 1, \dots, j)$

Allora

$$\sum_{1 \leq h \leq k} \alpha_h \mu(E \cap A_h) = \sum_{1 \leq i \leq j} \beta_i \mu(E \cap B_i), \quad E \in \mathcal{S}$$

Def. Sia $f: X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$-misurabile.

(***) $\int_E f \, d\mu = \sup\{ \int_E s \, d\mu : s$ semplice, $\mathcal{S}$-mis. e $0 \le s \le f \} \in [0,+\infty]$

↳ integrale di f su $E \in \mathcal{S}$ rispetto a μ ■

Oss. (**) e (***) coincidono per $s: X \to [0,+\infty)$ semplice e $\mathcal{S}$-misur. !

Proposizione: $f, g: X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$-misurabili, $E, F \in \mathcal{S}$

Allora

a) $\int_E f \, d\mu = \int_X f \mathbb{1}_E \, d\mu$;

b) $f \le g$ in $E \Rightarrow \int_E f \, d\mu \le \int_E g \, d\mu$;

c) $E \subset F \Rightarrow \int_E f \, d\mu \le \int_F f \, d\mu$;

d) $E \cap F = \emptyset \Rightarrow \int_{E \cup F} f \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_F f \, d\mu$;

e) $f = 0$ in $E \Rightarrow \int_E f \, d\mu = 0$;

f) $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f \, d\mu = 0$.

Oss. . (a) $\Rightarrow \int_E f$ dipende solo dai valori di f in E!

. (f) $\Rightarrow$ l'integrale su un insieme μ-trascur. è nullo anche se $f = +\infty$ sull'insieme E

Dim a) $\cdot$ $f1_E$ $\mathcal{S}$-misurabile

- s semplice e $\mathcal{S}$-misur. con $0 \le s \le f1_E$

$$s = \alpha_1 1_{A_1} + \dots + \alpha_k 1_{A_k} \quad (\alpha_h > 0, A_h \in \mathcal{S}\ h=1,\dots,k)$$

- $\alpha_h > 0 \Rightarrow A_h \setminus E = \phi \Rightarrow \mu(A_h \cap E) = \mu(A_h \cap E) + \mu(A_h \setminus E) = \mu(A_h)$

- $\int_E s\,d\mu = \alpha_1 \mu(E \cap A_1) + \dots + \alpha_k \mu(E \cap A_k) =$

$$= \alpha_1 \mu(A_1) + \dots + \alpha_k \mu(A_k) = \int_X s\,d\mu$$

- s semplice e $\mathcal{S}$-mis. con $0 \le s \le f1_E \Rightarrow 0 \le s \le f$

$$\int_X s\,d\mu = \int_E s\,d\mu \le \int_E f\,d\mu$$

passando al sup si trova

$$\int_X f1_E\,d\mu \le \int_E f\,d\mu.$$

- s semplice e $\mathcal{S}$-misur. con $0 \le s \le f$

$$s = \alpha_1 1_{A_1} + \dots + \alpha_k 1_{A_k} \quad (\alpha_h > 0, A_h \in \mathcal{S}\ h=1,\dots,k)$$

- $t = s1_E \Rightarrow t$ semplice e $\mathcal{S}$-mis. con $0 \le t \le f1_E$

$$t = \alpha_1 1_{A_1 \cap E} + \dots + \alpha_k 1_{A_k \cap E}$$

- $\int_E s\,d\mu = \int_X t\,d\mu \le \int_X f1_E\,d\mu$

- passando al sup su s si trova

$$\int_E f\,d\mu \leq \int_X f\mathbb{1}_E\,d\mu.$$

b) - $f \leq g$ in $E \Rightarrow f\mathbb{1}_E \leq g\mathbb{1}_E$ in X

- $\int_E f\,d\mu = \int_X f\mathbb{1}_E\,d\mu \leq \int_X g\mathbb{1}_E\,d\mu = \int_E g\,d\mu.$

c) Ovvia!

d) - $s: X \to [0,+\infty)$ semplice e $\mathcal{S}$-mis. come in (*

$$\Downarrow$$

$$\int_{E\cup F} s\,d\mu = \alpha_1\mu(A_1\cap(E\cup F)) + \dots + \alpha_k\mu(A_k\cap(E\cup F)) =$$

$$= \alpha_1\mu(A_1\cap E) + \dots + \alpha_k\mu(A_k\cap E) +$$

$$+ \alpha_1\mu(A_1\cap F) + \dots + \alpha_k\mu(A_k\cap F) =$$

$$= \int_E s\,d\mu + \int_F s\,d\mu;$$

- s semplice e $\mathcal{S}$-mis. con $0 \leq s \leq f$

$$\int_{E\cup F} s\,d\mu = \int_E s\,d\mu + \int_F s\,d\mu \leq \int_E f\,d\mu + \int_F f\,d\mu;$$

- passando al sup su $0 \leq s \leq f$ si ha

$$\int_{E\cup F} f\,d\mu \leq \int_E f\,d\mu + \int_F d\mu;$$

- s, t semplici e $\mathcal{S}$-misur. con $0 \le s, t \le f$
- $r = \max\{s, t\}$ semplice e $\mathcal{S}$-misur. con

$$0 \le s, t \le r \le f$$

- $$\int_E s\,d\mu + \int_F t\,d\mu \le \int_E r\,d\mu + \int_F r\,d\mu =$$

$$= \int_{E \cup F} r\,d\mu \le \int_{E \cup F} f\,d\mu$$

- passando al sup su $0 \le s \le f$ e $0 \le t \le f$ si trova

$$\int_E f\,d\mu + \int_F f\,d\mu \le \int_{E \cup F} f\,d\mu .$$

e) - s semplice e $\mathcal{S}$-misur. con $0 \le s \le f$ come in (a)

- $f = 0$ in E e $0 \le s \le f \Rightarrow \alpha_h = 0$ se $A_h \cap E \neq \emptyset$
- $$\int_E s\,d\mu = \alpha_1 \mu(A_1 \cap E) + \dots + \alpha_k \mu(A_k \cap E) = 0$$

Oppure da (a): $f 1_E = 0$ in X.

f) Ovvio! $\blacksquare$

Teorema di convergenza monotòna

Teorema (H. Lebesgue - B. Levi)

Siano $f_n : X \to [0,+\infty]$ $(n \geq 1)$ e $f : X \to [0,+\infty]$ funzioni t.c.

- f_n $\mathcal{S}$-misurabile $\forall n$;
- $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $\forall n$ e $\forall x \in X$;
- $f_n \to f$ puntualmente in X per $n \to +\infty$.

