Università degli Studi di Parma
Corso di Laurea in Matematica (A.A. 2021–2022)

ANALISI MATEMATICA 3 – ESERCIZI

2. Misura e integrazione in $\mathbb{R}^N$

Negli esercizi seguenti $|E|$ denota la misura di Lebesgue di un insieme Lebesgue misurabile $E \subset \mathbb{R}$ e tutti i riferimenti a misure e integrali sono relativi alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$.

Esercizio 1. Per ogni $x \in [0,1)$, siano $d_n(x) \in \{0,\dots,9\}$ $(n \geq 1)$ le cifre della rappresentazione decimale limitata[1] di x cosicché risulta

$$x = \sum_n \frac{d_n(x)}{10^n}.$$

Provate che l'insieme

$$E = \big\{x \in [0,1) : \, d_n(x) \neq 9 \text{ per ogni } n\big\}$$

è misurabile e calcolatene la misura.

Esercizio 2. Siano $d_n(x)$ $(n \geq 1)$ le cifre della rappresentazione decimale di x come nell'Esercizio 1. Provate che gli insiemi

$$\begin{aligned} E &= \big\{x \in [0,1) : \, d_n(x) \text{ dispari per ogni } n\big\}\,; \\ F &= \big\{x \in [0,1) : \, d_n(x) \text{ dispari definitivamente}\big\}\,; \\ G &= \big\{x \in [0,1) : \, d_n(x) \text{ dispari per infiniti } n\big\}\,; \end{aligned}$$

sono misurabili e calcolatene le misure.

Esercizio 3. Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme misurabile con $|E| > 0$. Provate che per ogni $0 < t < |E|$ esiste un insieme misurabile E_t tale che $E_t \subset E$ e $|E_t| = t$.

Esercizio 4. Per ogni $0 < \varepsilon < 1$, costruite un insieme $K_\varepsilon \subset [0,1]$ con le seguenti proprietà:

(a) K_ε è compatto e totalmente disconnesso con $\mathrm{int}(K_\varepsilon) = \varnothing$;
(b) $|K_\varepsilon| = \varepsilon$.

Costruite quindi una funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ limitata e Lebesgue integrabile in $[0,1]$ che non è uguale quasi ovunque ad alcuna funzione Riemann integrabile in $[0,1]$.

Esercizio 5. Sia $\{q_n : \, n \geq 1\} = \mathbb{Q}$ una enumerazione dei razionali e siano

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{|t|} & 0 < |t| \leq 1 \\ 0 & t = 0 \text{ o } |t| > 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{5^n} \varphi(t - q_n)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Provate che

[1] Ad esempio, per $x = 1/2$, si sceglie la rappresentazione decimale $1/2 = 0.5000\dots$ anziché $1/2 = 0.4999\dots$.

(a) $f(t) < +\infty$ per q.o. $t \in \mathbb{R}$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$;

(b) f è illimitata in ogni intervallo non degenere di $\mathbb{R}$;

(c) la proprietà (b) vale anche se si modifica f su un insieme trascurabile.

Esercizio 6. Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile in $[0,1]$. Calcolate

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \log\left(1 + e^{nf(x)}\right) dx.$$

Esercizio 7. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile in $\mathbb{R}$ con

$$f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f > 0.$$

Calcolate

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n \log\left(1 + \left[\frac{f(x)}{n}\right]^{\alpha}\right) dx \qquad (0 < \alpha < +\infty).$$

Esercizio 8. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile in $\mathbb{R}$. Calcolate

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-n) \frac{x}{1+|x|}\, dx.$$

Esercizio 9. Siano $f_n\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ le funzioni definite da

$$f_n(x) = a\mathrm{e}^{-nax} - b\mathrm{e}^{-nbx}, \qquad x > 0,$$

con $0 < a < b$. Provate che

(a) ogni funzione f_n è integrabile in $(0,+\infty)$ con $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = 0$;

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n| = +\infty$.

Provate quindi che la serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$$

converge per $x > 0$ e definisce una funzione $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ che risulta integrabile in $(0,+\infty)$ con

$$\int_0^{+\infty} f = \log(b/a).$$

Suggerimenti

Esercizio 1. Come nella costruzione dell'insieme di Cantor, $E = \bigcap_n E_n$ con E_n unione di intervalli tali che ...

Esercizio 2. Per l'insieme E procedete come nell'Esercizio 1. L'insieme F è unione di copie riscalate di E. Quale relazione c'è tra F e G?

Esercizio 4. Procedendo come nella costruzione dell'insieme di Cantor, eliminate al passo n una frazione $0 < \xi_n < 1$ opportuna dagli intervalli precedenti.

Esercizio 6. Provate che risulta

$$t^+ < \log\left(1 + e^t\right) \leq \log 2 + t^+, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 7. Provate che per $\alpha \geq 1$ risulta

$$0 < \frac{\log\left(1 + t^\alpha\right)}{t} \leq \alpha, \qquad t > 0,$$

e per $0 < \alpha < 1$ usate il lemma di Fatou.