Allora, f e' $\mathcal{S}$-misurabile e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Oss. Il limite passa sotto il segno di integrale:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \left(\lim_{n\to+\infty} f_n \right) d\mu.$$ ■

Dim. . f e' $\mathcal{S}$-misurabile

. $f_n \leq f_{n+1}$ in X $\forall n \implies \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f_{n+1} \, d\mu$ $\forall n$

. $f_n \leq f$ in X $\forall n \implies \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$ $\forall n$

- $\exists \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = L \in [0,+\infty]$ e $L \le \int_X f \, d\mu$
- $s: X \to [0,+\infty)$ semplice e $\mathcal{S}$-mis. con $0 \le s \le f$ come in (*)
- $0 < c < 1$
- $E_n = \{ f_n \geq cs \}$ $n \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} E_n \in \mathcal{S} \text{ e } E_n \subset E_{n+1} \ \forall n \\ X = \bigcup_n E_n \end{cases}$
- $$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} cs \, d\mu =$$
$$= c \left\{ \alpha_1 \mu(A_1 \cap E_n) + \dots + \alpha_k \mu(A_k \cap E_n) \right\} \quad \forall n$$
- $n \to +\infty \Rightarrow L \geq c \int_X s \, d\mu$
- $0 < c < 1$ arbitrario $\Rightarrow L \geq \int_X s \, d\mu$
- passando al sup su $0 \le s \le f$ si ha:
$$\int_X f \, d\mu \le L.$$

$\blacksquare$

<u>Teorema</u>: Siano $f, g: X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$-misur.
Allora

a) $\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$;

b) $\int_X cf \, d\mu = c \int_X f \, d\mu$ $\quad c \geq 0$ $\quad (0 \cdot \infty = 0!)$

Dim. a). $s,t : X \to [0,+\infty)$ semplici e $\mathcal{S}$-mis.

$$s = \alpha_1 1_{A_1} + \dots + \alpha_k 1_{A_k} \qquad t = \beta_1 1_{B_1} + \dots + \beta_J 1_{B_J}$$

$$(\alpha_h \geq 0,\ A_h \in \mathcal{S}\ h=1,\dots,k \text{ e } \beta_i \geq 0,\ B_i \in \mathcal{S}\ i=1,\dots,J)$$

- $\{A_1,\dots,A_k\}$ e $\{B_1,\dots,B_J\}$ partizioni di X

- $r = s+t$ semplice e $\mathcal{S}$-mis. con

$$r = \sum_{h,i}{}' (\alpha_h + \beta_i) 1_{A_h \cap B_i}$$

e somma estesa alle coppie (h,i) t.c. $A_h \cap B_i \neq \emptyset$

- $$\int_X r\,d\mu = \sum_{h,i}{}' (\alpha_h + \beta_i)\mu(A_h \cap B_i) =$$

$$= \sum_h{}' \alpha_h \sum_i{}' \mu(A_h \cap B_i) + \sum_i{}' \beta_i \sum_h{}' \mu(A_h \cap B_i)$$

$$= \sum_h{}' \alpha_h \mu(A_h) + \sum_i{}' \beta_i \mu(B_i) =$$

$$= \int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu$$

- si usano $\{s_n\}_n$ e $\{t_n\}_n$ semplici, $\mathcal{S}$-mis. e crescenti t.c. $s_n \to f$ e $t_n \to g$ puntualmente in X per $n \to +\infty$ e teorema di convergenza monotòna.

b) Ovvia! ∎

Oss. Se $f, g : X \to [0, +\infty]$ $\mathcal{L}$-mis. sono tali che

- $0 \leq f(x) < +\infty \quad \forall x \in X$;
- $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$;
- $\int_X f \, d\mu < +\infty$.

si ha

$$\int_X (g - f) \, d\mu = \int_X g \, d\mu - \int_X f \, d\mu .$$ ∎

Teorema: Siano $f_n : X \to [0, +\infty]$ $(n \geq 1)$ e $f : X \to [0, +\infty]$ t.c.

- f_n $\mathcal{L}$-misur. $\forall n$;
- $f = \sum_n^1 f_n$ puntualmente in X

Allora, f è $\mathcal{L}$-misurabile e si ha

$$\sum_n^1 \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu .$$

Oss. Tutte le serie di funzioni misurabili e non negative si integrano termine a termine

$$\sum_n^1 \int_X f_n \, d\mu = \int_X \left(\sum_n^1 f_n \right) d\mu .$$ ∎

Teorema (P. Fatou) : Siano $f_n : X \to [0,+\infty]$ ($n \geq$ $\mathcal{S}$-misurabili e sia $f : X \to [0,+\infty]$ definita che

$$f(x) = \liminf_{n \to +\infty} f_n(x), \quad x \in X.$$

Allora, f e' $\mathcal{S}$-misurabile e

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Oss. Se $\exists\, E \in \mathcal{S}$ con $\mu(E) > 0$ e $\mu(E^c) > 0$ si puo' avere $<$!

Dim. . . . .

Integrazione di funzioni uguali q.o.

Teorema: Siano $f, g : X \to [0, +\infty]$ $\mathcal{S}$-misurabili t.c.

- $\{f = g\}$ μ-q.o.

Allora,

a) f, g $\mathcal{S}$-mis. $\Rightarrow \int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$;

b) se μ e' completa, si ha

f $\mathcal{S}$-misur. $\Leftrightarrow$ g $\mathcal{S}$-mis.

e in tal caso si ha $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$.

Dim. a) . $\{f = g\}$ e $\{f \neq g\}$ $\mathcal{S}$-misurabili

(Esercizio —)

- $\mu(\{f \neq g\}) = 0$

- $\int_X f \, d\mu = \int_{\{f=g\}} f \, d\mu + \int_{\{f \neq g\}} f \, d\mu =$

$= \int_{\{f=g\}} g \, d\mu + \int_{\{f \neq g\}} g \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$

$\hookrightarrow$ Prop. ....

b) Ovvio! (Propos. —). ∎

<u>Teorema</u>: Sia $f: X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$-misurabile t.c. $\int_X f\,d\mu < +\infty$.

Allora,

$$\mu(\{f \geq t\}) \leq \frac{1}{t}\int_X f\,d\mu.$$

↳ <u>disuguaglianza di Chebichev</u>

<u>Oss</u>: $f: X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$-mis. e $\int_X f\,d\mu < +\infty$

$$\Downarrow$$

$$\mu(\{f \geq t\}) = O(1/t) \text{ per } t \to +\infty$$ ∎

<u>Corollario</u>: Sia $f: X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$-misurabile.
Allora

a) $\int_X f\,d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ μ-q.o. in X;

b) $\mu(X) > 0$ e $f(x) > 0$ per μ-q.o. $x \Rightarrow \int_X f\,d\mu > 0$;

c) $\int_X f\,d\mu < +\infty \Rightarrow f(x) < +\infty$ per μ-q.o. $x \in X$

Dim a) . Chebichev $\Rightarrow \mu(\{f \geq t\}) = 0 \ \forall t > 0$

. $\{f > 0\} = \bigcup_n \{f \geq 1/n\}$.

b) Controonominale di (a)!

c) . $\{f = +\infty\} \subset \{f \geq n\} \ \forall n \geq 1$

. Chebichev $\Rightarrow \mu(\{f \geq n\}) \leq \frac{1}{n} C \quad (C = \int_X f d\mu)$.

Oss. Provare per l'integrale di Riemann che

$$\begin{cases} f: [a,b] \to \mathbb{R} \text{ (Riemann) integ.} \\ f(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b] \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f > 0.$$

Integrale indefinito e assoluta continuità dell'integrale

<u>Teorema</u>: Sia $f: X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$-misurabile e sia

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu, \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Allora

a) ν è una misura positiva su $\mathcal{S}$;

b) se $g: X \to [0,+\infty]$ è $\mathcal{S}$-misur. si ha

$$\int_E g\,d\nu = \int_E gf\,d\mu, \qquad E \in \mathcal{S}.$$

<u>Oss.</u>
- $\nu = \int f\,d\mu$ <u>integrale indefinito di μ</u>
- $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ <u>derivata di Radon-Nikodym</u>

<u>Dim</u> a) convergenza monotona.

b) caratteristiche $\Rightarrow$ semplici $\Rightarrow$ misurabili ∎

Teorema: Sia $f : X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$-misur. con
$$\int_X f\,d\mu < +\infty.$$
Allora, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c.
$$E \in \mathcal{S} \text{ e } \mu(E) \leq \delta \Rightarrow \int_E f\,d\mu \leq \varepsilon. \qquad (**)$$

Oss (**) assoluta continuità dell'integrale.

Dim. - - - - -

Esercizio: • $f : X \to [0,+\infty]$

• $\# : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ misura del conteggi

Si ha $\int_A f\,d\# = \sum_{x \in A} f(x)$, $A \subset X$.

Disuguaglianze di Hölder e Minkowski

$(X, \mathcal{S}, \mu)$ spazio con misura positiva.

Proposizione: Siano $f, g : X \to [0, +\infty]$ $\mathcal{S}$-misurabili e $1 < p, q < +\infty$ tali che $1/p + 1/q = 1$. Allora,

$$\int_X fg \, d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu \right)^{1/q} \qquad (0 \cdot \infty = 0!)$$

$\downarrow$ disuguaglianza di Hölder

Oss. $p, q \in (1, +\infty)$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ esponenti coniugati. ▨

Dim. $\cdot$ $A = \left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p} \in [0, +\infty]$ $B = \left(\int_X g^q d\mu \right)^{1/q} \in [0, +\infty]$

Caso 1: $A = 0$ o $B = 0$

- $A = 0 \Rightarrow f = 0$ μ-q.o. in $X \Rightarrow fg = 0$ μ-q.o. in $X \Rightarrow 0 = 0$ (anche se $B = +\infty$!)
- idem se $B = 0$

Caso 2: $A > 0$ e $B = +\infty$ o viceversa

- $A > 0$ e $B = +\infty \Rightarrow AB = +\infty \Rightarrow \int_X fg \, d\mu \leq +\infty$

Caso 3: $0 < A, B < +\infty$

- $F = f/A$ e $G = g/B$

- F, G $\mathcal{S}$-misurabili $\Rightarrow F^p, G^q$ $\mathcal{S}$-misurabili e $\int_X F^p d\mu = \int_X G^q d\mu = 1$
- se $x \in X$ è t.c. $0 < F(x), G(x) < +\infty$ si ha

$$0 < F(x)G(x) = e^{\frac{1}{p}\log(F(x))^p + \frac{1}{q}\log(G(x))^q} \leq \leftarrow \text{convessità } t \in \mathbb{R} \mapsto e^t\,!$$

$$\leq \frac{1}{p}[F(x)]^p + \frac{1}{q}[G(x)]^q$$

- lo stesso se $\{F(x), G(x)\} \cap \{0, +\infty\} \neq \emptyset$
- integrando $\Rightarrow \int_X FG\,d\mu \leq \frac{1}{p}\int_X F^p d\mu + \frac{1}{q}\int_X G^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} =$
- $\int_X FG\,d\mu \leq 1 \Rightarrow \int_X fg\,d\mu \leq AB = \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}$ ■

Proposizione: Siano $f, g : X \to [0, +\infty]$ $\mathcal{S}$-misurabili e $1 \leq p < +\infty$. Allora,

$$(*) \quad \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}.$$

$\downarrow$

disuguaglianza di Minkowski

Dim. Ovvia per $p = 1$. Sia $1 < p < +\infty$.

- $(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$
- $q \in (1, +\infty)$ esponente coniugato di $p \Rightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$
- Hölder $\Rightarrow \int_X (f+g)^p d\mu = \int_X f(f+g)^{p-1} d\mu + \int_X g(f+g)^{p-1} d\mu \leq$

$$\leq \left[\left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p}+\left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}\right]\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad (**)$$

<u>Caso 1</u>: $\int_X (f+g)^p d\mu = 0$

- $\int_X (f+g)^p d\mu = 0 \Rightarrow f=0$ μ-q.o. in X e $g=0$ μ-q.o. in $X \Rightarrow (*)$ ovvia!

<u>Caso 2</u>: $\int_X (f+g)^p d\mu = +\infty$

- $t\in[0,+\infty)\mapsto t^p$ convessa $(p\geq 1) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}g(x)\right)^p \leq \frac{1}{2}\left([f(x)]^p+[g(x)]^p\right)$ $\forall x$
- $\int_X (f+g)^p d\mu = +\infty \Rightarrow \max\left\{\int_X f^p d\mu, \int_X g^p d\mu\right\} = +\infty \Rightarrow (*)$ ovvia!

<u>Caso 3</u>: $0 < \int_X (f+g)^p d\mu < +\infty$

Dividendo da $(**)$ segue $(*)$ $\left(1-\frac{p-1}{p}=\frac{1}{p}!\right)$. ∎

<u>Esempi</u>

a) - $\mathbb{K}^N = \{x:\{1,\dots,N\}\to\mathbb{K} \text{ funzione}\}$

- $x\in\mathbb{K}^N \Rightarrow x=(x_1,\dots,x_N)$ ove $x_n = x(n)$ $n=1,\dots,N$
- $X=\{1,\dots,N\}$ e $\mu=\#$ misura del conteggio in $\{1,\dots,N\}$
- $\int_X x\, d\# = x_1+\dots+x_N \qquad \forall x=(x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{K}^N$

(*) $|x_1y_1+\cdots+x_Ny_N| \le |x_1|\cdot|y_1|+\cdots+|x_N|\cdot|y_N| = \int_X |x|\cdot|y|\,d\# \le \ldots$

① Hölder con $p=q=2$ in $\mathbb{K}^N$

- $x=(x_1,\ldots,x_N)$, $y=(y_1,\ldots,y_N)\in\mathbb{K}^N$
- $|x_1y_1+\cdots+x_Ny_N| = \left|\int_X xy\,d\#\right| \le$ ~~$\le$~~ no! $\int_X xy\,dy$ definito dopo! (*)

$$\le \int_X |x|\cdot|y|\,d\# \le \left(\int_X |x|^2 d\#\right)^{1/2}\left(\int_X |y|^2 d\#\right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_N|^2}\cdot\sqrt{|y_1|^2+\cdots+|y_N|^2}$$

- $|\langle x|y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$ $x,y\in\mathbb{K}^N$ disug. di Cauchy-Schwarz

② Minkowski con $p=2$ in $\mathbb{K}^N$

- $x=(x_1,\ldots,x_N)$, $y=(y_1,\ldots,y_N)\in\mathbb{K}^N$
- $\|x+y\| = \sqrt{|x_1+y_1|^2+\cdots+|x_N+y_N|^2} \le$

$$\le \sqrt{(|x_1|+|y_1|)^2+\cdots+(|x_N|+|y_N|)^2} \le$$

$$\le \sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_N|^2} + \sqrt{|y_1|^2+\cdots+|y_N|^2} \le \|x\|+\|y\|$$

- disuguaglianza triangolare per la norma euclidea

③ - $\ell_p = \left\{ x=\{x_n\}_{n\ge1} : \sum_{n\ge1}{}' |x_n|^p < +\infty \right\}$ $(1\le p<+\infty)$

- $x=\{x_n\}_{n\ge1}$ si identifica con $x:\mathbb{N}_+\to\mathbb{K}$, $x(n)=x_n$ $n\ge1$
- $X=\mathbb{N}_+$ e $\mu=\#$ misura del conteggio su $\mathbb{N}_+$

- $\{x_n\}_{n\geq 1}, \{y_n\}_{n\geq 1} \in \ell_p$

  - $\left(\sum_{n\geq 1}' |x_n+y_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n\geq 1}' (|x_n|+|y_n|)^p\right)^{1/p} \overset{\text{Minkowski}}{\leq} \left(\sum_{n\geq 1}' |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n\geq 1}' |y_n|^p\right)^{1/p}$

  - $\left(\sum_{n\geq 1}' |\lambda x_n|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{n\geq 1}' |x_n|^p\right)^{1/p} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

- ℓ_p sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ $(1 \leq p < +\infty)$. $\blacksquare$

Integrale: funzioni reali/complesse

· $(X, \mathcal{S}, \mu)$ sp. con misura positiva.

· $f: X \to \mathbb{R}_\infty$ $\mathcal{S}$-misurabile $\Rightarrow f^\pm : X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{S}$-misurabili

$E \in \mathcal{S}$ e $\min\left\{ \int_E f^+ d\mu ; \int_E f^- d\mu \right\} < +\infty \Rightarrow \int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \in \mathbb{R}_\infty$

· $f: X \to \mathbb{C}$ $\mathcal{S}$-misurabile $\Rightarrow f = u + iv$ e $u, v: X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{S}$-misurabi

$E \in \mathcal{S}$ e $\min\left\{ \int_E u^\pm d\mu , \int_E v^\pm d\mu \right\} < +\infty \Rightarrow$ NO!

$\Rightarrow \int_E f d\mu = \int_E u d\mu + i \int_E v d\mu = \left(\int_E u^+ d\mu - \int_E u^- d\mu \right) + i \left(\int_E v^+ d\mu - \int_E v^- d\mu \right) \in$

<u>Def</u>. Una funzione $f: X \to \mathbb{K}$ $\mathcal{S}$-misurabile t.c.

$$\int_X |f| d\mu < +\infty$$

si dice <u>μ-integrabile in X</u>. ▨

<u>Oss</u>.

a) $f: X \to \mathbb{K}$ $\mathcal{S}$-misurabile $\Rightarrow |f| : X \to [0,+\infty)$ $\mathcal{S}$-misur.

b) se $f: X \to \mathbb{R}$ e' μ-integrabile in X si ha

· $f^\pm$ $\mathcal{S}$-misurabili

· $0 \le \int_E f^\pm d\mu \le \int_X |f| d\mu < +\infty$, $\quad E \in \mathcal{S}$.

Quindi l'integrale

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \in \mathbb{R}$$

e' ben definito per ogni $E \in \mathcal{S}$.

c) se $f: X \to \mathbb{C}$ e' μ-integrabile in X con $f = u + iv$ $(u, v: X \to \mathbb{R})$ si ha

- u, v $\mathcal{S}$-misurabili
- $0 \le \int_E |u|\,d\mu,\ \int_E |v|\,d\mu \le \int_X |f|\,d\mu < +\infty,\ E \in \mathcal{S}$.

Quindi l'integrale

$$\int_E f\,d\mu = \int_E u\,d\mu + i\int_E v\,d\mu \in \mathbb{C}$$

e' ben definito per ogni $E \in \mathcal{S}$. $\blacksquare$

<u>Proposizione</u>: Siano $f, g: X \to \mathbb{K}$ μ-integrabili in X e $E, F \in \mathcal{S}$. Allora,

a) $\int_E f\,d\mu = \int_X f\mathbb{1}_E\,d\mu$; $f\mathbb{1}_E$ μ-integrabile in X e

c) $f = 0$ in E $\Rightarrow$ $\int_E f\,d\mu = 0$;

d) $\mu(E) = 0$ $\Rightarrow$ $\int_E f\,d\mu = 0$.

b) $E \cap F = \emptyset$ $\Downarrow$ $\int_{E \cup F} f\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_F f\,d\mu$

Inoltre, se f e g sono reali, si ha

e) $f \le g$ in E $\Rightarrow$ $\int_E f\,d\mu \le \int_E g\,d\mu$.

<u>Teorema</u>: Siano $f, g: X \to \mathbb{K}$ μ-integrabili in X e $E \in \mathcal{S}$. Allora,

a) $(\alpha f + \beta g)$ e' μ-integrabile in X $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;

b) $\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;

c) $\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu$

<u>Dim</u>.

a) $(\alpha f + \beta g)$ e' $\mathcal{S}$-misurabile e

$$\int_X |\alpha f + \beta g| d\mu \leq \int_X (|\alpha||f| + |\beta||g|) d\mu = |\alpha| \int_X |f| d\mu + |\beta| \int_X |g| d\mu < +\infty$$

b) Basta considerare $E = X$.

<u>Caso 1</u>: f, g reali

- $f^+ - f^- + g^+ - g^- = f + g = (f+g)^+ - (f+g)^-$

$$\Downarrow$$

$$f^+ + g^+ + (f+g)^- = f^- + g^- + (f+g)^+$$

- integrando e riordinando si ha (b) per $\alpha = \beta = 1$

$\alpha \geq 0 \implies (\alpha f)^{\pm} = \alpha f^{\pm} \implies$

$$\implies \int_X \alpha f d\mu = \int_X (\alpha f)^+ d\mu - \int_X (\alpha f)^- d\mu =$$

$$= \int_X \alpha f^+ d\mu - \int_X \alpha f^- d\mu =$$

$$= \alpha \int_X f^+ d\mu - \alpha \int_X f^- d\mu = \alpha \int_X f d\mu$$

$\alpha < 0 \implies (\alpha f)^{\pm} = |\alpha| f^{\mp} \implies$

$$\implies \int_X \alpha f \, d\mu = \int_X (\alpha f)^+ d\mu - \int_X (\alpha f)^- d\mu =$$
$$= \int_X |\alpha| f^- d\mu - \int_X |\alpha| f^+ d\mu =$$
$$= |\alpha| \int_X f^- d\mu - |\alpha| \int_X f^+ d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu$$

Caso 2: f, g complesse $\left(\begin{array}{l} f = u + iv \text{ con } u, v : X \to \mathbb{R} \\ g = w + iz \text{ con } w, z : X \to \mathbb{R} \end{array} \right)$

- f, g μ-integrabili in $X \implies u, v, w, z$ μ-integrabili in X
- $\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X (u+w) \, d\mu + i \int_X (v+z) \, d\mu =$
$$= \int_X u \, d\mu + \int_X w \, d\mu + i \int_X v \, d\mu + i \int_X z \, d\mu =$$
$$= \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$
- per $\int_X \alpha f \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu$ basta fare $\alpha = i$!
- $\int_X (if) \, d\mu = \int_X (-v + iu) \, d\mu = -\int_X v \, d\mu + i \int_X u \, d\mu = i \int_X f \, d\mu$

c) Basta considerare $E = X$.

Caso 1: f reale

- $\left| \int_X f \, d\mu \right| = \left| \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right| \le \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X |f| \, d\mu$

Caso 2: f complessa

possiamo supporre $\int_X f \, d\mu \neq 0$ (altrimenti è ovv

- $\theta = \dfrac{\left(\int_X f d\mu\right)^*}{\left|\int_X f d\mu\right|} \Rightarrow \theta \int_X f d\mu = \left|\int_X f d\mu\right|$ e $|\theta| = 1$

- $\left|\int_X f d\mu\right| = \theta \int_X f d\mu = \int_X \theta f d\mu = \left(\theta f = u + iv \quad \begin{array}{l} u = Re(\theta f) \\ v = Im(\theta f) \end{array}\right.$

$$= \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu \Rightarrow \int_X v d\mu = 0$$

- $u \leq |\theta f| = |f|$ in $X \Rightarrow \left|\int_X f d\mu\right| = \int_X u d\mu \leq \int_X |f| d\mu$. ▨

<u>Teorema</u>: Sia $f: X \longrightarrow \mathbb{K}$ μ-integrabile in X. Allora

a) $E, F \in \mathcal{S}$ e $E \cap F = \phi \Rightarrow \int_{E \cup F} f d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu$;

b) $E_n \in \mathcal{S}$ $(n \geq 1)$ e $E_m \cap E_n = \phi$ $m \neq n \Rightarrow \int_{\bigcup_n E_n} f d\mu = \sum_{n \geq 1} \int_{E_n} f d\mu$

<u>Dim</u>. a) Ovvio!

b) $E = \bigcup_n E_n \in \mathcal{S}$

<u>Caso 1</u>: f reale

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu = \sum_{n \geq 1} \int_{E_n} f^+ d\mu - \sum_{n \geq 1} \int_{E_n} f^- d\mu =$$

$$= \sum_{n \geq 1} \int_{E_n} f d\mu .$$

<u>Caso 2</u>: f complessa

Ovvio dal caso precedente! ▨

Teorema: Siano $f, g : X \to \mathbb{K}$ t.c.

$f = g$ μ-quasi ovunque in X.

Allora,

a) f, g μ-integrabili in $X \Rightarrow \int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$, $E \in \mathcal{S}$;

b) se μ e' completa si ha

f μ-integrabile in $X \Leftrightarrow g$ μ-integrabile in X.

Dim Ovvio! $\blacksquare$

Teorema di convergenza dominata

Teorema (H. Lebesgue): Siano $f_n : X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ e $f : X \to \mathbb{K}$ t.c.

a) f_n e' μ-integrabile in X $\forall n$;

b) $\exists\, g : X \to [0, +\infty]$ $\mathcal{S}$-misurabile con $\int_X g\, d\mu < +\infty$ t.

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in X \qquad g \text{ maggiorante integrab}$$

per ogni n;

c) $f_n \to f$ puntualmente in X per $n \to +\infty$.

Allora, f e' μ-integrabile in X e

$$(*) \qquad \lim_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0 .$$

Oss. Si ha

$$(*) \Rightarrow \left| \int_E f_n\, d\mu - \int_E f\, d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0 \quad n \to +\infty \ \forall E \in$$

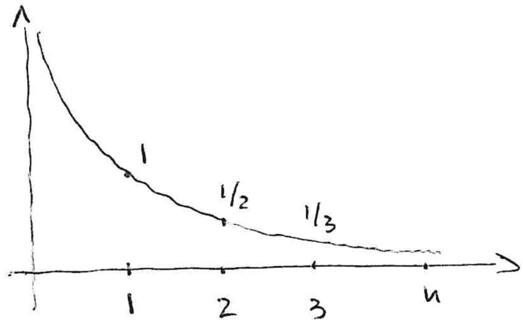
e quindi risulta

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu$$

uniformemente rispetto a $E \in \mathcal{S}$. ▨

<u>Esempio</u>: (b) e' solo C.S. ma non e' C.N.!

- $X = \mathbb{N}_+$ e $\mu = \#$ misura del conteggio su $\mathcal{P}(\mathbb{N}_+)$
- $f_n(m) = \begin{cases} 1/n & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad n \geq 1$
- $\begin{cases} f_n \to 0 \text{ puntualmente in } \mathbb{N}_+ \text{ per } n \to +\infty \\ f_n \ \#\text{-integrabile in } \mathbb{N}_+ \text{ e } \int_{\mathbb{N}_+} f_n \, d\# = \sum_m' f_n(m) = 1/n \ \forall n \\ \int_{\mathbb{N}_+} |f_n - f| \, d\# = \int_{\mathbb{N}_+} f_n \, d\# = \frac{1}{n} \to 0 \text{ per } n \to +\infty \end{cases}$
- $g(m) = \sup_{n \geq 1} f_n(m) = \frac{1}{m} \ \forall m \geq 1$ e $\int_{\mathbb{N}_+} g \, d\# = \sum_m' \frac{1}{m} = +\infty$



<u>Dim.</u>

- f $\mathcal{S}$-misurabile
- $g_n = 2g - |f_n - f|, \quad n \geq 1$
- g_n e' ben definita (non e' $\infty - \infty$) e $\mathcal{S}$-misurabile
- $\begin{cases} |f_n(x)| \leq g(x) \ \forall x \in X \text{ e } n \geq 1 \\ f_n \to f \text{ puntual. in } X \text{ per } n \to +\infty \end{cases} \Rightarrow g_n(x) \geq 0 \ \forall x \in X \text{ e } n \geq 1$
- $g_n \to 2g$ puntualmente in X per $n \to +\infty$

- Fatou $\Rightarrow \int_X 2g\,d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X g_n\,d\mu =$

$$= \int_X 2g\,d\mu + \liminf_{n\to+\infty}\left(-\int_X |f_n-f|\,d\mu\right) =$$

$$= \int_X 2g\,d\mu - \limsup_{n\to+\infty} \int_X |f_n-f|\,d\mu$$

- $\int_X g\,d\mu < +\infty \Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} \int_X |f_n-f|\,d\mu.$ ∎

<u>Corollario</u>: Sia μ completa e siano $f_n : X \to \mathbb{K}$ (
e $f : X \to \mathbb{K}$ t.c.

a) f_n e' μ-integrabile in X $\forall n$;

b) $\exists\, g : X \to [0,+\infty)$ μ-integrabile in X t.c.

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{per } \mu\text{-q.o. } x \in X$$

per ogni n;

c) $f_n \to f$ μ-quasi ovunque in X per $n \to +\infty$.

Allora, f e' μ-integrabile in X e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0.$$

<u>Oss</u>.

- Le ipotesi (b) e (c) significano che
  - $\forall n\ \exists\, T_n$ μ-trascurabile: $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in X \setminus T_n$
  - $\exists\, T$ μ-trascurabile: $f_n(x) \to f(x)$ per $n\to+\infty$ $\forall x \in X \setminus$

e prendendo $T' = \left(\bigcup_n T_n\right) \cup T$ si può avere un unico insieme μ-trascurabile t.c.

$$x \in X \setminus T' \Rightarrow \begin{cases} |f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \\ f_n(x) \longrightarrow f(x) \text{ per } n \to +\infty. \end{cases}$$

- Se μ non è completa la conclusione continua a valere con $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ μ-quasi ovunque uguale a f al posto di f. ■

Dim. Appunti! ■

<u>Teorema</u>: Siano $f_n : X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 1)$ e $f : X \to \mathbb{K}$ t.c.

a) f_n è μ-integrabile in X $\forall n$;

b) $\sum_{n \geq 1}' \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty$;

c) $f = \sum_{n \geq 1}' f_n$ puntualmente in X.

Allora, f è μ-integrabile in X e si ha

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n \geq 1}' \int_X f_n \, d\mu$$

$$\hookrightarrow \int_X \left(\sum_{n \geq 1}' f_n \right) d\mu = \sum_{n \geq 1}' \int_X f_n \, d\mu.$$

Dim.

- $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ $(n \geq 1)$ μ-integrabile in X;
- $s_n \to f$ puntualmente in X per $n \to +\infty$.
- $g(x) = \sum_{n\geq 1}' |f_n(x)|$ $x \in X$ $\Rightarrow$ $g : X \to [0, +\infty]$ $\mathcal{Y}$-misurabile
- $\int_X g \, d\mu = \int_X \left(\sum_{n\geq 1}' |f_n| \right) d\mu = \sum_{n\geq 1}' \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty$
- $|s_n(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in X$ e $n \geq 1$
- CD $\Rightarrow$ $\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X s_n \, d\mu = \sum_{n\geq 1}' \int_X f_n \, d\mu$ ▨

Oss. Si ha

Chebychev $\Rightarrow$ $0 \leq g(x) < +\infty$ per μ-q.o. $x \in X$

e quindi

$$\sum_{n\geq 1}' \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 1}' f_n \text{ converge assol. } \mu\text{-q.o. in } X$$

Se μ e' completa si puo' prendere

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n\geq 1}' f_n(x) & \text{se converge} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e si ripete la dimostrazione per concludere che f e' μ-integrabile in X e si ha

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n\geq 1}' \int_X f_n \, d\mu.$$

Quindi (c) e' μ-quasi ovunque implicata da (b). ▨

Funzioni definite su sottoinsiemi

- $(X, \mathcal{S}, \mu)$ sp. con misura positiva
- $E \in \mathcal{S}$ e $f : E \to \mathbb{K}$ $(\mathbb{R}_\infty)$

Come applicare i risultati precedenti a questo caso?

(I) $\mathcal{S}(E) = \{F \in \mathcal{S} : F \subset E\}$ σ-algebra di E

$\mu_E(F) = \mu(F)$, $F \in \mathcal{S}(E)$ misura positiva su $\mathcal{S}(E)$

- f $\mathcal{S}$-misurabile in E $\equiv$ f $\mathcal{S}(E)$-misurabile
- f μ-integrabile in E $\equiv$ f μ_E-integrabile in E

e in tal caso si scrive

$$\int_F f\,d\mu := \int_F f\,d\mu_E, \quad F \in \mathcal{S}(E).$$

(II) $f_E : X \to \mathbb{K}$ $(\mathbb{R}_\infty)$ $f_E(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \in X \setminus E \end{cases}$

- f $\mathcal{S}$-misurabile in E $\equiv$ f_E $\mathcal{S}$-misurabile
- f μ-integrabile in E $\equiv$ f_E μ-integrabile in X

e in tal caso si scrive

$$\int_F f\,d\mu := \int_F f_E\,d\mu, \quad F \subset E,\ F\ \mathcal{S}\text{-misurabile}$$

COSTRUZIONE DI MISURE

Metodo di Carathéodory

misure esterne (I metodo di Carathéodory)

X insieme (non vuoto)

<u>Def</u>. $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ tale che

- $\mu^*(\phi) = 0$;
- $A \subset \bigcup_n A_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_n{}' \mu^*(A_n)$;

si dice misura esterna su X. ■

Proprietà: . $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ misura esterna su X;

. $A, B \subset X$ e $A_n \subset X$ $n \geq 1$.

Allora,

a) $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$; monotonia

b) $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$; finita subadditività

c) $\mu^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n{}' \mu^*(A_n)$. numerabile subadd.

Teorema (C. Carathéodory):

Sia $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ una misura esterna su X e sia

$$\mathcal{S}(\mu^*) = \{E : \underbrace{\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \ \forall A \subset X}_{(*)}\}.$$

Allora,

a) $\mathcal{S}(\mu^*)$ e' una σ-algebra di X;

b) $\mu^*(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{S}(\mu^*)$;

c) la restrizione di μ^* a $\mathcal{S}(\mu^*)$ e' una misura positiva completa su $\mathcal{S}(\mu^*)$.

Oss. . (*) condizione di misurabilità di Carathéodo

. $E \in \mathcal{S}(\mu^*)$ μ^*-misurabile

. $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \\ \forall A \text{ con } 0 < \mu^*(A) < +\infty. \end{cases}$

Dim (a) $\mathcal{S}(\mu^*)$ classe di Dynkin stabile per intersezione finita

. $X \in \mathcal{S}(\mu^*)$

. $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A \setminus E^c) + \mu^*(A \cap E^c) \ \forall A$

$E \in \mathcal{S}(\mu^*) \Leftrightarrow E^c \in \mathcal{S}(\mu^*)$

• $E, F \in \mathcal{S}(\mu^*) \Rightarrow E \cup F \in \mathcal{S}(\mu^*)$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) =$$
$$= \mu^*(A \cap E) + \mu^*((A \setminus E) \cap F) + \mu^*((A \setminus E) \setminus F) \geq$$

– $(A \setminus E) \setminus F = A \setminus (E \cup F)$

– $(A \cap E) \cup [(A \setminus E) \cap F] = A \cap (E \cup F)$

$$\geq \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \setminus (E \cup F)) \qquad \forall A$$

• $E, F \in \mathcal{S}(\mu^*)$ e $E \cap F = \phi \Rightarrow \mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F)$

$$\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*([A \cap (E \cup F)] \cap E) + \mu^*([A \cap (E \cup F)] \setminus E) =$$
$$= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F) \qquad \forall A$$

• $\begin{cases} E_n \in \mathcal{S}(\mu^*) & n \geq 1 \\ E_m \cap E_n = \phi & m \neq n \end{cases}$ $E = \bigcup_n E_n \Rightarrow \mu^*(A \cap E) = \sum_n \mu^*(A \cap E_n)$ $\forall A$

$$\mu^*(A \cap E) \geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup \dots \cup E_n)) = \sum_{1 \leq m \leq n} \mu^*(A \cap E_m) \quad \forall A$$

$$n \to +\infty \Rightarrow \mu^*(A \cap E) \geq \sum_n \mu^*(A \cap E_n) \geq \mu^*(A \cap E) \quad \forall A$$

• $\begin{cases} E_n \in \mathcal{S}(\mu^*) & n \geq 1 \\ E_m \cap E_n = \phi & m \neq n \end{cases}$ $E = \bigcup_n E_n \Rightarrow E \in \mathcal{S}(\mu^*)$

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup \dots \cup E_n)) + \mu^*(A \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_n)) \geq$$
$$\geq \sum_{1 \leq m \leq n} \mu^*(A \cap E_m) + \mu^*(A \setminus E) \qquad \forall A$$

$$n \to +\infty \Rightarrow \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \qquad \forall A.$$

b) Ovvio!

c) Ovvio per (a) e (b)! $\boxtimes$

Come costruire una misura esterna?

$\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$:
- $\phi \in \mathcal{R}$
- $\forall A \subset X \; \exists \{R_k\}_k \subset \mathcal{R} : A \subset \bigcup_k R_k$

↳ ricoprimento elementare di X

Teorema: Siano
- $\mathcal{R}$ ricoprimento elementare di X;
- $\lambda : \mathcal{R} \to [0,+\infty]$ t.c. $\lambda(\phi)=0$.

Allora,

$$\mu^*(A)=\inf\left\{ \sum_k{}' \lambda(R_k) : A \subset \bigcup_k R_k \text{ e } R_k \in \mathcal{R} \; \forall k \right\}, \quad A \subset X,$$

e' una misura esterna su X.

Dim
- $\mu^*(\phi)=0$
- $A \subset \bigcup_n A_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_n{}' \mu^*(A_n)$
  - Supponiamo $\sum_n{}' \mu^*(A_n) < +\infty$ (altrimenti e' ovvio)
  - $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists R_{n,k} \in \mathcal{R} \; k \geq 1 : \begin{cases} A_n \subset \bigcup_k R_{n,k} \\ \sum_k{}' \lambda(R_{n,k}) < \mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n \end{cases}$
  - $A \subset \bigcup_{n,k} R_{n,k}$ e si ha

$$\mu^*(A) \le \sum_{n,k}{}' \lambda(R_{n,k}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fubini-to}}}{=} \sum_n{}' \sum_k{}' \lambda(R_{n,k}) \le$$

$$\le \sum_n{}' \left(\mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n\right) = \sum_n{}' \mu^*(A_n) + \varepsilon. \quad \blacksquare$$

misure esterne metriche (II metodo di Carathéodory)

(X, d) sp. metrico

Def. $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ misura esterna su X t.

$$A, B \text{ e } d(A,B) > 0 \Rightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

si dice misura esterna metrica in X. ▨

Teorema: Sia $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ una misura esterna metrica in X. Allora,

$$\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{S}(\mu^*).$$

Dim. 1) Proviamo che

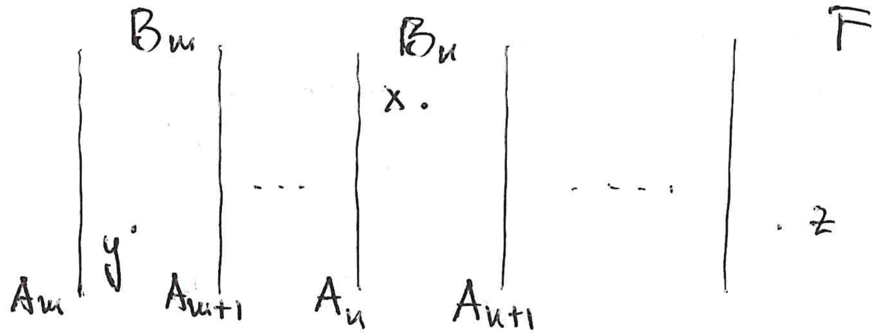
$$\begin{cases} \mu^*(A) < +\infty \\ F \text{ chiuso e } A \cap F = \emptyset \\ A_n = \{x \in A : d(x, F) \geq 1/n\} \quad n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(A).$$

- F chiuso e $A \cap F = \emptyset \Rightarrow A = \bigcup_n A_n$

- $A_n \subset A_{n+1} \ \forall n \Rightarrow$
  - $\exists \lim_{n \to +\infty} \mu^*(A_n)$
  - basta provare che $\lim_{n \to +\infty} \mu^*(A_{2n}) = \mu^*($

- $B_n = A_{n+1} \setminus A_n \quad n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad d(B_m, B_n) > 0 \quad |n-m| \geq 2$

$n \geq m+2$

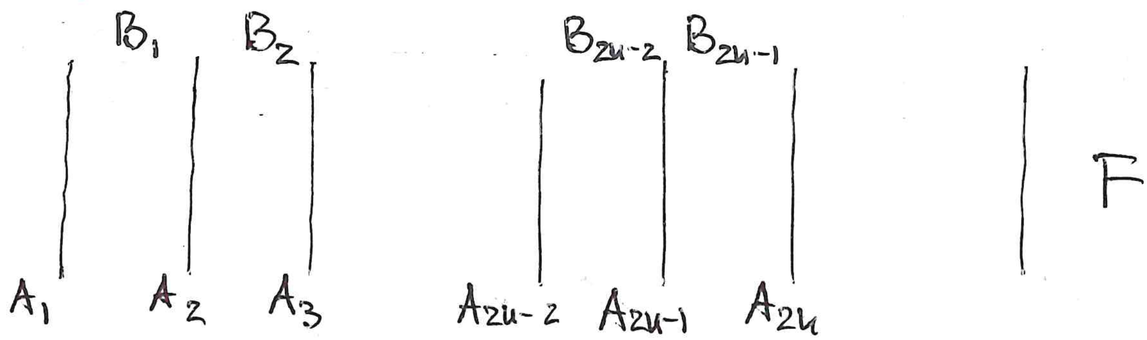


$x \in B_n \Rightarrow x \in A$ e $x \notin A_n \Rightarrow d(x,F) < 1/n \Rightarrow \exists z \in F : d(x,z) < 1/n$

$y \in B_m \Rightarrow y \in A_{m+1} \Rightarrow d(y,z) \geq d(y,F) \geq \frac{1}{m+1}$

$d(x,y) \geq d(y,z) - d(z,x) \geq \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} = \frac{1}{(m+1)(m+2)}$

- $$\begin{cases} A_{2n} \supset \bigcup_{1 \leq m \leq n-1} B_{2m} \Rightarrow \mu^*(A_{2n}) \geq \sum'_{1 \leq m \leq n-1} \mu^*(B_{2m}) \\ A_{2n} \supset \bigcup_{1 \leq m \leq n} B_{2m-1} \Rightarrow \mu^*(A_{2n}) \geq \sum'_{1 \leq m \leq n} \mu^*(B_{2m-1}) \end{cases}$$



- $\mu^*(A_{2n}) \leq \mu^*(A) < +\infty \ \forall n \Rightarrow \sum'_m \mu^*(B_m) < +\infty$
- $A = A_{2n} \cup \left(\bigcup_{m \geq 2n} B_m \right)$ e $\sum'_{m \geq 2n} \mu^*(B_m) \longrightarrow 0^+ \quad n \to +\infty$
- $0 \leq \mu^*(A) - \mu^*(A_{2n}) \leq \sum'_{m \geq 2n} \mu^*(B_m) \longrightarrow 0^+ \quad n \to +\infty$

2) F chiuso $\Rightarrow F \in \mathcal{S}(\mu^*)$.

$$\cdot \begin{cases} \mu^*(A) < +\infty \\ A_n = \{x \in A \setminus F : d(x,F) \geq 1/n\} \ n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(A \setminus F)$$

$$d(A_n, A \cap F) \geq d(A_n, F) \geq 1/n \quad \forall n$$

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A_n \cup (A \cap F)) =$$

$$= \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A_n) \longrightarrow \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \setminus F)$$

■

Come costruire una misura esterna metrica?

$\mathcal{R}$: $\cdot \ \emptyset \in \mathcal{R}$

$\cdot \ \forall A \subset X, \forall \delta > 0 \ \exists \{R_k\}_k \subset \mathcal{R}$: $-\ \mathrm{diam}(R_k) \leq \delta$; $-\ A \subset \bigcup_k R_k$

$\hookrightarrow$ ricoprimento elementare fine di X

Teorema: Siano

- $\mathcal{R}$ ricoprimento elementare fine di X;
- $\lambda : \mathcal{R} \to [0,+\infty]$ t.c. $\lambda(\emptyset) = 0$.

Allora,

$$\mu^*(A) = \sup_{\delta > 0} \left(\inf \left\{ \sum_k \lambda(R_k) : A \subset \bigcup_k R_k, \ R_k \in \mathcal{R} \text{ e } \mathrm{diam}(R_k) \leq \delta \ \forall k \right\} \right)$$

$A \subset X$,

è una misura esterna metrica in X.

Dim $\mu^*_\delta(A) = \inf\left\{ \sum_k{}' \lambda(R_k) : A \subset \bigcup_k R_k,\ R_k \in \mathcal{R} \text{ e } \operatorname{diam}(R_k) \le \delta\ \forall k \right\}, A$

- μ^*_δ misura esterna in X $\forall \delta > 0$
- $0 < \delta_1 \le \delta_2 \Rightarrow \mu^*_{\delta_1}(A) \ge \mu^*_{\delta_2}(A)$, $A \subset X$
- $\mu^*_\delta \uparrow \mu^*$ puntualmente in $\mathcal{P}(X)$ per $\delta \downarrow 0^+$.
- $A \subset \bigcup_n A_n \Rightarrow \mu^*_\delta(A) \le \sum_n{}' \mu^*_\delta(A_n) \le \sum_n{}' \mu^*(A_n)$ $\forall \delta > 0$

$$\Rightarrow \mu^*(A) \le \sum_n{}' \mu^*(A_n)$$

- A, B : $d(A,B) > 0$ e $0 < \delta < d(A,B)$

$$\Downarrow$$

$$\mu^*_\delta(A \cup B) = \mu^*_\delta(A) + \mu^*_\delta(B) \quad (*)$$

- basta $\mu^*_\delta(A \cup B) \ge \mu^*_\delta(A) + \mu^*_\delta(B)$
- $\left\{ \begin{array}{l} \mu^*_\delta(A \cup B) < +\infty \\ \varepsilon > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \exists \{R_k\}_k \subset \mathcal{R}$:
  - $A \cup B \subset \bigcup_k R_k$
  - $\operatorname{diam}(R_k) \le \delta$
  - $\sum_k{}' \lambda(R_k) \le \mu^*_\delta(A \cup B) + \varepsilon$
- supponiamo $R_k \cap (A \cup B) \ne \emptyset$ $\forall k$
- $\{R_k^A\}_k = \{R_k : A \cap R_k \ne \emptyset\}$ $\{R_k^B\} = \{R_k : B \cap R_k \ne \emptyset\}$
- $A \subset \bigcup_k R_k^A$ e $B \subset \bigcup_k R_k^B$
- $\mu^*_\delta(A) + \mu^*_\delta(B) \le \sum_k{}' \lambda(R_k^A) + \sum_k{}' \lambda(R_k^B) =$

$$= \sum_k{}' \lambda(R_k) \le \mu^*_\delta(A \cup B) + \varepsilon$$

- $\delta \to 0^+$ in $(*)$ $\Rightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ ▨

<u>Proposizione</u>: Siano

- $\mathcal{R}$ ricoprimento elementare fine di X;
- $\lambda : \mathcal{R} \to [0,+\infty]$ t.c. $\lambda(\emptyset) = 0$;

con la seguente proprietà:

$\forall R \in \mathcal{R}$ e $\forall \delta, \varepsilon > 0$ $\exists \{R_k\}_k \subset \mathcal{R}$ tali che

- $R \subset \bigcup_k R_k$ e $\operatorname{diam}(R_k) \leq \delta$ $\forall k$;
- $\sum_k' \lambda(R_k) \leq \lambda(R) + \varepsilon$.

Allora, le misure esterne costruite nei due modi sono uguali.

<u>Dim</u> μ^* I metodo (misura esterna)

ν^* II metodo (misura esterna metrica)

1) $\mu^* \leq \nu^*$

2) $\mu^* \geq \nu^*$

- supponiamo $\mu^*(A) < +\infty$ (altrimenti è ovvio!)
- $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \{R_k\}_k \subset \mathcal{R}$: $A \subset \bigcup_k R_k$ e $\sum_k' \lambda(R_k) \leq \mu^*(A) + \varepsilon/2$
- $\forall \delta > 0, \forall k \geq 1$ $\exists \{R_{k,h}\}_h \subset \mathcal{R}$:
  - $R_k \subset \bigcup_h R_{k,h}$
  - $\operatorname{diam}(R_{k,h}) \leq \delta$
  - $\sum_h' \lambda(R_{k,h}) \leq \lambda(R_k) + \varepsilon/2$

Fubinito!

- $A \subset \bigcup_{h,k} R_{k,h}$ e $\nu^*_\delta(A) \leq \sum_{h,k}' \lambda(R_{k,h}) \leq \ldots \leq \mu^*(A) + \varepsilon$